DOI:CNKI:50-1165/N. 20120915. 2319. 011

关于矩阵展形的一些新上界*

廖 文 诗

(重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331)

摘要:文献[1]提出了矩阵的展形,证明了矩阵展形的一个上界估计式,并且给出了这个不等式取等号的条件,即 A 是正规矩阵且 A 的特征值满足条件 φ 时等号成立。本文探讨矩阵展形的新的上界,证明了一个矩阵展形的上界估计式:$s(A)\leqslant\left\{2\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\operatorname{tr}A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$;然后,利用矩阵展形的估计式得到了一个奇异矩阵的谱半径的上界;最后,还给出了两个关于实展形、虚展形的上界的估计式:

$$s_R(A)\leqslant\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\operatorname{tr}A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\operatorname{tr}A|^2}{n}+\operatorname{Re}\operatorname{tr}A^2-\frac{2}{n}(\operatorname{tr}B)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$s_I(A)\leqslant\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\operatorname{tr}A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\operatorname{tr}A|^2}{n}+\operatorname{Re}\operatorname{tr}A^2-\frac{2}{n}(\operatorname{tr}C)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

关键词:矩阵展形；谱半径；正规矩阵；非正规矩阵；上界

中图分类号:O151.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2012)05-0046-04

1 预备知识

矩阵展形的研究,本质上是对 $s(A)=\max\limits_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j|$ 的估计问题。L. Mirsky 在 1956 年首先对矩阵展形进行了研究[1],相继取得了许多有益的成果[2]。随后，E. Deutsch 和 P. R. Beesack 通过矩阵奇异值和绝对行和给出了矩阵展形的一些上界[3-4],推进了矩阵展形的研究。我国学者屠伯埙也在 L. Mirsky 的研究基础上，通过矩阵秩的下界的估计得到了矩阵展形的一些有益的结果[5]。本文仍然关注这一主题,将改进 L. Mirsky，E. Deutsch 和 P. R. Beesack 的结果,给出矩阵展形 $s(A)$及 $s_R(A)$，$s_I(A)$，$\rho(A)$的新上界。

文中,$M_n(C)$表示 $n\times n$ 复矩阵的集合,A^* 表示矩阵 A 的共轭转置,$\operatorname{tr}(A)$表示矩阵 A 的迹；一个 $n\times n$ 复矩阵 A 的谱记为 $spe:=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，$\operatorname{Re}\lambda_i$ 表示 λ_i 的实部,$\operatorname{Im}\lambda_i$ 表示 λ_i 的虚部($i=1,2,\cdots,n$)；$\|\cdot\|_F$ 为矩阵的 Frobenius 范数,也即 $\|A\|_F^2=\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|^2=\operatorname{tr}(AA^*)$。$[A,A^*]=AA^*-A^*A$,$B=\frac{A+A^*}{2}$，$C=\frac{A-A^*}{2i}(i=\sqrt{-1})$。

根据 L. Mirsky [1]的定义,$s(A)=\max\limits_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j|$ ($i,j=1,2,\cdots,n$)称为矩阵 A 的展形。本文根据矩阵 A 的特征值的实部和虚部,定义如下两种展形

$$s_R(A)=\max_{i,j}(\operatorname{Re}\lambda_i-\operatorname{Re}\lambda_j),s_I(A)=\max_{i,j}(\operatorname{Im}\lambda_i-\operatorname{Im}\lambda_j)(i=1,2,\cdots,n)$$

对于复矩阵的特征值，I. Schur 在文献[6]中得到了著名不等式 $\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2\leqslant\sum\limits_{i,j=1}^n|a_{ij}|^2=\|A\|_F^2$,其中当且仅当 A 为正规矩阵($AA^*=A^*A$)时等号成立。

对于非正规矩阵，P. J. Eberlein 在文献[7]中得到了关于 $\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2$ 上界的更精确的不等式 $\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|^2\leqslant$

* **收稿日期**:2011-12-27　　**网络出版时间**:2012-9-15 23:19

作者简介:廖文诗,女，硕士研究生，研究方向为数值代数。

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120915.2319.201205.46_011.html

$\|A\|_F^2-\frac{1}{6}\frac{\|[A,A^*]\|_F^2}{\|A\|_F^2}$。这个不等式又被 R. Kress, et al[8] 进一步加强成为 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\left(\|A\|_F^4-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2\right)^{1/2}$。后来黄廷祝等[9]也得到一个关于 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$ 的不等式 $\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2\leqslant\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}$。文献[10]也对矩阵的特征值的界进行了一系列深入的研究。I. Schur, P. J. Eberlein, R. Kress, et al 和黄廷祝等人的研究结果将成为本文强化 L. Mirsky 展形的上界的基础。

值得一提的是,对于任意 n 个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,若其中有 $n-2$ 个复数相等且等于其余两个数的算术平均值时,称这 n 个复数满足条件 φ[1]。

2 $s(A)$与$\rho(A)$的新上界

本节首先给出两个引理,再给出关于 $s(A)$与 $\rho(A)$的新上界。

引理 1[1]　设 $z_1,z_2,\cdots,z_n\in C$, $s=\max\limits_{i,j}|z_i-z_j|$,则 $\frac{1}{2}ns^2\leqslant\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|z_i-z_j|^2$,当且仅当 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 满足条件 φ 时等号成立。

引理 2[1]　设 $A\in M_n(C)$,则 $s(A)\leqslant\left\{2\|A\|_F^2-\frac{2}{n}|\mathrm{tr}\,A|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$,当且仅当 A 是正规矩阵且 A 的特征值满足条件 φ 时等号成立。

定理 1　设 $A\in M_n(C)$,则

$$s(A)\leqslant\left\{2\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\tag{1}$$

证明　由引理 1 可知,$\frac{1}{2}n\,[s(A)]^2\leqslant\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|^2$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值;又由 Lagrange 恒等式,$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|^2=n\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2-\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right|^2=n\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2-|\mathrm{tr}\,A|^2$;故 $\frac{1}{2}n\,[s(A)]^2\leqslant n\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2-|\mathrm{tr}\,A|^2$。

由不等式 $\sum\limits_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2\leqslant\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}$,进而有

$$\frac{1}{2}n\,[s(A)]^2\leqslant n\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)-|\mathrm{tr}\,A|^2\tag{2}$$

注意到,(2)式等价于(1)式,从而定理 1 得证。　　证毕

易知,定理 1 的结论比 L. Mirsky 的结论(引理 2)更精确。

定理 2　对于任意 $n\times n$ 复矩阵 A,若 A 的特征值全为实数,则必有

$$s(A)\leqslant\left\{2\mathrm{tr}\,A^2-\frac{2}{n}|\mathrm{tr}\,A|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

当且仅当 A 是正规矩阵且 A 的特征值满足条件 φ 时等号成立。

证明　由 A 的特征值全为实数,所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i)^2$,即 $\mathrm{tr}\,A^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i)^2$。由 Lagrange 恒等式 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|^2=n\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2-\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right|^2=n\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i)^2-|\mathrm{tr}\,A|^2=n\,\mathrm{tr}\,A^2-|\mathrm{tr}\,A|^2$,因此有 $\frac{1}{2}n\,[s(A)]^2\leqslant\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|^2=n\,\mathrm{tr}A^2-|\mathrm{tr}\,A|^2$ 成立,即 $s(A)\leqslant\left\{2\,\mathrm{tr}\,A^2-\frac{2}{n}|\mathrm{tr}\,A|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$。从而定理 2 得以证明。

证毕

由定理 2 的证明过程可知，$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^2=\mathrm{tr}\,A^2\leqslant\|A\|_F^2$，所以定理 2 的结论也优于引理 2。

定理 3　设 $A\in M_n(C)$ 为奇异矩阵，则有

$$\rho(A)\leqslant\left\{2\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\rho(A)$ 为 A 的谱半径。

证明　由于 A 为奇异的复方阵，故 A 必存在零特征根，利用 $s(A)$ 的定义，有 $s(A)=\max\limits_{i,j}|\lambda_i-\lambda_j|\geqslant\max\limits_{i}|\lambda_i-0|=\max|\lambda_i|$，由(1)式,下面的不等式成立：

$$\rho(A)=\max|\lambda_i|\leqslant s(A)\leqslant\left\{2\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

证毕

3 $s_R(A)$与 $s_I(A)$的上界

这一节,讨论 $s_R(A)$与 $s_I(A)$的上界问题。有下面的定理。

定理 4　设 $A\in M_n(C)$，则

$$s_R(A)\leqslant\left\{2\|B\|_F^2-\frac{2}{n}(\mathrm{tr}\,B)^2\right\}^{\frac{1}{2}},\ s_I(A)\leqslant\left\{2\|C\|_F^2-\frac{2}{n}(\mathrm{tr}\,C)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

当且仅当 A 是正规矩阵且 A 的特征值满足条件 φ 时等号成立。

证明　设矩阵 A 的谱为 $spe:=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，由 I. Schur 不等式[2]知

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^2\leqslant\|B\|_F^2=\mathrm{tr}(B^2),\ \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Im}\,\lambda_i)^2\leqslant\|C\|_F^2=\mathrm{tr}(C^2)$$

运用 Lagrange 恒等式,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i-\mathrm{Re}\,\lambda_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\,\lambda_i\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^2-(\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A)^2=$$

$$n\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^2-(\mathrm{tr}\,B)^2\leqslant n\|B\|_F^2-(\mathrm{tr}\,B)^2;$$

且

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\mathrm{Im}\,\lambda_i-\mathrm{Im}\,\lambda_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Im}\,\lambda_i)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Im}\,\lambda_i\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Im}\,\lambda_i)^2-(\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,A)^2=$$

$$n\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Im}\,\lambda_i)^2-(\mathrm{tr}\,C)^2\leqslant n\|C\|_F^2-(\mathrm{tr}\,C)^2。$$

根据引理 2 可得

$$\frac{1}{2}n\,[s_R(A)]^2\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i-\mathrm{Re}\,\lambda_j)^2\leqslant n\|B\|_F^2-(\mathrm{tr}\,B)^2\tag{3}$$

$$\frac{1}{2}n\,[s_I(A)]^2\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\mathrm{Im}\,\lambda_i-\mathrm{Im}\,\lambda_j)^2\leqslant n\|C\|_F^2-(\mathrm{tr}\,C)^2\tag{4}$$

由(3)和(4)式知，定理成立。　证毕

注：　B(或 C)的特征值为 $\mathrm{Re}\,\lambda_1,\mathrm{Re}\,\lambda_2,\cdots,\mathrm{Re}\,\lambda_n$($\mathrm{Im}\,\lambda_1,\cdots,\mathrm{Im}\,\lambda_n$),当且仅当 A 是正规复矩阵。

引理 3[9]　设 $A\in M_n(C)$,$spe:=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$为它的谱,则下面不等式成立

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}+\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Im}\,\lambda_i)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}-\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A^2\right)。$$

定理 5　设 $A\in M_n(C)$，则下面的不等式成立

$$s_R(A)\leqslant\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}+\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A^2-\frac{2}{n}(\mathrm{tr}\,B)^2\right)^{\frac{1}{2}}\tag{5}$$

$$s_I(A)\leqslant\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}+\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\,A^2-\frac{2}{n}(\mathrm{tr}\,C)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

证明 由引理3可知

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}+\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\,A^2\right)$$

由引理2得到

$$\frac{1}{2}n\,[s_R(A)]^2\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i-\mathrm{Re}\,\lambda_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^2-(\mathrm{tr}\,B)^2\leqslant$$

$$\frac{n}{2}\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}+\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\,A^2\right)-(\mathrm{tr}\,B)^2 \tag{7}$$

(7)式与(5)式等价。(6)式的证明与(5)式的证明方法类似，这里省略其证明过程。 证毕

参考文献:

[1] Mirsky L. The spread of a matrix[J]. Mathematika, 1956,3(2):127-130.

[2] Mirsky L. Nequalities for normal and Hermitian matrices [J]. Duke Math J,1957,24(4): 591-599.

[3] Beesack P R. The spread of matrices and polynomials [J]. Linear Algebra and Appl,1980,31: 145-149.

[4] Deutsch E. On the spread of matrices and polynomials [J]. Linear Algebra and Appl,1978,22:49-55.

[5] 屠伯埙.关于矩阵的展形[J].复旦学报:自然科学版, 1984,23(4):435-441.

[6] Schur I. Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen[J]. Math Ann,1909,66(4): 488-510.

[7] EberleinP J. On measures of non-normality for matrices [J]. Amer Math Monthly,1965,72(9):995-996L.

[8] Kress R,Vries H L D,Wegmann R. On nonnormal matrices[J]. Linear Algebra and Appl,1974,8(M Marcus, 2):109-120.

[9] Huang T Z,WangL. Improving bounds for eigenvalues of complex matrices using traces[J]. Linear Algebra Appl, 2007 (426): 841-854.

[10] 杨忠鹏.一类矩阵的特征值的估计[J].重庆师范学院学报:自然科学版,1993,10(3):32-37.

On Some New Upper Bounds for the Spread of a Matrix

LIAO Wen-shi

(College of Mathematics and Statistics of Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: L. Mirsky proposed the spread of a matrix, proved an upper bound for the spread of a matrix and with equality if and only if A is normal and its eigenvalues satisfy condition φ. First, in this paper, we discussed new upper bounds for the spread of a matrix. We formulated an upper bound for the spread of a matrix

$$s(A)\leqslant\left\{2\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

. Second, we obtained an upper bound for spectral radius of singular matrices by a new upper bound for the spread of matrix. Furthermore, two upper bounds for real spread and imaginary spread was given

$$s_R(A)\leqslant\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}+\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\,A^2-\frac{2}{n}(\mathrm{tr}\,B)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$s_I(A)\leqslant\left(\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|[A,A^*]\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}\,A|^2}{n}+\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\,A^2-\frac{2}{n}(\mathrm{tr}\,C)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Key words: spread of a matrix; spectral radius; normal matrix; non-normal matrix; upper bound

(责任编辑 游中胜)