DOI:CNKI:50-1165/N.20120915.2319.013

预处理后含参数形式的 SOR 迭代法收敛性*

雷　刚

(宝鸡文理学院 数学系,陕西 宝鸡 721013)

摘要:在运用 SOR 迭代法求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 时,针对常见的预条件矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})$,本文给出预处理后迭代法的一类含参数分裂形式 $\boldsymbol{A}_s=\frac{1}{\gamma}\{[\alpha\boldsymbol{I}-\gamma(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}_1)]-[(\alpha-\gamma)\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{D}_1+\gamma\boldsymbol{U}]\}$,使得分裂形式更加一般化,当 $\alpha=1$ 时就成为常见的预条件 SOR 迭代法。结合矩阵分析和矩阵比较定理,讨论这种含参数分裂形式下的 SOR 迭代法不仅能加速 SOR 迭代法,而且收敛速度超过常见预条件 SOR 迭代法,通过参数 α 的不同取值找到迭代法谱半径的变化趋势,得到当参数 $\gamma=\alpha$ 时该方法的谱半径最小,即收敛速度最快。最后给出数值例子加以验证。

关键词:预条件;收敛性;SOR 迭代法;谱半径;

中图分类号:O241.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2012)05-0053-03

近年来,随着计算机的快速应用和发展,用迭代法求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$)越来越普遍,但是迭代法是否收敛以及收敛速度的快慢直接影响着线性方程组的求解,因此许多学者[1-4]提出采用各种预处理方法改变或加速迭代法的收敛性。本文针对常见的预处理因子 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})$,给出含参数形式的分裂,使得加速效果更好,分裂更加一般化。其中,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,$\boldsymbol{S}$ 为如下形式的方阵,$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&0&\cdots&0\end{pmatrix}$,$a_{n1}$ 是系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 对应位置上的元素,在预处理因子 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})$ 作用后,线性方程组变为 $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$,它的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}_S$,则

$$\boldsymbol{A}_S=\boldsymbol{PA}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U})=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_1)-(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}_1)-\boldsymbol{U}\tag{1}$$

通常设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 分别是严格下三角矩阵和严格上三角矩阵。那么求解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 SOR 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{I}-\gamma\mathbf{L})^{-1}[(1-\gamma)\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{U}]\tag{2}$$

在预处理后,可知 $\boldsymbol{SL}=0$;令 $\boldsymbol{SU}=\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{L}_1$,$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_1)$,$-(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}_1)$ 和 $-\boldsymbol{U}$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}_S$ 的对角线部分、严格下三角部分和严格上三角部分。则预处理后的 *SOR* 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{T}_S=[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_1)-\gamma(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}_1)]^{-1}[(1-\gamma)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_1)+\gamma\boldsymbol{U}]\tag{3}$$

记为 $\boldsymbol{T}_S=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$。为加快迭代法的收敛性,引入参数 α,将预处理后的矩阵 $\boldsymbol{A}_S$ 做分解

$$\boldsymbol{A}_S=\frac{1}{\gamma}\{[\alpha\boldsymbol{I}-\gamma(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}_1)]-[(\alpha-\gamma)\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{D}_1+\gamma\boldsymbol{U}]\}\tag{4}$$

则上述的 SOR 迭代法的迭代矩阵为

$$\breve{\boldsymbol{T}}=[\alpha\boldsymbol{I}-\gamma(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}_1)]^{-1}[(\alpha-\gamma)\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{D}_1+\gamma\boldsymbol{U}]\tag{5}$$

记为 $\breve{\boldsymbol{T}}_S=\breve{\boldsymbol{M}}^{-1}\breve{\boldsymbol{N}}$。

1 定义和引理

定义 1[5]　称 $\boldsymbol{A}$ 为 M-矩阵,如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能表示为 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶的单位矩阵,$\boldsymbol{B}\geqslant 0$,且 $s\geqslant\rho(\boldsymbol{B})$,特别当 $s>\rho(\boldsymbol{B})$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的 M-矩阵;当 $s=\rho(\boldsymbol{B})$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异 M-矩阵。其中 $\rho(\boldsymbol{B})$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径。

定义 2[6]　称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的,如果设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的阶 $n\geqslant 2$,对集合 $W=\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意两个非空不相交的子集 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{W}$,都有 i 和 j 满足 $i\in\boldsymbol{S}$,$j\in\boldsymbol{T}$,使 $a_{ij}\neq 0$,否则称为可约的。

引理 1[5]　(Perron-Frobenius 定理)如果 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非负方阵,那么就有:1)$\boldsymbol{A}$ 有非负特征值等于其谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})$;2)$\boldsymbol{A}$ 有与 $\rho(\boldsymbol{A})$ 相对应的非负特征向量;3)$\boldsymbol{A}$ 的任一元素增加时,$\rho(\boldsymbol{A})$ 不减。

引理 2[7]　设 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵,则:1)若 $\alpha\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{Ax}$ 对某一个非负向量 $\boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 成立,那么就有 $\alpha\leqslant$

* 收稿日期:2011-11-27　　网络出版时间:2012-9-15 23:19

资助项目:宝鸡文理学院重点项目(No.ZK11015)

作者简介:雷刚,男,讲师,硕士,研究方向为数值计算。

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120915.2319.201205.53_013.html

$\rho(A)$;2) 若 $Ax\leqslant\beta x$ 对某一个正向量 x 成立,那么就有 $\rho(A)\leqslant\beta$,进一步,如果 A 不可约且有 $0\neq\alpha x\leqslant Ax\leqslant\beta x$,$\alpha x\neq Ax$,$Ax\neq\beta x$ 对某一个非负向量 x 成立,则 $\alpha<\rho(A)<\beta$。

引理 3[3] 设 A 为 L-矩阵,满足

$$0<a_{i,i+1}a_{i+1,i},i=1,2,\cdots,n-1$$

且 $0<a_{i1}a_{1i}<1$,$i=2,3,\cdots,n$,那么当 $0<\omega<1$ 时,由(3)式给出的 SOR 迭代矩阵 T 是非负不可约的。

引理 4[8] 设 $A^{-1}\geqslant0$,并且 $A=\widetilde{M}-\widetilde{N}=M-N$ 是弱正规分裂。如果 $M^{-1}\leqslant\widetilde{M}^{-1}$,且 $N\geqslant0$ 则 $\rho(\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N})\leqslant\rho(M^{-1}N)$。

2 结果与证明

定理 1 方程组的系数矩阵 A 是对角元素为 1 的 L-矩阵,满足 $0<a_{n1}a_{1n}<1$,$0<\gamma\leqslant\alpha\leqslant1$,设 T 和 $\breve{T}$ 分别由(2)、(5) 式给出的 SOR 迭代法的迭代矩阵,那么当 $\rho(T)\leqslant1$ 时,就有 $\rho(\breve{T})\leqslant\rho(T)$。

证明 由引理 3 知,T 是一个不可约的非负矩阵,再由引理 1 知,存在一个正向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}$,满足 $Tx=\lambda x$,其中 $\lambda=\rho(T)$。即有 $[(1-\gamma)I+\gamma U]x=(I-\gamma L)\lambda x$。

另外利用 $SL=0$,可得 $\gamma SUx=[(\lambda-1)SI+\gamma SI]\lambda x$,由 A 是对角元素为 1 的 L-矩阵,$0<\gamma\leqslant\alpha\leqslant1$ 且 $0<a_{n1}a_{1n}<1$,结合矩阵 $L-S+L_1$ 是非负的下三角矩阵可知 $\breve{M}^{-1}$,$\breve{N}$ 都是非负矩阵,所以可得

$$(\breve{N}-\lambda\breve{M})x=\{[(\alpha-\gamma)I+\gamma D_1+\gamma U]-\lambda[\alpha I-\gamma(L-S+L_1)]\}x=(\lambda-1)[(1-\alpha)I+(1-\gamma)S+\gamma L_1]x$$

那么 $\breve{T}x-\lambda x\breve{T}=\breve{M}^{-1}\breve{N}x-\lambda x=\breve{M}^{-1}(\breve{N}-\lambda\breve{M})x=[\alpha I-\gamma(L-S+L_1)]^{-1}(\lambda-1)\cdot[(1-\alpha)I+(1-\gamma)S+\gamma L_1]x$

记 $y=[\alpha I-\gamma(L-S+L_1)]^{-1}[(1-\alpha)I+(1-\gamma)S+\gamma L_1]x$,可知 $y\geqslant0$,结合文献[8],当 $\lambda<1$,则 $\breve{T}x-\lambda x\leqslant0$,但 $\breve{T}x-\lambda x\neq0$,因此 $\breve{T}x\leqslant\lambda x$,由引理 2 可得 $\rho(\breve{T})\leqslant\lambda=\rho(T)$。

定理 2 设 A 为非奇异不可约 M-矩阵,满足 $0<a_{n1}a_{1n}<1$,且 $0<\gamma\leqslant\alpha\leqslant\min\{1-a_{n1}a_{1n}\}$ 时,T_S 和 $\breve{T}$ 分别由(3)、(5)式给出的 SOR 迭代法的迭代矩阵,那么 $\rho(\breve{T})\leqslant\rho(T_S)<1$。

证明 由(5)式知

$$A_S=\frac{1}{\gamma}\{[\alpha I-\gamma(L-S+L_1)]-[(\alpha-\gamma)I+\gamma D_1+\gamma U]\}=\frac{1}{\gamma}\breve{M}-\frac{1}{\gamma}\breve{N}$$

又由于 $0<\gamma\leqslant\alpha\leqslant\min\{1-a_{n1}a_{1n}\}$,$L-S+L_1$ 是非负的下三角矩阵,结合定理 1 的证明有 $\left(\frac{1}{\gamma}\breve{M}\right)^{-1}\geqslant0$,$\frac{1}{\gamma}\breve{N}\geqslant0$,从而 $A_S=\frac{1}{\gamma}\breve{M}-\frac{1}{\gamma}\breve{N}$ 为 A_S 的一个正规分裂;

另一方面,由(1)式对 A_S 做如下分裂,$A_S=(I-D_1)-(L-S+L_1)-U=\frac{1}{\gamma}[(I-D_1)-\gamma(L-S+L_1)]-\frac{1}{\gamma}[(1-\gamma)(I-D_1)+\gamma U]=\frac{1}{\gamma}M-\frac{1}{\gamma}N$。令 $A_S=(\bar{a}_{ij})$,则 $\bar{a}_{ij}=\begin{cases}a_{ij},i=1,2,\cdots,n-1\\ a_{nj}-a_{n1}a_{1j},i=n\end{cases}$。结合条件 $0<a_{n1}a_{1n}<1$,$0<\gamma\leqslant\alpha\leqslant\min\{1-a_{n1}a_{1n}\}$ 知 $\frac{1}{\gamma}M\geqslant0$,$\frac{1}{\gamma}N\geqslant0$,从而 $A_S=\frac{1}{\gamma}M-\frac{1}{\gamma}N$ 为 A_S 的另一个正规分裂。

另外,有 $\breve{M}\neq M$,事实上,若 $\breve{M}=M$,即 $1-a_{n1}a_{1n}=1$,这与 $0<a_{n1}a_{1n}<1$ 矛盾。结合条件 $0<\gamma\leqslant\alpha\leqslant\min\{1-a_{n1}a_{1n}\}$ 有 $\breve{M}\leqslant M$,从而 $\breve{M}^{-1}\geqslant M^{-1}$。

综上,由引理 4 结合文献[8]可知 $\rho(\breve{T})\leqslant\rho(T_S)<1$。

定理 3 设 A 为非奇异不可约 M-矩阵,满足 $0<a_{n1}a_{1n}<1$,$0<\gamma\leqslant\alpha_j\leqslant\min\{1-a_{n1}a_{1n}\}$,$T$ 和 $\breve{T}$ 分别由(2)、(5)式给出的 SOR 迭代法的迭代矩阵,对不同的 α_1,α_2,记(5)式对应的迭代矩阵为 $\breve{T}_{\alpha_1}$,$\breve{T}_{\alpha_2}$,那么当 $\alpha_1<\alpha_2$,$\rho(T)<1$ 时,有 $\rho(\breve{T}_{\alpha_1})\leqslant\rho(\breve{T}_{\alpha_2})$。

证明 由于 $\alpha_1<\alpha_2$,则非负矩阵 $[\alpha_1I-\gamma(L-S+L_1)]\leqslant[\alpha_2I-\gamma(L-S+L_1)]$,从而相应的逆矩阵就有 $[\alpha_1I-\gamma(L-S+L_1)]^{-1}\geqslant[\alpha_2I-\gamma(L-S+L_1)]^{-1}$,又由定理 2 知,$\breve{T}_{\alpha_1}$ 是非负矩阵,结合引理 1 可知其谱半径是它的一个特征值,且有与之相对应的非负特征向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T}$,使得 $\breve{T}_{\alpha_1}x=\rho(\breve{T}_{\alpha_1})x$。所以

$$\rho(\breve{T}_{\alpha_1})x-\breve{T}_{\alpha_2}x=\breve{T}_{\alpha_1}x-\breve{T}_{\alpha_2}x=\breve{M}_{\alpha_1}^{-1}(\breve{N}_{\alpha_1}-\lambda\breve{M}_{\alpha_1})x-\breve{M}_{\alpha_2}^{-1}(\breve{N}_{\alpha_2}-\lambda\breve{M}_{\alpha_2})x\leqslant\breve{M}_{\alpha_1}^{-1}[(\breve{N}_{\alpha_1}-\lambda\breve{M}_{\alpha_1})-(\breve{N}_{\alpha_2}-\lambda\breve{M}_{\alpha_2})]x=\breve{M}_{\alpha_1}^{-1}(1-\lambda)(\alpha_1-\alpha_2)Ix$$

所以,当 $\rho(T)=\lambda<1$,$\alpha_1<\alpha_2$ 时,上述不等式右端小于零,从而 $\rho(\breve{T}_{\alpha_1})\leqslant\rho(\breve{T}_{\alpha_2})$。 证毕

推论 设 A 为非奇异不可约 M-矩阵,满足 $0<$

$a_{n1}a_{1n}<1, 0<\gamma\leqslant\alpha\leqslant\min\{1-a_{n1}a_{1n}\}$，$\boldsymbol{T}$ 和 $\breve{\boldsymbol{T}}$ 分别由(2)、(5)式给出的 SOR 迭代法的迭代矩阵，那么当 $\gamma=\alpha$ 时，由(5)式给出的 SOR 迭代法的谱半径达到最小。

3 数值例子

例 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.1 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 1 & -0.3 & 0 & -0.1 \\ 0 & -0.6 & 1 & -0.4 & -0.3 \\ -0.1 & 0 & -0.2 & 1 & 0 \\ -0.2 & -0.3 & 0 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

对不同的参数 γ,α，所得到的含参数分裂下的 SOR 迭代法的谱半径比较如表 1。

表 1 不同参数的迭代法谱半径

γ	$\rho(\boldsymbol{T})$	$\rho(\boldsymbol{T}_S)$	α	$\rho(\breve{\boldsymbol{T}})$
0.5	0.817 7	0.792 3	0.8	0.732 1
0.5	0.817 7	0.792 3	0.7	0.698 2
0.5	0.817 7	0.792 3	0.5	0.496 3
0.4	0.860 8	0.842 6	0.8	0.785 5
0.8	0.655 5	0.652 1	0.8	0.496 3
0.1	0.969 3	0.962 3	0.1	0.496 3

从表 1 可知，固定 γ，本文给出的新分裂形式的迭代法随着 β 的减小其谱半径也在减小，并且当 $\gamma=\beta$ 时谱半径最小；γ 越大，SOR 迭代法的谱半径就越小，但总能得到当 $\gamma=\beta$ 时这种新的迭代法的谱半径达到最小。

4 结论

理论分析和数值例子分析显示在引入参数以后，系数矩阵的分裂形式更加一般，迭代法的收敛速度能够加快，迭代法的谱半径随着参数 β 的变化可以减小，比较适合于并行计算机的算法处理，而且加速收敛的效果优于一般的预条件方法，为求解大型线性方程组的算法设计提供新的理论依据。

参考文献：

[1] Huang T Z, Cheng G H, Cheng X Y. Modified SOR-type iterative method for Z-matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 175: 258-268.

[2] Hiroshi N, Kyouji H, Munenori M, et al. The survey of preconditioners used for accelerating the rate of convergence in the Gauss-Seidel method [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 165: 587-600.

[3] Jae Heon Yun. A note on the modified SOR method for Z-matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 194: 572-576.

[4] 周富照，张艳丽. 多项式预条件求解一类矩阵方程[J]. 重庆理工大学学报：自然科学版，2011，25(3)：102-107.

[5] Yong D M. Iterative solution of large linear systems [M]. New York: Academic press, 1971.

[6] Varga R S. Matrix iterative analysis [M]. Heidelberg: Spring-Verlag, 2000.

[7] 张谋成，黎稳. 非负矩阵论[M]. 广州：广东高等教育出版社，1995.

[8] Wang X Z, Huang T Z, Fu Y D. Comparison results on preconditioned SOR-type iterative method for Z-matrices linear systems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 206: 726-732.

The Convergence of the SOR Iterative Method with Parameters in Preconditioned

LEI Gang

(Dept. of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji Shaanxi 721013, China)

Abstract: In using the SOR iterative method for solving linear system $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, this paper gives the SOR iterative method after preconditioned $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})$ with parameters splitting form, $\boldsymbol{A}_s=\frac{1}{\gamma}\{[\alpha\boldsymbol{I}-\gamma(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}_1)]-[(\alpha-\gamma)\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{D}_1+\gamma\boldsymbol{U}]\}$. This can make splitting form more generalized, and obtain the common preconditioned SOR iterative method when $\alpha=1$. By using matrix iterative analysis and comparison theorems to discuss convergence rate of this SOR iterative method after preconditioned with parameters splitting form is not only to accelerate the SOR iterative method, but also to excel the general SOR iterative method after preconditioned. Then find the spectral radius change trend by changing parametersα, and obtain the parameter optimal selection in $\gamma=\alpha$, at this time the convergence rate is fastest. Finally the numerical example is given to verify the conclusions.

Key words: precondition; convergence; the SOR iteration method; spectral radius

(责任编辑 黄 颖)