DOI:CNKI:50-1165/N. 20120915. 2319. 009

具有时变时滞和 Watt 型功能反应的脉冲捕食系统的周期解*

武金仙，杨志春
（重庆师范大学 数学学院，重庆 400047）

摘要:时滞现象和脉冲效应在生物系统中是广泛存在的,同时考虑具有时滞现象和脉冲效应的生态系统具有重要的理论和实际意义。本文首先给出一类具有时变时滞和 Watt 功能性反应的脉冲捕食系统的数学模型,并给出本文采用的基本记号和重合度引理。然后利用含脉冲的微分比较不等式和 Mawhin 重合度理论中德延拓定理,并结合同伦不变性质,获得了该系统周期解存在的两个充分条件,即当系统参数满足下列条件之一:1) $0<m\leqslant 1$,且 $\bar{b}+\bar{\Delta}_1>0$,$\dfrac{\bar{r}+\bar{\Delta}-c\bar{a}_1\exp\{(1-m)H_3\}}{\bar{k}}>0$; 2) $0<m\leqslant 1$,且 $\bar{b}+\bar{\Delta}_2>0$,$\dfrac{\bar{r}+\bar{\Delta}-c\bar{a}_1\exp\{(1-m)H_3\}}{\bar{k}}>0$,时滞脉冲捕食系统至少存在一个正周期解的充分条件,同时给出保持这些性质时脉冲项应满足的先验界。结果具有一般性,推广和改进了最近一些文献的结论。

关键词:时滞;脉冲;功能反应;捕食系统;周期解;重合度;同伦
中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2012)05-0036-05

1 预备知识

在生物动力学研究中,食饵-捕食者系统间的相互作用具有非常重要的理论意义和应用价值,许多学者对此进行了深入而广泛的研究[1-2]。特别是关于具有功能反应的捕食系统,如 Holling 型[3]、Leslie-Gower 型[4]、Beddington-DeAngelis 型[5]等功能反应,最近得到极大关注。但是关于 Watt 型功能性反应的研究结果相对较少[6-8]。Wang 研究了 Watt 型捕食者—食饵系统的稳定性及解的性态[7]。由于在生物系统中,脉冲效应是广泛存在的[9],一些作者也研究了具有脉冲的 Watt 型捕食系统的动力学行为,如 Wang 等研究了具有脉冲控制的 Watt 型功能性反应捕食系统的稳定性和周期解的存在性[8]。然而,对于同时具有时滞现象和脉冲效应的 Watt 型功能性反应捕食系统的研究却未见报导。

本文考虑下面的具有脉冲效应和时变时滞的 Watt 型功能反应的捕食系统

$$\begin{cases}x'=x(t)\,[r(t)-k(t)x(t-\tau_1(t))]-a_1(t)y(t-\tau_2(t))\left[1-\exp\left\{\dfrac{-cx(t-\tau_3(t))}{y(t)^m}\right\}\right]\\ y'=y(t)(b(t)-d(t)y(t))+a_2(t)y(t)\left[1-\exp\left\{\dfrac{-cx(t-\tau_4(t))}{y(t)^m}\right\}\right]\\ \Delta x=x(t^+)-x(t)=c_nx(t)\\ \Delta y=y(t^+)-y(t)=d_ny(t)\end{cases}\tag{1}$$

其中 $n\in\mathbf{Z}^+$,$0<m\leqslant 1$,$x(t)$,$y(t)$ 表示种群中食饵,捕食者随时间变化过程 $t=t_n$ 为定期收获或投放时刻(脉冲时刻),c_n,d_n 分别为食饵,捕食者的收获率或投放率,不失一般生物意义,本文总是假设:

(H1) 脉冲时刻 $\{t_n\}$,$n\in\mathbf{Z}^+$ 满足 $t_0=0<t_1<\cdots<t_n<\cdots$;

(H2) 存在正数 $\omega>0$ 和正整数 p,使得 $t_{n+p}=t_n+\omega$,$c_{n+p}=c_n$,$d_{n+p}=d_n$,c_n,$d_n>-1$;

(H3) 函数 $r,b:\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$, $k,a_1,a_2,d,\tau_i:\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}_+$ 是连续 ω-周期的($i=1,2,3,4$)。

运用重合度理论并结合同伦不变性质,获得系统(1)正周期解存在的一些充分条件,结果推广和改正了文献[8]中的主要结论。

* **收稿日期**:2011-12-19　　**网络出版时间**:2012-9-15 23:19
资助项目:国家自然科学基金(No. 10971240);重庆市自然科学基金(No. CSTC2008BB2364);重庆市教委科研项目(No. KJ080806)
作者简介:武金仙,女,硕士研究生,研究方向为微分方程与动力系统;**通讯作者**:杨志春,E-mail:yangzhch@126. com
网络出版地址:http://www. cnki. net/kcms/detail/50. 1165. N. 20120915. 2319. 201205. 36_009. html

2 周期解的存在性

设 X，Z 是赋范向量空间，$L:DomL\subset X\to Y$ 为线性映射，记 $Ker\,L=L^{-1}(0)$ 为 L 的核，记 $Im\,L=L(Dom\,L)$ 为 L 的值域，I 为恒等映射，称 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子，若 $\dim Ker\,L=Co\dim Im\,L<+\infty$ 且 $Im\,L$ 在 z 中是闭的。假如 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子，则存在连续投影 $p:X\to X$ 和 $Q:Z\to Z$ 使得 $Im\ P=Ker\,L$，$Im\,L=Ker\,Q=Im\ (I-Q)$。从而映射 $L|Dom\cap Ker\,P:(I-P)X\to Im\,L$ 是同构映射，它的逆映射记作 $K_P:Im\,L\to Dom\,L$，则 $PK_p=0$，$LK_P|_{Im\,L}=L$，$KpL|_{Dom\,L}=I-P$。

设 $\Omega\subset X$ 是一有界开集，称连续映射 $N:X\to Z$ 为 $\bar{\Omega}$ 上的 L-紧的，如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界，且 $K_P(I-Q)N:\bar{\Omega}\to X$ 是紧的。由于 $Im\,Q$ 和 $Ker\,L$ 同构，则有同构映射 $J:Im\,Q\to Ker\,L$。

现在给出 Mawhin 连续性定理[10]

引理 1　(Mawhin 连续性定理)记 $\Omega\subset X$ 是一有界开集，$L:Dom\,L\subset X\to Y$ 是一个指标为零的 Fredholm 算子，$N:X\to Z$ 为 $\bar{\Omega}$ 上的 L-紧的。假设

ⅰ)对任意 $\lambda\in(0,1)$，$Lx\to\lambda Nx$ 的任意解满足 $x\notin\partial\Omega$；

ⅱ)对任意 $x\in\partial\Omega\cap Ker\,L$，$QNx\neq0$ 且 $\deg\{JQN,\Omega\cap Ker\,L\}\neq0$，那么算子方程 $Lx=Nx$ 在 $Dom\,L\cap\bar{\Omega}$ 至少有一个解。

引理 2　在条件(H1)～(H3)下，$\boldsymbol{R}_+^2$ 是系统(1)的不变集。

为方便，设 $J\subset\mathbf{R}$，记 $PC=\{g:J\to\mathbf{R}^2|g(t)$ 在 $t\neq t_k$ 处连续，在 $t=t_k$ 处左连续，右极限存在$\}$。对 ω-周期函数 $g(t)$ 和 ω-周期序列 $\{c_n\}$、$\{d_n\}$，采用下列记号 $\bar{g}=\dfrac{\int_0^\omega g(t)\,\mathrm{d}t}{\omega}$，$|\bar{g}|=\dfrac{\int_0^\omega|g(t)|\,\mathrm{d}t}{\omega}$，$\bar{\Delta}_1=\dfrac{\sum_{k=1}^{p}\ln(1+c_n)}{\omega}$，$\bar{\Delta}_2=\dfrac{\sum_{k=1}^{p}\ln(1+d_n)}{\omega}$。利用上面引理和记号，讨论系统(1)的周期解的存在性。

定理 1　当 $0<m\leqslant1$ 时，如果 $\bar{b}+\bar{\Delta}_2>0$，$\dfrac{\bar{r}+\bar{\Delta}_1-c\bar{a}_1\exp\{(1-m)H_3\}}{\bar{k}}>0$，其中 $H_3:=\ln\left[\dfrac{\bar{b}+\bar{\Delta}_2+\bar{a}_2}{\bar{d}}\right]+(\bar{b}+|\bar{b}|+2\bar{a}_2+\bar{\Delta}_2+|\bar{\Delta}_2|)\omega$，则系统(1)至少存在一个 ω -正周期解。

证明　作变换 $x(t)=\exp\{u(t)\}$，$y(t)=\exp\{v(t)\}$，则系统(1)变为

$$\begin{cases}u'(t)=r(t)-k(t)\exp\{u(t-\tau_1(t))\}-a_1(t)\dfrac{\exp\{v(t-\tau_2(t))\}}{\exp\{u(t)\}}\left(1-\exp\left\{\dfrac{-c\exp\{u(t-\tau_3(t))\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\\ v'(t)=b(t)-d(t)\exp\{v(t)\}+a_2(t)\left[1-\exp\left\{\dfrac{-c\exp\{u(t-\tau_4(t))\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right],t\neq t_n\\ \Delta u(t_n)=u(t_n^+)-u(t)=\ln(1+c_n)\\ \Delta v(t_n)=v(t_n^+)-v(t)=\ln(1+d_n)\end{cases}\tag{2}$$

设 $X=\{U(t)=(u(t),(t))^{\mathrm{T}}\in PC(\mathbf{R},\mathbf{R}^2)|U(t+\omega)=U(t)\}$，$Z=X\times\mathbf{R}^{2p}$，$\|U\|_X=\max\limits_{t\in(0,\omega)}|u(t)|+\max\limits_{t\in[o,\omega]}|v(t)|$，$\|V\|_Z=\|U\|_X+\|z\|$，其中 $z\in\mathbf{R}^{2P}$，$U\in X$，$V=(U,z)^{\mathrm{T}}\in Z$，$\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{R}^{2p}$ 上相应范数。则 X，Z 为相应赋范的 Banach 空间。定义映射 $L:Dom\,L\to Z$ 和 $N:X\to Z$，满足

$$Dom\,L=\{U(T)|U(t)=(u(t),v(t))^{\mathrm{T}}\in X\cap PC^1(R,R^2)\}$$

$$LU=(U'(t),\Delta U(t_1),\cdots,\Delta U(t_p)),U\in Dom\,L,\Delta U(t_k)=\begin{pmatrix}u(t_k^+)-u(t_k)\\ v(t_k^+)-v(t_k)\end{pmatrix}$$

$$NU=\left(\begin{pmatrix}f(t)\\ g(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\ln(1+c_1)\\ \ln(1+d_1)\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\ln(1+c_p)\\ \ln(1+d_p)\end{pmatrix}\right)$$

其中 $f(t)=r(t)-k(t)\exp\{u(t-\tau_1(t))\}-a_1(t)\dfrac{\exp\{v(t-\tau_2(t))\}}{\exp\{u(t)\}}\left(1-\exp\left\{\dfrac{-c\ \exp\{u(t-\tau_3(t))\}}{\exp(mv(t))}\right\}\right)$

$$g(t)=b(t)-d(t)\exp\{v(t)\}+a_2(t)\left(1-\exp\left\{\dfrac{-c\ \exp\{u(t-\tau_4(t))\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)$$

那么 $Ker\ L = R^2$，$Im\ L = \left\{V = (U,Z_1,\cdots,Z_p) \in Z \left| \int_0^\omega U(s)\,ds + \sum_{j=1}^p Z_j = 0 \right.\right\}$。从而 $\dim Ker\ L = Co\dim Im\ L < +\infty$ 且 $Im\ L$ 在 Z 中是闭的，即 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子。对于 $U \in X, V = (U, z_1, \cdots, z_p) \in Z$，定义连续投影算子 $P: X \to X$ 和 $Q: Z \to Z$ 为 $PU = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega U(t)\,dt$，$QV = \left\{\frac{1}{\omega}\left(\int_0^\omega U(t)\,dt + \sum_{j=1}^p Z_j\right), 0, \cdots, 0\right\}$，则 $Im\ P = Ker\ L$，$Im\ L = Ker\ Q = Im\ (I-Q)$。而且 $L|_{Dom\ L \cap Ker\ P}: (I-P)X \to Im\ L$ 存在逆映射，记为 $K_P: Im\ L \to Dom\ L \cap Ker\ P$。对于任意的 $V = (U, z_1, \cdots, z_p) \in Z$，必存在 $\chi \in X$ 使得 $\chi'(t) = U(t)$，$t \neq t_k$，$k \in \mathbf{Z}^+$，$U(t_k^+) - U(t_k^-) = z_k$，则 $\chi(t) = \int_0^t U(s)\,ds + \sum_{t>t_k} Z_k + U(0)$。结合 $\int_0^\omega \chi(t)\,dt = 0$ 对于 $\chi \in Ker\ P$，有 $\int_0^\omega \int_0^t U(s)\,ds dt + \int_0^\omega \sum_{t>t_k} z_k dt + \omega U(0) = 0$，那么，$K_p z = \chi(t) = \int_0^t U(s)\,ds + \sum_{t>t_k} z_k - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t U(s)\,ds dt - \frac{1}{\omega}\sum_{j=1}^p (\omega - t_k) z_k$。由此可以计算知 QN 和 $K_P(I-Q)N$ 是连续的。利用 Arzela-Ascoli 定理，对于任意的有界开集 $\Omega \in X$，不难得到 $QN(\bar{\Omega})$，$K_p(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 都是相对紧的。因此 $N: X \to Z$ 为 $\bar{\Omega}$ 上的 L-紧算子。下面将估计使得引理 1 的两个条件成立的有界开集 Ω。不妨设 $\Omega = \{U \mid \|U\| < H\}$，这里 H 为待定常数。

对任意 $\lambda \in (0,1)$ 由算子方程 $LU = \lambda NU, U \in X$，有

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda\left[r(t) - k(t)\exp\{u(t-\tau_1(t))\} - a(t)\dfrac{\exp\{v(t-\tau_2(t))\}}{\exp\{u(t)\}}\left(1 - \exp\left\{\dfrac{-c\exp\{u(t-\tau_3(t))\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right] \\ v'(t) = \lambda\left[b(t) - d(t)\exp\{v(t)\} + a_2(t)\left(1 - \exp\left\{\dfrac{-c\exp\{u(t-\tau_4(t))\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right], t \neq t_n \\ \Delta u(t_n) = u(t_n^+) - u(t_n) = \lambda \ln(1+c_n) \\ \Delta v(t_n) = v(t_n^+) - v(t_n) = \lambda \ln(1+d_n) \end{cases} \tag{3}$$

从 0 到 ω 积分，得

$$\omega\bar{r} - \int_0^\omega \left[k\exp\{u(t-\tau_1)\} + a_1\frac{\exp\{v(t-\tau_2)\}}{\exp\{u(t)\}}\left(1 - \exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t-\tau_3)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right]dt + \omega\bar{\Delta}_1 = 0 \tag{4}$$

$$\omega\bar{b} - \int_0^\omega \left[d\exp\{v(t)\} - a_2\left(1 - \exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t-\tau_4)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right]dt + \omega\bar{\Delta}_2 = 0 \tag{5}$$

从(3)～(5)式可知

$$\int_0^\omega |u'(t)|\,dt \leqslant \lambda\left[\int_0^\omega |r(t)|\,dt + \int_0^\omega \left|k\exp\{u(t-\tau_1)\} + a_1\frac{\exp\{v(t-\tau_2)\}}{\exp\{u(t)\}}\left(1 - \exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t-\tau_3)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right|dt\right] \leqslant (\bar{r} + |\bar{r}| + \bar{\Delta}_1)\omega \tag{6}$$

$$\int_0^\omega |v'(t)|\,dt \leqslant \lambda\int_0^\omega \left|b(t) - d(t)\exp\{v(t)\} + a_2(t)\left(1 - \exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t-\tau_4)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right|dt \leqslant (|\bar{b}| + \bar{b} + 2\bar{a}_2 + \bar{\Delta}_2)\omega \tag{7}$$

由于 $(u,v)^{\mathrm{T}} \in X$，那么存在 $\xi_i, \eta_i \in [0,\omega]$，$i = 1,2$，使得

$$u(\xi_1^-) = \inf_{t\in[0,\omega]} u(t), u(\xi_2^+) = \sup_{t\in[0,\omega]} u(t), v(\eta_1^-) = \inf_{t\in[0,\omega]} v(t), v(\eta_2^+) = \sup_{t\in[0,\omega]} v(t) \tag{8}$$

$$\omega\bar{k}\exp\{u(\xi_1^-)\} = \int_0^\omega k(t)\exp\{u(\xi_1^-)\}dt \leqslant \int_0^\omega k(t)\exp\{u(t-\tau_1(t))\}dt \leqslant \omega(\bar{r} + \bar{\Delta}_1), u(\xi_1^-) \leqslant \ln\frac{\bar{r}+\bar{\Delta}_1}{\bar{k}} \tag{9}$$

于是，利用(6)、(9)式有

$$u(t) \leqslant u(\xi_1^-) + \int_0^\omega |u'(t)|\,dt + |\bar{\Delta}_1|\omega \leqslant \ln\frac{\bar{r}+\bar{\Delta}_1}{\bar{k}} + (\bar{r} + |\bar{r}| + \bar{\Delta}_1 + |\bar{\Delta}_1|)\omega = H_1 \tag{10}$$

另一方面，从(5)、(8)式可得

$$\int_0^\omega d\exp\{v(t)\}\,dt = (\bar{b} + \bar{\Delta}_2)\omega + \int_0^\omega a_2\left[1 - \exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t-\tau_4)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right.\right]dt \leqslant (\bar{b} + \bar{\Delta}_2 + \bar{a}_2)\omega$$

所以

$$v(\eta_1^-) \leqslant \ln\left[\frac{\bar{b} + \bar{\Delta}_2 + \bar{a}_2}{\bar{d}}\right] \tag{11}$$

则 $$v(t)\leqslant v(\eta_1^-)+\int_0^\omega |v'(t)|\,dt+|\bar{\Delta}_2|\omega\leqslant \ln\left[\frac{\bar{b}+\bar{\Delta}_2+\bar{a}_2}{\bar{d}}\right]+(\bar{b}+|\bar{b}|+2\bar{a}_2+\bar{\Delta}_2+|\bar{\Delta}_2|)\omega=H_3 \tag{12}$$

同时，由(4)、(8)式，还有

$$(\bar{r}+\bar{\Delta}_1)\omega\leqslant\int_0^\omega [k\exp\{u(\xi_2^+)\}+ca_1\exp\{(1-m)H_3\}]\,dt=\omega\bar{k}\exp\{u(\xi_2^+)\}+c\bar{a}_1\omega\exp\{(1-m)H_3\}$$

$$u(\xi_2^+)\geqslant\ln\left[\frac{\bar{r}+\bar{\Delta}_1-c\bar{a}_1\exp\{(1-m)H_3\}}{\bar{k}}\right] \tag{13}$$

$$u(t)\geqslant u(\xi_2^+)-\int_0^\omega |u'(t)|\,dt-|\bar{\Delta}_1|\omega\geqslant\ln\left[\frac{\bar{r}+\bar{\Delta}_1-c\bar{a}_1\exp\{(1-m)H_3\}}{\bar{k}}\right]-(\bar{r}+|\bar{r}|+\bar{\Delta}_1+|\bar{\Delta}_1|)\omega=H_2 \tag{14}$$

类似地，由(5)、(8)式可知

$$(\bar{b}+\bar{\Delta}_2)\omega=\int_0^\omega\left[d\exp\{v(t)\}-a_2\left(1-\exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t-\tau_4)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right]dt\leqslant$$
$$\int_0^\omega[d\exp\{v(t)\}]\,dt\leqslant\int_0^\omega[d\exp\{v(\eta_2^+)\}]\,dt$$

即 $$v(\eta_2^+)\geqslant\ln\frac{\bar{b}+\bar{\Delta}_2}{\bar{d}} \tag{15}$$

则 $$v(t)\geqslant v(\eta_2^+)-\int_0^\omega |v'(t)|-|\bar{\Delta}_2|\omega\geqslant\ln\frac{\bar{b}+\bar{\Delta}_2}{\bar{d}}-(\bar{b}+|\bar{b}|+2\bar{a}_2+\bar{\Delta}_2+|\bar{\Delta}_2|)\omega=H_4 \tag{16}$$

至此，对任意的 $\lambda\in(0,1)$，已对算子方程 $LU=\lambda NU$ 的解 $u(t)$，$v(t)$ 作了估计：$H_2\leqslant u(t)\leqslant H_1$，$H_4\leqslant v(t)\leqslant H_3$，其中 H_1,H_2,H_3,H_4 与 λ 无关。

现在取 $\Omega=\{U\in X\mid \|U\|<H\}$，这里 H 为充分大的数，使 $H>|H_1|+|H_2|+|H_3|+|H_4|$，由上面估计，对任意 $\lambda\in(0,1)$，$LU=\lambda NU$ 的任意解满足 $x\notin\partial\Omega$，即引理 1 的第 1 个条件成立。为验证第 2 个条件，考虑关于 $(u,v)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$ 的代数方程组

$$\begin{cases}\bar{r}-\bar{k}\exp\{u(t)\}-\dfrac{\mu}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega a_1\frac{\exp\{v(t)\}}{\exp\{u(t)\}}\left(1-\exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)dt+\bar{\Delta}_1=0\\ \bar{b}-\bar{d}\exp\{v(t)\}+\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega a_2\left(1-\exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)dt+\bar{\Delta}_2=0\end{cases} \tag{17}$$

这里 $\mu\in[0,1]$，类似以上的估计过程，易证对于任意 $\mu\in[0,1]$，代数方程(17)式的解 $(U,V)^{\mathrm{T}}$ 有界，事实上，它也满足估计

$$H_2\leqslant u\leqslant H_1,\ H_4\leqslant v\leqslant H_3 \tag{18}$$

对任意 $U\in\partial\Omega\cap Ker\,L$，由 $U=(u,v)^{\mathrm{T}}$是 $\mathbf{R}^2$ 中满足 $\|U\|=H$ 的常数，则

$$QNU=\left(\begin{pmatrix}\bar{r}-\bar{k}\exp\{(n-1)u(t)\}-\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega a_1\frac{\exp\{v(t)\}}{\exp\{u(t)\}}\left(1-\exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)dt+\bar{\Delta}_1\\ \bar{b}-\bar{d}\exp\{v(t)\}+\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega\left[a_2\left(1-\exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right]dt+\bar{\Delta}_2\end{pmatrix},0,\cdots,0\right)$$

由(9)式，对任意的 $U\in\partial\Omega\cap Ker\,L$，都有 $QNU\neq0$。为了计算 Brouwer 度，构造同伦变换 $G(\mu,U)=\mu QNU+(1-\mu)H(U)$，$\mu\in[0,1]$。这里，$U=(u,t)^{\mathrm{T}}$ 且

$$H(U)=\begin{pmatrix}\bar{r}-\bar{k}\exp\{(n-1)u(t)\}+\bar{\Delta}_1\\ \bar{b}-d\exp\{v(t)\}+\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\omega\left[a_2\left(1-\exp\left\{\frac{-c\exp\{u(t)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right\}\right)\right]dt+\bar{\Delta}_2\end{pmatrix}$$

从(18)式可以看出，对任意 $U\in\partial\Omega\cap Ker\,L$ 和 $\mu\in[0,1]$，都有 $G(\mu,U)\neq0$。由假设，$H(U)=0$ 都有唯一解。由 $Im\,Q=Ker\,L$，取 $J=I$，并利用同伦不变的性质

$$\deg\{JQN,\Omega\cap Ker\,L,0\}=\deg\{QN,\Omega\cap Ker\,L,0\}=\deg\{H,\Omega\cap Ker\,L,0\}\neq0$$

因此，验证了引理 1 的所有条件。从而 $LU=NU$ 在 $Dom\,L\cap\bar{\Omega}$ 上至少有一解 $(U^*(t),V^*(t))^{\mathrm{T}}$，且也是方程(2)的周期解。设 $(x^*(t),y^*(t))^{\mathrm{T}}=(\exp\{u^*(t)\},\exp\{v^*(t)\})^{\mathrm{T}}$ 也是方程(1)的正周期解。　　证毕

注意到定理 1 证明中，由于

$$(\bar{b}+\bar{\Delta}_2)\omega \geqslant \int_0^{\omega}\left[d\ \exp\{v(t)\}-ca_2\ \frac{\exp\{u(t-\tau_4)\}}{\exp\{mv(t)\}}\right]\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\omega}\ [d\ \exp\{v(\eta_1^-)\}-ca_2\exp\{H_1-mH_4\}]\,\mathrm{d}t=$$
$$\bar{d}\omega\exp\{v(\eta_1^-)\}-\omega c\,\bar{a}_2\exp\{H_1-mH_4\}$$

估计（11）式可由 $v(\eta_1^-)\leqslant\ln\left[\dfrac{\bar{b}+\bar{\Delta}_2+ca_2\exp\{H_1-mH_4\}}{\bar{d}}\right]$代替。那么通过类似证明，可得到定理 2。

定理 2 当 $0<m\leqslant 1$ 时，如果$\bar{b}+\bar{\Delta}_2>0$，$\dfrac{\bar{r}+\bar{\Delta}_1-ca_1\exp\{(1-m)H_3\}}{\bar{k}}>0$，其中 $H_1:=\ln\dfrac{\bar{r}+\bar{\Delta}_1}{}+(\bar{r}+|\bar{r}|+\bar{\Delta}_1+|\bar{\Delta}_1|)\omega$，$H_3:=\ln\left[\dfrac{\bar{b}+\bar{\Delta}_2+ca_2\exp\{H_1-mH_4\}}{\bar{d}}\right]+(\bar{b}+|\bar{b}|+2a_2+\bar{\Delta}_2+|\bar{\Delta}_2|)\omega$，$H_4:=\ln\dfrac{\bar{b}+\bar{\Delta}_2}{\bar{d}}-(\bar{b}+|\bar{b}|+2\ \bar{a}_2+\bar{\Delta}_2+|\bar{\Delta}_2|)\omega$。则系统(1)至少存在一个 ω-正周期解。

注 定理 2 把文献[8]中主要结论定理 3.1 推广到脉冲时滞情形，事实上，文献[8]中第(3.5)式估计有误，本文利用(7) 式对此作了更正。

参考文献

[1] Kuang Y. Differential Equations with application in population dynamics[M]. In the series of Mathematics in Science and Engineering. Boston: Academic Press, 1993: 191.

[2] Kuang Y. Differential equations with application in population dynamics[M]. Boston: Academic Press, 1993: 191.

[3] Chen L, Song X, Lu Z. Mathematical models and methods in ecology[M]. Chengdu, China: Sichuan Teconology Publishing Company, 2003.

[4] Holling C S. The functional response of predator to prey density and its role in minicry and population regulation [J]. Men Ent Soc Can, 1965, 45: 1-60.

[5] Gakkhar S, Singh B. Dynamics of modified Leslie-Gower-type prey-predator model with seasonally varying parameters[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 27 (12): 39-55.

[6] Cui J. Dispersal permanence of a periodic predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response [J]. Nonlinear Anal, 2006, 64: 44-56.

[7] Watt K E F. A mathematical model for the effect of densities of attacked and attacking species on the number attacked[J]. The Canadian Entomologist, 1959, 91: 129-144.

[8] 杨志春，徐道义. 具有反馈控制和无穷分布时滞的脉冲型竞争系统的正周期解及其稳定性[J]. 应用数学学报，2009, 32(1): 132-142.

[9] 王旭. 一类具有 Watt 型功能性反应的捕食者-食饵系统的研究[D]. 吉林：东北师范大学，2005: 13-23.

[10] Wang X, Wang W, Lin X. Dynamics of a periodic Watt-type predator-prey system with impulsive effect[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 39: 1270- 1282.

[11] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin: Springer, 1977.

Periodic Solutions of Impulsive Predator-prey System With Time-Varying Delays and Watt-Type Functional Response

WU Jin-xian, YANG Zhi-chun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Delay phenomenon and pulse effects in biological systems exist widespread. Because taking into account the ecological system with time-delay and pulse effect is of great theoretical and practical significance, a class model of impulsive predator-prey system with variable delays and Watt type functional response is considered in this paper. By using the differential inequality comparison with pulse, the continuation theorem of coincidence degree theory, homotopy invariance property, some sufficient conditions ensuring the existence of positive periodic solutions of the system are obtained. That is, there is at least one positive periodic solution for the impulsive system if one of the following conditions is satisfied. And prior bounds are given to keep these qualities of the system. The results improve and extend some recent works.

Key words: delays; impulses; Watt type functional response; predator-prey system; periodic solution; coincidence degree; homotopy

(责任编辑 黄 颖)