DOI:CNKI:50-1165/N. 20120915. 2319. 010

用边界元法求解 Signorini 问题的线性互补法*

张守贵
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331)

摘要:对 Poisson 方程的 Signorini 问题,提出了利用边界积分方程的线性互补解法。用 Green 公式和 Laplace 方程的基本解推导得该问题的边界积分方程,利用边界位势及其法向导数的 Signorini 约束,由该离散化积分方程导出一个形如 $U_1 \geqslant 0, A_{11}U_1+N \geqslant 0$ 且 $U_1^{\mathrm{T}}(AU_1+N)=0$ 的标准线性互补问题,且 Signorini 边界约束仅作用于边界位势。再用投影超松弛迭代法求解线性互补问题,数值结果表明该方法是有效的。

关键词:Signorini 问题;Poisson 方程;边界元法;线性互补;投影超松弛迭代

中图分类号:O241.182　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2012)05-0041-05

Signorini 问题作为一类典型的微分边值问题,具有重要的研究价值,如电镀问题、水坝自由面渗流问题、单侧弹性接触问题等。由于 Signorini 问题在部分边界上,位势及其法向导数在一定的不等式约束下交替出现,其主要难题在什么位置从一种边界条件变成另外的边界条件事先是未知的。文献[1]用基于 Signorini 问题的对偶混合变分形式,提出了一种非协调有限元逼近格式,并用 Uzawa 型算法进行了数值求解。此种方法需要在问题的求解区域内做大量的网格剖分,而且需要很多的迭代步数。Signorini 问题虽然是非线性的,但在所考虑区域内部满足偏微分方程,所以边界元法特别适合求解这类问题[2-3]。通常情况下,当用边界元法求解 Signorini 问题时,离散化后得到的线性互补方程包含了边界位势及其法向导数。这需要考虑 Signorini 边界的未知位势函数及其法向导数两个变量。本文提出了一种求解 Poisson 方程的 Signorini 问题的线性互补方法。利用边界位势及其法向导数之间的线性关系,把线性互补方程转化为关于边界位势的标准线性互补问题,然后用投影超松弛迭代求解这个线性互补问题[4-5],从而使得数值计算简单而有效。数值结果表明了本文方法的有效性。

1 Signorini 问题和边界积分方程

假定 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一有界开区域,其边界 $\Gamma=\Gamma_C \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N$ 且 $\Gamma_C \neq \varnothing$。考虑二维 Signorini 微分边值问题[1]

$$\Delta u=f, \text{in}\,\Omega \tag{1}$$

$$u=0, \text{on}\,\Gamma_D \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}, \text{on}\,\Gamma_N \tag{3}$$

$$u-\bar{u} \geqslant 0, \frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0, \frac{\partial u}{\partial n}(u-\bar{u})=0, \text{on}\,\Gamma_C \tag{4}$$

其中,f,$\bar{q}$ 和 $\bar{u}$ 为已知函数,n 是 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的单位法向量。

问题(1)的解 u 可以用边界积分表达式表示为

$$u(y)=\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} u^*(x,y)\mathrm{d}s_x-\int_\Gamma u(x)\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_x}\mathrm{d}s_x-\int_\Omega f(x)u^*(x,y)\mathrm{d}s_x, y \in \Omega \tag{5}$$

* **收稿日期**:2011-11-28　　**网络出版时间**:2012-9-15 23:19
资助项目:国家自然科学基金(No. 11101454)
作者简介:张守贵,男,讲师,硕士研究生,研究方向为微分方程数值解。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120915.2319.201205.41_010.html

其中 Laplace 方程的基本解 $u^*(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$。边界上的位势及其法向导数(通量)之间有如下关系

$$C(y)u(y)=\int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial n_x}u^*(x,y)\mathrm{d}s_x-\int_\Gamma u(x)\frac{\partial u^*(x,y)}{\partial n_x}\mathrm{d}s_x-\int_\Omega f(x)u^*(x,y)\mathrm{d}s_x,y\in\Gamma \tag{6}$$

其中 $C(y)=\frac{\theta(y)}{2\pi}$,$\theta(y)$是过点 y 的 Γ 的两条切线间包含的夹角[5-6]。

当采用常边界单元时,用 N 条直线段单元 $\Gamma_i(i=1,\cdots,N)$来近似表示边界 Γ,节点位于每个单元的中点。位势和通量在整个单元上为在节点 $y_i(i=1,\cdots,N)$处相应的常数值。则方程(6)离散化后有如下形式

$$C(y_i)u(y_i)+\sum_{j=1}^N\left(\int_{\Gamma_j}\frac{\partial u^*(x,y_i)}{\partial n_x}\mathrm{d}s_x\right)u(x_j)=\sum_{j=1}^N\left(\int_{\Gamma_j}u^*(x,y_i)\mathrm{d}s_x\right)\frac{\partial u(x_j)}{\partial n_x}-\int_\Omega f(x)u^*(x,y_i)\mathrm{d}s_x,i=1,\cdots,N \tag{7}$$

记 $u_i=u(x_i)$和 $q_i=\frac{\partial u(x_i)}{\partial n_x}$,于是方程(7)可以表示为矩阵形式

$$GQ=HU-F \tag{8}$$

其中 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_N)$, $Q=(q_1,q_2,\cdots,q_N)$,$F_i=\int_\Omega b(x)u^*(x,y_i)\mathrm{d}s_x$,$H_{ij}=\begin{cases}\int_{\Gamma_j}\frac{\partial u^*(x,y_i)}{\partial n_x}\mathrm{d}s_x,i\neq j\\ \frac{\theta(y)}{2\pi},i=j\end{cases}$,

$G_{ij}=\int_{\Gamma_j}u^*(x,y_i)\mathrm{d}s_x$。其中矩阵 $H,G\in\mathbf{R}^{N\times N}$,向量 $U,Q,F\in\mathbf{R}^N$。

令 K, L 和 M 表示属于边界 Γ_C、Γ_D 和 Γ_N 相应的单元及节点数目,把边界约束条件作用于矩阵方程(8),必须解决如下矩阵形式的线性互补方程

$$\begin{cases}GQ=HU-F\\ u_i\geqslant\bar{u}_i,q_i\geqslant 0_i,(u_i-\bar{u})q_i=0,i=1,\cdots,K\\ u_i=0,i=K+1,\cdots,K+L\\ q_i=\bar{q}_i,i=K+L+1,\cdots,K+L+M\end{cases} \tag{9}$$

其中 u_i 和 q_i, $i=1,\cdots,N,N=K+L+M$ 为边界节点处的位势和法向导数,$\bar{u}_i$ 和 $\bar{q}_i$ 为已知。

2 Signorini 问题的线性互补形式

现在推导问题(9)的一个线性互补形式[4]。沿不同的边界 Γ_C、Γ_D 和 Γ_N,定义如下变量

$$U_{\mathrm{I}}=(u_1,\cdots,u_K)^{\mathrm{T}},U_{\mathrm{II}}=(u_{K+1},\cdots,u_{K+L})^{\mathrm{T}},U_{\mathrm{III}}=(u_{K+L+1},\cdots,u_{K+L+M})^{\mathrm{T}};$$
$$Q_{\mathrm{I}}=(q_1,\cdots,q_K)^{\mathrm{T}},\ Q_{\mathrm{II}}=(q_{K+1},\cdots,q_{K+L})^{\mathrm{T}},Q_{\mathrm{III}}=(q_{K+L+1},\cdots,q_{K+L+M})^{\mathrm{T}}$$

利用在 Γ_D 和在 Γ_N 上的边界条件 $u=\bar{u}$ 和$\frac{\partial u}{\partial n_x}=\bar{q}$,系统(8)可以写成如下分块形式

$$\begin{bmatrix}G_{\mathrm{I\,I}} & G_{\mathrm{I\,II}} & G_{\mathrm{I\,III}}\\ G_{\mathrm{II\,I}} & G_{\mathrm{II\,II}} & G_{\mathrm{II\,III}}\\ G_{\mathrm{III\,I}} & G_{\mathrm{III\,II}} & G_{\mathrm{III\,III}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{\mathrm{I}}\\ Q_{\mathrm{II}}\\ \bar{Q}_{\mathrm{III}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{\mathrm{I\,I}} & H_{\mathrm{I\,II}} & H_{\mathrm{I\,III}}\\ H_{\mathrm{II\,I}} & H_{\mathrm{II\,II}} & H_{\mathrm{II\,III}}\\ H_{\mathrm{III\,I}} & H_{\mathrm{III\,II}} & H_{\mathrm{III\,III}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{\mathrm{I}}\\ \bar{u}_{\mathrm{II}}\\ U_{\mathrm{III}}\end{bmatrix}-F \tag{10}$$

其中,$\bar{u}_2$、$\bar{Q}_3$ 为已知向量。

重新安排方程组(10),得到

$$\begin{bmatrix}G_{\mathrm{I\,I}} & G_{\mathrm{I\,II}} & -H_{\mathrm{I\,III}}\\ G_{\mathrm{II\,I}} & G_{\mathrm{II\,II}} & -H_{\mathrm{II\,III}}\\ G_{\mathrm{III\,I}} & G_{\mathrm{III\,II}} & -H_{\mathrm{III\,III}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{\mathrm{I}}\\ Q_{\mathrm{II}}\\ U_{\mathrm{III}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{\mathrm{I\,I}} & H_{\mathrm{I\,II}} & -G_{\mathrm{I\,III}}\\ H_{\mathrm{II\,I}} & H_{\mathrm{II\,II}} & -G_{\mathrm{II\,III}}\\ H_{\mathrm{III\,I}} & H_{\mathrm{III\,II}} & -G_{\mathrm{III\,III}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ \bar{u}_{\mathrm{II}}\\ \bar{Q}_{\mathrm{III}}\end{bmatrix}-F \tag{11}$$

这样,方程组变为

$$\begin{bmatrix} Q_{\mathrm{I}} \\ Q_{\mathrm{II}} \\ U_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\mathrm{I\,I}} & G_{\mathrm{I\,II}} & -H_{\mathrm{I\,III}} \\ G_{\mathrm{II\,I}} & G_{\mathrm{II\,II}} & -H_{\mathrm{II\,III}} \\ G_{\mathrm{III\,I}} & G_{\mathrm{III\,II}} & -H_{\mathrm{III\,III}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{\mathrm{I\,I}} & H_{\mathrm{I\,II}} & -G_{\mathrm{I\,III}} \\ H_{\mathrm{II\,I}} & H_{\mathrm{II\,II}} & -G_{\mathrm{II\,III}} \\ H_{\mathrm{III\,I}} & H_{\mathrm{III\,II}} & -G_{\mathrm{III\,III}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\mathrm{I}} \\ \bar{u}_{\mathrm{II}} \\ \bar{Q}_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{\mathrm{I\,I}} & H_{\mathrm{I\,II}} & -G_{\mathrm{I\,III}} \\ H_{\mathrm{II\,I}} & H_{\mathrm{II\,II}} & -G_{\mathrm{II\,III}} \\ H_{\mathrm{III\,I}} & H_{\mathrm{III\,II}} & -G_{\mathrm{III\,III}} \end{bmatrix}^{-1} F \tag{12}$$

用下面的方法求出边界 Γ_C 上的函数值 U_1 后，便可以由(12)式求出其余的边界量 Q_1、Q_2 和 U_3。最后可以由离散化公式(5)求出原问题在区域 Ω 内的解，但是 Signorini 问题首要关注的是边界位势。

记

$$\begin{bmatrix} A_{\mathrm{I\,I}} & A_{\mathrm{I\,II}} \\ A_{\mathrm{II\,I}} & A_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\mathrm{I\,I}} & G_{\mathrm{I\,II}} & -H_{\mathrm{I\,III}} \\ G_{\mathrm{II\,I}} & G_{\mathrm{II\,II}} & -H_{\mathrm{II\,III}} \\ G_{\mathrm{III\,I}} & G_{\mathrm{III\,II}} & -H_{\mathrm{III\,III}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{\mathrm{I\,I}} & H_{\mathrm{I\,II}} & -G_{\mathrm{I\,III}} \\ H_{\mathrm{II\,I}} & H_{\mathrm{II\,II}} & -G_{\mathrm{II\,III}} \\ H_{\mathrm{III\,I}} & H_{\mathrm{III\,II}} & -G_{\mathrm{III\,III}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_{\mathrm{I\,I}} & B_{\mathrm{I\,II}} \\ B_{\mathrm{II\,I}} & B_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\mathrm{I\,I}} & G_{\mathrm{I\,II}} & -H_{\mathrm{I\,III}} \\ G_{\mathrm{II\,I}} & G_{\mathrm{II\,II}} & -H_{\mathrm{II\,III}} \\ G_{\mathrm{III\,I}} & G_{\mathrm{III\,II}} & -H_{\mathrm{III\,III}} \end{bmatrix}^{-1}$$

和

$$X = \begin{bmatrix} Q_2 \\ U_3 \end{bmatrix},\ \bar{W} = \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{Q}_3 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

其中 $A_{\mathrm{I\,I}}$、$B_{\mathrm{I\,I}} \in \mathbf{R}^{K\times K}$，$A_{\mathrm{I\,II}}$、$B_{\mathrm{I\,II}} \in \mathbf{R}^{K\times(L+M)}$，$A_{\mathrm{II\,I}}$、$B_{\mathrm{II\,I}} \in \mathbf{R}^{(L+M)\times K}$，$A_{\mathrm{II\,II}}$、$B_{\mathrm{II\,II}} \in \mathbf{R}^{(L+M)\times(L+M)}$，$X \in \mathbf{R}^{L+M}$，$\bar{W} \in \mathbf{R}^{L+M}$，$F_1 \in \mathbf{R}^K$，$F_2 \in \mathbf{R}^{L+M}$，则由方程组(12)得

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{I\,I}} & A_{\mathrm{I\,II}} \\ A_{\mathrm{II\,I}} & A_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \bar{W} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{\mathrm{I\,I}} & B_{\mathrm{I\,II}} \\ B_{\mathrm{II\,I}} & B_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

于是，边界 Γ_C 上的通量可以表示为

$$Q_1 = A_{\mathrm{I\,I}} U_1 + A_{\mathrm{I\,II}} \bar{W} - B_{\mathrm{I\,I}} F_1 - B_{\mathrm{I\,II}} F_2 \tag{13}$$

现在实施边界 Γ_S 上位势和通量间的互补关系

$$u_i \geqslant \bar{u}_i,\ q_i \geqslant 0,\ (u_i - \bar{u}_i) q_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, K$$

其中 $\bar{u}_i$ 为节点上的已知值，$q_i (i = 1, 2, \cdots, K)$ 可以由(13)式在边界 Γ_C 上变量 U_1 的函数及其他已知条件表示。这样，问题简化为标准的线性互补问题：寻找可行向量 U_1 满足不等方程系统

$$\begin{cases} U_1 \geqslant 0 \\ A_{\mathrm{I\,I}} U_1 + N \geqslant 0 \\ U_1^{\mathrm{T}} (A U_1 + N) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

其中 $N = A_{\mathrm{I\,II}} \bar{W} - B_{\mathrm{I\,I}} F_1 - B_{\mathrm{I\,II}} F_{22} - \bar{u}$，$\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_{1K})^{\mathrm{T}}$。

3 数值实现

由于线性互补问题(14)等价于下面的二次规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & U_1^{\mathrm{T}} (A_{\mathrm{I\,I}} U_1 + N) \\ \text{s. t.} \quad & A_{\mathrm{II}} U_1 + N \geqslant 0,\ U_1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

应用超松弛投影迭代法求解以上二次规划问题。对矩阵 $A_{\mathrm{I\,I}}$ 做分解 $A_{\mathrm{I\,I}} = S + D + T$，其中 D 为对角阵，S 为严格下三角阵，T 为严格上三角阵。对 $a \in \mathbf{R}$，定义投影算子 $[a]_+ := \max(a, 0)$，则可用如下逐次投影超松弛迭代法求解以上问题[4,7]。

第 1 步　选取一个初始向量 $U_1^{(0)} \geqslant 0$，参数 $\omega \in (0, 2)$ 和误差限 τ，置 $k = 0$；

第 2 步　计算 $Y := N + SU^{(k+1)} + DU^{(k)} + TU^{(k)} (i = 1, 2, \cdots, K)$，$U_1^{(k+1)} = [U_1^{(k)} - \omega D^{-1} Y), 0]_+ (i = 1, 2, \cdots, K)$；

第 3 步　如果 $\dfrac{\| U_1^{(k+1)} - U_1^{(k)} \|}{\| U_1^{(k+1)} \|} \leqslant \tau$，则停止迭代；否则，置 $k := k + 1$，返回第 2 步。

在数值实验中,对任意选取的参数 $\omega\in(0,2)$ 和满足约束条件的初始向量 $U_1^{(0)}$,由如上超松弛投影迭代法产生的序列 $\{U_1^{(k)}\}$ 收敛到问题的唯一解。

4 数值算例

为了验证本文提出方法的有效性,用该方法作了一些数值实验,并将计算结果进行了比较和分析,以此来说明本文提出的算法是有效的、可行的。

算例1　考虑以下问题[1-2]

$$\Delta u=b,\ \text{in}\ \Omega=\{(x_1,x_2):0<x_1<1,0<x_2<1\}$$

$$u=0,\text{on}\ \Gamma_D=\{(x_1,x_2):x_1=0,0\leqslant x_2\leqslant 1\}\cup\{(x_1,x_2):x_1=1,0\leqslant x_2\leqslant 1\}$$

$$u\geqslant 0,\frac{\partial u}{\partial n}\geqslant 0\ 且\frac{\partial u}{\partial n}u=0,\text{on}\ \Gamma_S=\{(x_1,x_2):0\leqslant x_1\leqslant 1,x_2=0\}\cup\{(x_1,x_2):0\leqslant x_1\leqslant 1,x_2=1\}$$

其中 $b(x)=\begin{cases}-10,x\in\{(x_1,x_2):0\leqslant x_1\leqslant 1/2,0\leqslant x_2\leqslant 1\}\\10,x\in\{(x_1,x_2):1/2\leqslant x_1\leqslant 1,0\leqslant x_2\leqslant 1\}\end{cases}$。

这个问题用有限元法[1],开关算法[2]求解过。

当选取边界单元为160时,用本文的方法得到了在Signorini边界上的数值解 $u(x,0)$(图1),以及 $y=0.5$ 上的数值解 $u(x,0.5)$(图2)。本文的结果与文献[1-2]中的结果进行比较,结果是吻合的。

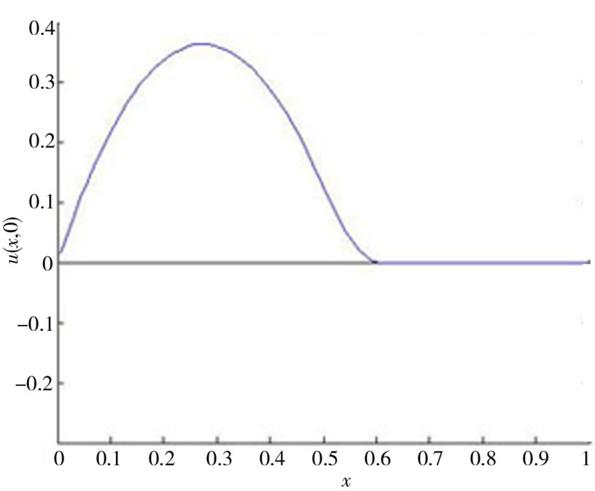

图1　$u(x,0)$ 的数值解

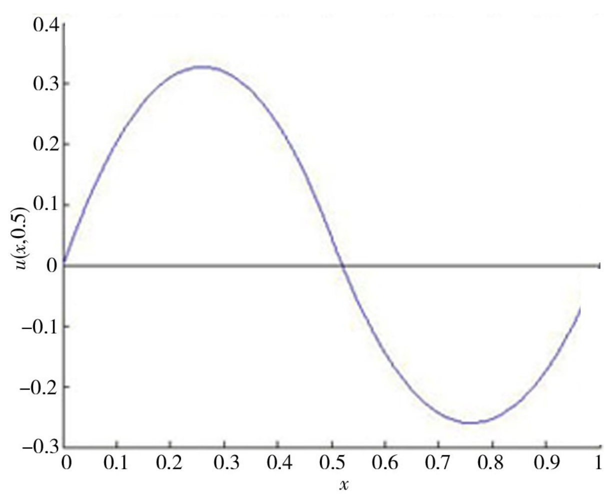

图2　$u(x,\frac{1}{2})$ 的数值解

算例2　考虑以下问题[2,8]

$$\Delta u=F\ \text{in}\ \Omega$$

$$u+x_2\geqslant 0,\frac{\partial u}{\partial n}\geqslant 0\ 且(u+x_2)\frac{\partial u}{\partial n}=0\ \text{on}\ \Gamma$$

其中 $\Omega=\{(x_1,x_2):x_1^2+(x_2-1)^2<1\}$,$\Gamma=\partial\Omega=\{(x_1,x_2):x_1^2+(x_2-1)^2=1\}$。

对不同的 F 对应的边界 Γ 采用24等分单元进行数值计算,在图3中描出了不同的 F 所对应的数值结果。这与文献[8]中用基本解方法求得的结果是一致的。

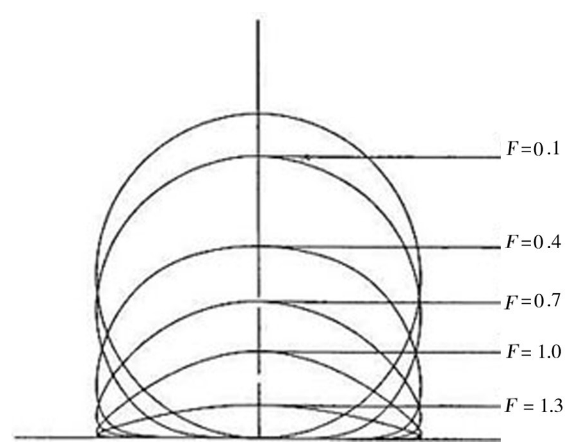

图3　不同 F 的数值解结果

5 结论

本文研究了用边界元、线性互补和投影超松弛

迭法求解 Poisson 方程 Signorini 问题的算法。该方法把离散化边界积分方程转化为标准的线性互补问题，其中 Signorini 边界约束条件仅作用于边界位势。再用投影超松弛迭代法求解线性互补问题，数值实验结果表明该方法有效。

参考文献：

[1] 王光辉，王烈衡. 基于对偶混合变分原理的 Signorini 问题的数值模拟[J]. 计算物理，2002，19(2)：149-154.

[2]张凯，祝家麟，张洁. 椭圆单侧问题的边界元计算方法[J]. 重庆大学学报：自然科学版，2003，26(10)：27-30.

[3] Han H，A direct boundary element method for Signorini problems[J]. Mathematics of Computation，1990，55(191)：115-128.

[4] Zhang S G，Zhu J L. The boundary element-linear complementary method for the Signorini problem[J]. Eng Anal Bound Elem，2012，36：112-117.

[5] 祝家麟，袁政强. 边界元分析[M]. 北京：科学出版社，2009.

[6] Brebbia C A. The boundary element for engineers[M]. London：Pentech Press，1978.

[7] Niethammer W. A note on the implementation of the successive overrelaxation method for linear complementarity problem [J]. Numerical Algorithms，1993，4：197-200.

[8] Bogomolny A. Fundamental solution method for elliptic boundary value problems[J]. J Numer Anal，1985，22(4)：644-669.

The Linear Complementarity Method for the Signorini Problem Using Boundary Element Method

ZHANG Shou-gui

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The boundary element-linear complementarities method for solving the Poisson Signorini problem is presented in this paper. Both Green's formula and the fundamental solution of the Laplace equation have been used to solve the boundary integral equation. By imposing the Signorini constraints of the potential and its normal derivative on the boundary, the discrete integral equation can be written into a standard linear complementarities problem in the form of $U_1 \geqslant 0$, $A_{II}U_1 + N \geqslant 0$ and $U_1^T(AU_1 + N) = 0$, which is affected by the Signorini boundary constraints with the boundary potential variable only. A projected successive over-relaxation iterative method is employed to solve the problem, and numerical results are presented to illustrate the efficiency of this method.

Key words: Signorini problem; poisson equation; boundary element method; linear complementarities; projected successive over-relaxation algorithm

(责任编辑 游中胜)