DOI:CNKI:50-1165/N. 20120704. 1115. 010

一类含时滞和扩散的 Prey-Predator 系统波前解的存在性*

徐 天 华
(四川民族学院 数学系，四川 康定 626001)

摘要:反应扩散方程的行波解可以很好地表现自然界中的振荡现象和扰动以有限速度传播的现象,是非线性偏微分方程的一个重要研究领域。本文研究了一类含时滞和扩散的 Prey-Predator 系统的行波解。通过构造系统的上下解,利用波前解的存在性理论,得到当时滞 τ_1 和 τ_4 较小时,该系统波前解存在。

关键词:时滞;扩散;上下解;Prey-Predator;波前解

中图分类号:O175.26 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2012)04-0057-06

反应扩散方程的行波解可以很好地表现自然界中的振荡现象以及扰动以有限速度传播的现象[1],是非线性偏微分方程的一个重要研究领域。近年来,学者们考虑时滞和空间等因素对系统的影响,提出了含时滞的反应扩散方程,特别是对含时滞的反应扩散方程行波解的研究更是引人注意,取得了不少的成果[2-12]。如文献[3-6]讨论了 Lotka-Volterra 系统的行波解,文献[10]研究了 Giu-Lawson 系统行波解的存在性问题,文献[11]研究了一类 Prey-Predator 系统,但研究还很不够,尤其是含时滞和扩散的 Prey-Predator 模型波前解的研究还需要继续深入。基于此,本文将使用文献[12]的方法,通过构造系统的上下解,讨论一类含时滞和扩散的 Prey-Predator 系统波前解的存在性。

本文考虑如下一类含时滞和扩散的 Prey-Predator 系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=D_1\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}+r_1u_1(x,t)[1-a_1u_1(x,t-\tau_1)+b_1u_2(x,t-\tau_2)]\\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=D_2\dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}+r_2u_2(x,t)[1-b_2u_1(x,t-\tau_3)-a_2u_2(x,t-\tau_4)]\end{cases}, \tag{1}$$

这里 $x\in\mathbf{R},u_i\in\mathbf{R},t\geqslant 0,D_i>0,r_i>0,a_i>0,b_i>0,i=1,2,\tau_j\geqslant 0,j=1,2,3,4$。

1 预备知识

考虑向量时滞反应扩散方程

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(u_t(x)), \tag{2}$$

其中 $t\geqslant 0,x\in\mathbf{R},u\in\mathbf{R}^n,D=\mathrm{diag}(D_1,\cdots,D_n),D_i>0,i=1,2,\cdots,n,f$ 映 $C([-\tau,0],\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathbf{R}^n$,并且连续,$u_t(x)\in C([-\tau,0],\mathbf{R}^n),u_t(x)(s)=u(x,t+s),s\in[-\tau,0]$。

定义 1 $U=(U_1,\cdots,U_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,V=(V_1,\cdots,V_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,对 $i=1,2,\cdots,n$。若 $U_i=V_i$,则称 $U=V$;若 $U_i\leqslant V_i$,则称 $U\leqslant V$;若 $U\leqslant V$ 且 $U\neq V$,则称 $U<V$。

若 $U\leqslant V$,记 $[U,V]=\{W\mid W=(W_1,W_2,\cdots,W_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,U_i\leqslant W_i\leqslant V_i,i=1,2,\cdots,n\}$。

定义 2 称 $U(z)$ 关于 $z\in\mathbf{R}$ 单调,若对任意的 $z_1<z_2$,有 $U(z_1)\leqslant U(z_2)$ 或 $U(z_1)\geqslant U(z_2)$。

定义 3 (2)式的形如 $u(x,t)=U(x+ct)$ 的解叫行波解。特别地,若 U 单调有界且不恒为常向量,则称 $u(x,t)$ 为(2)式的波前解,其中 c 是实常数,称之为传播速度。

* **收稿日期**:2011-10-14 **修回日期**:2011-11-30 **网络出版时间**:2012-07-04 11:15:00
资助项目:四川省教育厅科研基金(No. 10ZC024)
作者简介:徐天华,女,讲师,硕士,研究方向为微分方程。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120704.1115.201204.57_010.html

为了寻找(2)式的波前解,令 $u(x,t)=U(z)$,$z=x+ct$,$c>0$,代入(2)式得

$$DU''(z)-cU'(z)+f_c(U_z)=0,\tag{3}$$

其中 $z\in\mathbf{R}$,$U_z(\cdot)\in C([-c\tau,0],\mathbf{R}^n)$,$U_z(s)=U(z+s)$,$s\in[-c\tau,0]$,$f_c$ 映 $C([-c\tau,0],\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathbf{R}^n$,$f_c(\psi)=f(\psi^c)$,$\psi^c(s)=\psi(cs)$,$s\in[-\tau,0]$。

假设(A1):存在 $K=(K_1,\cdots,K_n)^{\mathrm{T}}$,$K_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,使得 $f(0)=f(K)=0$。

假设(A2):对假设(A1)中的 K,存在矩阵 $\beta=\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,其中 $\beta_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,使得 $f_c(\varphi)-f_c(\psi)+\beta(\varphi(0)-\psi(0))\geqslant 0$,这里 $\varphi,\psi\in C([-c\tau,0],\mathbf{R}^n)$满足

ⅰ) $0\leqslant\psi(s)\leqslant\varphi(s)\leqslant K$,$s\in[-c\tau,0]$;

ⅱ) $\mathrm{e}^{\beta s}(\varphi(s)-\psi(s))$关于 $s\in[-c\tau,0]$单调不减。

$\Gamma=\{$记集合 Γ 为 $U(-\infty)=0$ 且 $U(+\infty)=K$,$U(z)$关于 $z\in\mathbf{R}$ 单调不减;

$U\in C(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$,对每个固定的 $s>0$,$e^{\beta s}(U(z+s)-U(z))$关于 $z=\in\mathbf{R}$ 单调不减$\}$

其中 β、K 与假设(A2)中 β、K 相同。

定义 4 称一阶和二阶导数都几乎处处存在的连续向量函数 $W(z)$为(3)式的上(下)解,若对几乎所有的 $z\in\mathbf{R}$,有 $DW''(z)-cW'(z)+f_c(W_z)\leqslant(\geqslant)0$。

引理 1[12] 假设(A1)和(A2)成立,且(3)式有上解 $W(z)\in\Gamma$ 和下解 $V(z)$,满足

ⅰ)$0\leqslant V(z)\leqslant W(z)\leqslant K$,$z\in\mathbf{R}$;

ⅱ)在 $z\in\mathbf{R}$ 上 $V(z)\neq 0$ 且在$[\delta,K]$上(2)式除 K 外没有其他平衡态,其中 $\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)^{\mathrm{T}}$,$\delta_i=\sup\limits_{z\in\mathbf{R}}V_i(z)$,$i=1,2,\cdots,n$;

ⅲ) $\mathrm{e}^{\beta z}(W(z)-V(z))$关于 $z\in\mathbf{R}$ 单调不减。

则(3)式存在单调解 $U(z)$,并满足 $U(-\infty)=0$ 和 $U(+\infty)=K$。

2 主要结果及证明

利用上述引理,建立如下波前解存在性定理。

定理 1 若$\dfrac{1}{b_1}<\dfrac{1}{a_2}$,$\dfrac{1}{a_1}<\dfrac{1}{b_2}$,则对于任意 $c>\max\limits_{i=1,2}\left\{2\sqrt{\dfrac{D_ir_1(2b_1+a_2)}{a_2}},2\sqrt{D_ir_2}\right\}$,当 τ_1 和 τ_4 充分小时,(1)式存在联结$\left(\dfrac{1}{a_1},0\right)$与$\left(0,\dfrac{1}{a_2}\right)$的波前解。

为证明定理,令$\overline{u}_1(x,t)=\dfrac{1}{a_1}-u_1(x,t)$,代入(1)式得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}=D_1\ \dfrac{\partial^2u_1(x,t)}{\partial x^2}+r_1\left(\dfrac{1}{a_1}-\overline{u}_1(x,t)\right)[a_1\ \overline{u}_1(x,t-\tau_1)+b_1u_2(x,t-\tau_2)]\\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}=D_2\ \dfrac{\partial^2u_2(x,t)}{\partial x^2}+r_2u_2(x,t)\left[1-\dfrac{b_2}{a_1}+b_2\ \overline{u}_1(x,t-\tau_3)-a_2u_2(x,t-\tau_4)\right]\end{cases}。\tag{4}$$

为了寻求(4)式的波前解,令$\overline{u}_1(x,t)=U_1(z)$,$u_2(x,t)=U_2(z)$,$z=x+ct$,代入(4)式得

$$\begin{cases}D_1U_1''(z)-cU_1'(z)+r_1\left(\dfrac{1}{a_1}-U_1(z)\right)[a_1U_1(z-c\tau_1)+b_1U_2(z-c\tau_2)]=0\\ D_2U_2''(z)-cU_2'(z)+r_2U_2(z)\left[1-\dfrac{b_2}{a_1}+b_2U_1(z-c\tau_3)-a_2U_2(z-c\tau_4)\right]=0\end{cases}。\tag{5}$$

由(3)、(5)式知 f_c 的定义为:$f_c=(f_{c1}(\varphi),f_{c2}(\varphi))^{\mathrm{T}}$,其中

$$\varphi\in C([-c\tau,0],\mathbf{R}^2),\tau=\max_{1\leqslant j\leqslant 4}\{\tau_j\},f_{c1}(\varphi)=r_1\left(\frac{1}{a_1}-\varphi_1(0)\right)[a_1\varphi_1(-c\tau_1)+b_1\varphi_2(-c\tau_2)],$$

$$f_{c2}(\varphi)=r_2\varphi_2(0)\left[1-\frac{b_2}{a_1}+b_2\varphi_1(-c\tau_3)-a_2\varphi_2(-c\tau_4)\right]。$$

因 $c>\max\limits_{i=1,2}\left\{2\sqrt{\dfrac{D_ir_1(2b_1+a_2)}{a_2}},2\sqrt{D_ir_2}\right\}$,取

$$\lambda_1=\frac{1}{2D_1}\left(c-\sqrt{c^2-\frac{4D_1(2b_1r_1+a_2r_1)}{a_2}}\right),\lambda_2=\frac{1}{2D_1}\left(c+\sqrt{c^2-\frac{4D_1(2b_1r_1+a_2r_1)}{a_2}}\right),$$

$$\lambda_3=\frac{1}{2D_2}\left(c-\sqrt{c^2-4D_2r_2}\right),\lambda_4=\frac{1}{2D_2}\left(c+\sqrt{c^2-4D_2r_2}\right)。$$

则 $0<\lambda_1<\lambda_2,0<\lambda_3<\lambda_4$。当 $D_1<D_2$ 时有 $\lambda_3<\lambda_2$，当 $D_1\geqslant D_2$ 时，

$$\lambda_3=\frac{1}{2D_2}\left(c-\sqrt{c^2-4D_2r_2}\right)=\frac{2r_2}{c+\sqrt{c^2-4D_2r_2}}\leqslant\frac{2r_2}{c+\sqrt{c^2-4D_1r_2}}=\frac{c-\sqrt{c^2-4D_1r_2}}{2D_1}<\lambda_2。$$

因此 $\lambda_3<\lambda_2$，同理 $\lambda_1<\lambda_4$，所以可取 $\max\{\lambda_1,\lambda_3\}<\lambda<\min\{\lambda_2,\lambda_4\}$，则

$$D_1\lambda^2-c\lambda+\frac{2b_1r_1}{a_2}+r_1<0,D_1\lambda^2-c\lambda+r_2<0。$$

取 $\bar{\lambda}>\max\left\{\frac{c}{D_1},\frac{c}{D_2},\lambda\right\}$，则 $D_1\bar{\lambda}^2-c\lambda>0$。又取 $\beta_1>\max\left\{\lambda,r_1\left(2+\frac{b_1}{a_2}\right)\right\}$，$\beta_2>\max\left\{\lambda,r_2\left(1+\frac{b_2}{a_1}\right)\right\}$。再取 $0<\varepsilon<\min\limits_{i=1,2}\left\{\frac{1}{a_i},\frac{\beta_i}{(\beta_i+\bar{\lambda})a_i},\frac{1}{a_2}\left(1-\frac{b_2}{a_1}\right)\right\}$，则存在 $0<\alpha<1$，使得

$$\varepsilon<\min_{i=1,2}\left\{\frac{1}{(1+\alpha)a_i},\frac{\beta_i}{(1+2\alpha)(\beta_i+\bar{\lambda})a_i},\frac{(\lambda+\beta_i)}{(\beta_i+\bar{\lambda})\alpha a_i},\frac{1}{a_2}\left(1-\frac{b_2}{a_1}\right)\right\}。$$

令 $W_i(z)=\frac{1}{(1+\alpha e^{-\lambda z})a_i}$，$V_i(z)=\varepsilon e^{-\bar{\lambda}|z|}$，$i=1,2,z\in\mathbf{R}$，又令

$$W(z)=(W_1(z),W_2(z))^{\mathrm{T}},V(z)=(V_1(z),V_2(z))^{\mathrm{T}},\bar{\varepsilon}=(\varepsilon,\varepsilon)^{\mathrm{T}},\overline{K}=\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2}\right)^{\mathrm{T}},$$

则在 $z\in\mathbf{R}$ 上 $V(z)\neq0$，并由条件知假设(A1)成立，且在$[\bar{\varepsilon},\overline{K}]$上(4)式除$\overline{K}$外没有其他正平衡态。

命题 1 当 τ_1 和 τ_4 充分小时，f_c 满足假设(A2)。

证明 设 $\varphi,\psi\in C([-c\tau,0],\mathbf{R}^2)$，满足：ⅰ) $0\leqslant\psi(s)\leqslant\varphi(s)\leqslant\overline{K}$，$s\in[-c\tau,0]$；ⅱ) $e^{\beta s}(\varphi(s)-\psi(s))$关于 $s\in[-c\tau,0]$单调不减。则

$$\begin{aligned}&f_{c1}(\varphi)-f_{c1}(\psi)=r_1\left(\frac{1}{a_1}-\varphi_1(0)\right)[a_1\varphi_1(-c\tau_1)+b_1\varphi_2(-c\tau_2)]-r_1\left(\frac{1}{a_1}-\psi_1(0)\right)[a_1\psi_1(-c\tau_1)+b_1\psi_2(-c\tau_2)]=\\&r_1[\varphi_1(-c\tau_1)-\psi_1(-c\tau_1)]-a_1r_1[\varphi_1(0)\varphi_1(-c\tau_1)-\psi_1(0)\psi_1(-c\tau_1)]+\frac{b_1r_1}{a_1}[\varphi_2(-c\tau_2)-\psi_2(-c\tau_2)]-\\&b_1r_1[\varphi_1(0)\varphi_2(-c\tau_2)-\psi_1(0)\psi_2(-c\tau_2)]\geqslant-a_1r_1[\varphi_1(0)\varphi_1(-c\tau_1)-\psi_1(0)\psi_1(-c\tau_1)]-\\&b_1r_1\varphi_2(-c\tau_2)[\varphi_1(0)-\psi_1(0)]+b_1r_1\left(\frac{1}{a_1}-\varphi_1(0)\right)[\varphi_2(-c\tau_2)-\psi_2(-c\tau_2)]\geqslant\\&-a_1r_1[\varphi_1(0)\varphi_1(-c\tau_1)-\psi_1(0)\psi_1(-c\tau_1)]-b_1r_1\varphi_2(-c\tau_2)[\varphi_1(0)-\psi_1(0)]\geqslant\\&-r_1[\varphi_1(0)-\psi_1(0)]-r_1e^{\beta_1c\tau_1}[\varphi_1(0)-\psi_1(0)]-\frac{b_1r_1}{a_2}[\varphi_1(0)-\psi_1(0)]=-r_1\left(1+e^{\beta_1c\tau_1}+\frac{b_1}{a_2}\right)[\varphi_1(0)-\psi_1(0)],\end{aligned}$$

$$f_{c1}(\varphi)-f_{c1}(\psi)+\beta_1(\varphi_1(0)-\psi_1(0))\geqslant\left[\beta_1-r_1\left(1+e^{\beta_1c\tau_1}+\frac{b_1}{a_2}\right)\right](\varphi_1(0)-\psi_1(0))。$$

因为
$$\left(\beta_1-r_1\left(1+e^{\beta_1c\tau_1}+\frac{b_1}{a_2}\right)\right)\Big|_{\tau_1=0}=\beta_1-r_1\left(2+\frac{b_1}{a_2}\right)>0,$$

则当 τ_1 充分小时，$f_{c1}(\varphi)-f_{c1}(\psi)+\beta_1(\varphi_1(0)-\psi_1(0))>0$。

同理
$$\begin{aligned}&f_{c2}(\varphi)-f_{c2}(\psi)=r_2\varphi_2(0)\left[1-\frac{b_2}{a_1}+b_2\varphi_1(-c\tau_3)-a_2\varphi_2(-c\tau_4)\right]-\\&r_2\psi_2(0)\left[1-\frac{b_2}{a_1}+b_2\psi_1(-c\tau_3)-a_2\psi_2(-c\tau_4)\right]\geqslant r_2\left(-\frac{b_2}{a_1}-e^{\beta_2c\tau_4}\right)(\varphi_2(0)-\psi_2(0)),\end{aligned}$$

则
$$f_{c2}(\varphi)-f_{c2}(\psi)+\beta_2(\varphi_2(0)-\psi_2(0))\geqslant\beta_2-r_2\left(\frac{b_2}{a_1}+e^{\beta_2c\tau_4})(\varphi_2(0)-\psi_2(0)\right)$$

$$\left(\beta_2+r_2\left(-\frac{b_2}{a_1}-e^{\beta_2c\tau_4}\right)\right)\Big|_{\tau_4=0}=\beta_2-r_2\left(\frac{b_2}{a_1}+1\right)>0。$$

所以当 τ_4 充分小时,$f_{c2}(\varphi)-f_{c2}(\psi)+\beta_2(\varphi_2(0)-\psi_2(0))>0$,综上则有命题1成立。 证毕

命题2 下列结论成立:ⅰ)$W(z)\in\Gamma$;ⅱ)$0\leqslant V(z)\leqslant W(z)\leqslant\overline{K}$,$z\in\mathbf{R}$;ⅲ)$e^{\beta z}(W(z)-V(z))$ 关于 $z\in\mathbf{R}$ 单调不减。

证明 易验证结论ⅰ)成立。

当 $z>0$ 时,$W_i(z)\geqslant\dfrac{1}{(1+\alpha)a_i}>\varepsilon\geqslant V_i(z)$;

当 $z\leqslant 0$ 时,$W_i(z)-V_i(z)=\dfrac{1-\varepsilon a_i e^{\bar{\lambda}z}-\alpha\varepsilon a_i e^{(\bar{\lambda}-\lambda)z}}{(1+\alpha e^{-\lambda z})a_i}\geqslant\dfrac{1-\varepsilon(1+\alpha)a_i}{(1+\alpha e^{-\lambda z})a_i}>0$,$i=1,2$。

则 $0\leqslant V(z)\leqslant W(z)\leqslant\overline{K}$,$z\in\mathbf{R}$,即结论ⅱ)成立。

当 $z>0$ 时,由结论ⅱ)知

$$\frac{d}{dz}(e^{\beta_i z}(W_i(z)-V_i(z))=e^{\beta_i z}(\beta_i(W_i(z)-V_i(z))+\frac{\alpha\lambda e^{-\lambda z}}{(1+\alpha e^{-\lambda z})^2 a_i}+\varepsilon\bar{\lambda}e^{-\bar{\lambda}z})>0;$$

当 $z<0$ 时,有

$$\frac{d}{dz}(e^{\beta_i z}(W_i(z)-V_i(z)))=\frac{e^{\beta_i z}}{(1+\alpha e^{-\lambda z})^2 a_i}(\beta_i+\alpha(\beta_i+\lambda)e^{-\bar{\lambda}z}-$$
$$\varepsilon a_i(\beta_i+\bar{\lambda})e^{\bar{\lambda}z}-2\alpha\varepsilon a_i(\beta_i+\bar{\lambda})e^{(\bar{\lambda}-\lambda)z}-\alpha^2 a_i\varepsilon(\beta_i+\bar{\lambda})e^{(\bar{\lambda}-2\lambda)z})\geqslant$$
$$\frac{e^{\beta_i z}}{(1+\alpha e^{-\lambda z})^2 a_i}((\beta_i+\lambda)-\alpha\varepsilon a_i(\beta_i+\bar{\lambda}))\alpha e^{-\lambda z}+\beta_i-(1+2\alpha)\varepsilon a_i(\beta_i+\bar{\lambda})\geqslant 0,i=1,2。$$

所以 $e^{\beta z}(W(z)-V(z))$ 关于 $z\in\mathbf{R}$ 单调不减,即结论ⅲ)成立。 证毕

命题3 当 τ_1 和 τ_4 充分小时,$W(z)$ 为(5)式的上解。

证明 因为 $D_1\lambda^2-c\lambda+\dfrac{2b_1r_1}{a_2}+r_1<0$,所以

$$D_1W_1''(z)-cW_1'(z)+r_1\left(\frac{1}{a_1}-W_1(z)\right)[a_1W_1(z-c\tau_1)+b_1W_2(z-c\tau_2)]=\frac{\alpha e^{-\lambda z}}{a_1(1+\alpha e^{-\lambda z})^3(1+\alpha e^{-\lambda(z-c\tau_1)})}\times$$
$$\left\{[D_1\lambda^2(\alpha e^{-\lambda z}-1)-c\lambda(1+\alpha e^{-\lambda z})]\times[1+\alpha e^{-\lambda(z-c\tau_1)}]+r_1(1+\alpha e^{-\lambda z})^2\left[1+\frac{b_1}{a_2}\left(\frac{1+\alpha e^{-\lambda(z-c\tau_1)}}{1+\alpha e^{-\lambda(z-c\tau_2)}}\right)\right]\right\}\leqslant$$
$$\frac{\alpha e^{-\lambda z}}{a_1(1+\alpha e^{-\lambda z})^3(1+\alpha e^{-\lambda(z-c\tau_1)})}\times$$
$$\left\{[D_1\lambda^2(\alpha e^{-\lambda z}-1)-c\lambda(1+\alpha e^{-\lambda z})]\times[1+\alpha e^{-\lambda(z-c\tau_1)}]+r_1(1+\alpha e^{-\lambda z})^2\left[1+\frac{b_1}{a_2}(1+e^{\lambda c\tau_1})\right]\right\}=$$
$$\frac{\alpha e^{-\lambda z}}{a_1(1+\alpha e^{-\lambda z})^3(1+\alpha e^{-\lambda(z-c\tau_1)})}\times\left\{\left[\alpha^2e^{-2\lambda z}\left(D_1\lambda^2e^{\lambda c\tau_1}-c\lambda e^{\lambda c\tau_1}+\frac{b_1r_1}{a_2}(1+e^{\lambda c\tau_1})+r_1\right)\right]+\right.$$
$$\left.\alpha e^{-\lambda z}\left[D_1\lambda^2(1-e^{\lambda c\tau_1})-c\lambda(1+e^{\lambda c\tau_1})+\frac{2b_1r_1}{a_2}(1+e^{\lambda c\tau_1})+2r_1\right]-D_1\lambda^2-c\lambda+\frac{b_1r_1}{a_2}(1+e^{\lambda c\tau_1})+r_1\right\}。$$

因为

$$\left(D_1\lambda^2e^{\lambda c\tau_1}-c\lambda e^{\lambda c\tau_1}+\frac{b_1r_1}{a_2}(1+e^{\lambda c\tau_1})+r_1\right)\Big|_{\tau_1=0}=D_1\lambda^2-c\lambda+\frac{2b_1r_1}{a_2}+r_1<0,$$
$$\left(D_1\lambda^2(1-e^{\lambda c\tau_1})-c\lambda(1+e^{\lambda c\tau_1})+\frac{2b_1r_1}{a_2}(1+e^{\lambda c\tau_1})+2r_1\right)\Big|_{\tau_1=0}=-2c\lambda+\frac{4b_1r_1}{a_2}+2r_1<-2D_1\lambda^2<0,$$
$$\left(-D_1\lambda^2-c\lambda+\frac{b_1r_1}{a_2}(1+e^{\lambda c\tau_1})+r_1\right)\Big|_{\tau_1=0}=-D_1\lambda^2-c\lambda+\frac{2b_1r_1}{a_2}+r_1<-2D_1\lambda^2<0。$$

所以当 τ_1 充分小时,有

$$D_1W_1''(z)-cW_1'(z)+r_1\left(\frac{1}{a_1}-W_1(z)\right)[a_1W_1(z-c\tau_1)+b_1W_2(z-c\tau_2)]<0。$$

同理

$$D_2W_2''(z)-cW_2'(z)+r_2W_2(z)\left[1-\frac{b_2}{a_1}+b_2W_1(z-c\tau_3)-a_2W_2(z-c\tau_4)\right]\leqslant$$
$$D_2W_2''(z)-cW_2'(z)+r_2W_2(z)[1-a_2W_2(z-c\tau_4)]\leqslant$$

$$\frac{\alpha e^{-\lambda z}}{a_1(1+\alpha e^{-\lambda z})^3(1+\alpha e^{-\lambda(z-c\tau_4)})}\times\{[\alpha^2 e^{-2\lambda z}(D_2\lambda^2 e^{\lambda c\tau_4}-c\lambda e^{\lambda c\tau_4}+r_2 e^{\lambda c\tau_4})]+$$
$$\alpha e^{-\lambda z}[D_2\lambda^2(1-e^{\lambda c\tau_4})-c\lambda(1+e^{\lambda c\tau_4})+2r_2 e^{\lambda c\tau_4}]-D_2\lambda^2-c\lambda+r_2 e^{\lambda c\tau_4}\}。$$

又因为
$$(D_2\lambda^2 e^{\lambda c\tau_4}-c\lambda e^{\lambda c\tau_4}+r_2 e^{\lambda c\tau_4})\big|_{\tau_4=0}=D_2\lambda^2-c\lambda+r_2<0,$$
$$(D_2\lambda^2(1-e^{\lambda c\tau_4})-c\lambda(1+e^{\lambda c\tau_4})+2r_2 e^{\lambda c\tau_4})\big|_{\tau_4=0}=-2c\lambda+2r_2<-2D_2\lambda^2<0,$$
$$(-D_2\lambda^2-c\lambda+r_2 e^{\lambda c\tau_4})\big|_{\tau_4=0}=-D_2\lambda^2-c\lambda+r_2<0。$$

所以当 τ_4 充分小时，有
$$D_2W_2''(z)-cW_2'(z)+r_2W_2(z)\left[1-\frac{b_2}{a_1}+b_2W_1(z-c\tau_3)-a_2W_2(z-c\tau_4)\right]<0。$$

因此，当 τ_1 和 τ_4 充分小时，$W(z)$为(5)式的上解。　　证毕

命题 4　$V(z)$为(5)的下解。

证明　因为 $D_1\bar{\lambda}^2-c\bar{\lambda}>0$，$D_2\bar{\lambda}^2-c\bar{\lambda}>0$，所以有
$$D_1V_1''(z)-cV_1'(z)+r_1\left(\frac{1}{a_1}-V_1(z)\right)[a_1V_1(z-c\tau_1)+b_1V_2(z-c\tau_2)]\geqslant D_1V_1''(z)-cV_1'(z)。$$

$z\geqslant0$ 时，$D_1V_1''(z)-cV_1'(z)=D_1\bar{\lambda}^2\varepsilon e^{-\bar{\lambda}z}+c\bar{\lambda}\varepsilon e^{-\bar{\lambda}z}=\varepsilon e^{-\bar{\lambda}z}(D_1\bar{\lambda}^2+c\bar{\lambda})>0$；

$z<0$ 时，$D_1V_1''(z)-cV_1'(z)=D_1\bar{\lambda}^2\varepsilon e^{\bar{\lambda}z}-c\bar{\lambda}\varepsilon e^{\bar{\lambda}z}=\varepsilon e^{\bar{\lambda}z}(D_1\bar{\lambda}^2-c\bar{\lambda})>0$。

所以 $D_1V_1''(z)-cV_1'(z)+r_1\left(\frac{1}{a_1}-V_1(z)\right)[a_1V_1(z-c\tau_1)+b_1V_2(z-c\tau_2)]>0$。

又因为 $z\neq0$，有
$$D_2V_2''(z)-cV_2'(z)+r_2V_2(z)\left[1-\frac{b_2}{a_1}+b_2V_1(z-c\tau_3)-a_2V_2(z-c\tau_4)\right]\geqslant$$
$$D_2V_2''(z)-cV_2'(z)+r_2V_2(z)\left(1-\frac{b_2}{a_1}-a_2\varepsilon\right)\geqslant D_2V_2''(z)-cV_2'(z)。$$

$z>0$ 时，$D_2V_2''(z)-cV_2'(z)=D_2\bar{\lambda}^2\varepsilon e^{-\bar{\lambda}z}+c\bar{\lambda}\varepsilon e^{-\bar{\lambda}z}=\varepsilon e^{-\bar{\lambda}z}(D_2\bar{\lambda}^2+c\bar{\lambda})>0$；

$z<0$ 时，$D_2V_2''(z)-cV_2'(z)=D_2\bar{\lambda}^2\varepsilon e^{\bar{\lambda}z}-c\bar{\lambda}\varepsilon e^{\bar{\lambda}z}=\varepsilon e^{\bar{\lambda}z}(D_2\bar{\lambda}^2-c\bar{\lambda})>0$。

所以 $D_2V_2''(z)-cV_2'(z)+r_2V_2(z)\left[1-\frac{b_2}{a_1}+b_2V_1(z-c\tau_3)-a_2V_2(z-c\tau_4)\right]>0$。

因此 $V(z)$为(5)式的下解。　　证毕

综合上述分析与证明及引理 1 知定理 1 成立。

注 1　定理 1 表明，当食饵(u_2)对捕食者(u_1)的供养能力系数 b_1 大于食饵的阻滞增长系数 a_2，捕食者(u_1)的阻滞增长系数 a_1 大于捕食者(u_1)的捕食能力 b_2 时，则对于任意的满足 $c>\max\limits_{i=1,2}\left\{2\sqrt{\frac{D_ir_1(2b_1+a_2)}{a_2}},2\sqrt{D_ir_2}\right\}$的传播速度，当时滞 τ_1 和 τ_4 充分小时，在相平面(u_1，u_2)上方程(1)的波前解表现为联结点$\left(\frac{1}{a_1},0\right)$和$\left(0,\frac{1}{a_2}\right)$的第一象限内的一条光滑轨线。

利用定理 1 证明的相似方法可以证得如下定理。

定理 2　若$\frac{1}{b_1}>\frac{1}{a_2}$，$\frac{1}{a_1}>\frac{1}{b_2}$，则对于任意 $c>\max\limits_{i=1,2}\left\{2\sqrt{\frac{D_ir_2(2b_2+a_1)}{a_1}},2\sqrt{D_ir_1}\right\}$，当 τ_1 和 τ_4 充分小时，(1)式存在联结$\left(0,\frac{1}{a_2}\right)$与$\left(\frac{1}{a_1},0\right)$的波前解。

注 2　定理 2 表明：当食饵(u_2)对捕食者(u_1)的供养能力系数 b_1 小于食饵的阻滞增长系数 a_2，捕食者(u_1)的阻滞增长系数 a_1 小于捕食者(u_1)的捕食能力 b_2 时，则对于任意的满足 $c>\max\limits_{i=1,2}\left\{2\sqrt{\frac{D_ir_2(2b_2+a_1)}{a_1}},2\sqrt{D_ir_1}\right\}$的传播速度，当时滞 τ_1 和 τ_4 充分小时，在相平面(u_1，u_2)上方程(1)的波前解表现为联结点$\left(0,\frac{1}{a_2}\right)$和$\left(\frac{1}{a_1},0\right)$的

第一象限内的一条光滑轨线。

参考文献：

[1] 叶其孝，李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京：科学出版社，1990.

[2] May R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. Nature，1976，261：459-467.

[3] Tang M M，Fife P C. Propagation fronts in competeing species equations with diffusion [J]. Arch Rational Mech Anal，1978，73：69-77.

[4] van Vuuren J H. The existence of traveling plane waves in a general class of competition diffusion systems[J]. IMAJ Math，1995，55：135-148.

[5] Huang J，Zou X. Traveling wave fronts in diffusive and cooperative Lotka-Volterra system with delays[J]. J Math Anal Appl，2002，271：455-466.

[6] 杨治国，李树勇，王长有. 含时滞和扩散的 n 维互助型 Lotka-Volterra 型系统波前解的存在性[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2004，27(1)：31-34.

[7] 杨治国，李树勇，王长有. 含时滞和扩散的竞争型 Lotka-Volterra 系统波前解的存在性[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2005，28(5)：521-525.

[8] 徐天华. 一类具功能性反应的 Prey-Predator 系统的周期解与稳定性[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(6)：43-47.

[9] 徐天华. 含扩散与无限时滞的竞争型 Lotka-Volterra 模型的周期解与稳定性[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2009，26(3)：60-64.

[10] 杨治国，李树勇，王长有. 含时滞的反应扩散 Giu-Lawson 方程波前解的存在性[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2007，30(1)：18-21.

[11] Gardner R A. Existence of traveling wave solutions of predator-prey systems via the connection index[J]. SIAM Appl Math，1984，44：56-79.

[12] Wu J，Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay[J]. J Dynam Diff Eqns，2001，13(3)：651-687.

Existence of Wave Front Solution of the Prey-Predator System with Diffusion and Delays

XU Tian-hua

(Dept. of Mathematics，Sichuan University for Nationalities，Kangding Sichuan 626001，China)

Abstract：Wave front solutions of reaction-diffusion equations can be a good performance of the phenomenon and the nature of the shock speed disturbances with limited spread. It is important area of research of nonlinear partial differential equations. A Prey-Predator system with diffusion and delays was investigated. It is shown that the existence of wave front solutions of this system when the delays τ_1 and τ_4 are small by constructing a pair of upper and lower solution and using the existence theory of traveling wave solution.

Key words：delays；diffusion；upper and lower solution；Prey-Predator system；wave front solution

（责任编辑　黄　颖）