无约束全局最优化的一种新的辅助函数法*

吴至友，刘呈军

(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要：对无约束全局最优化问题提出一种新的平稳点函数法和拟平稳点函数法，通过实现一系列局部极小化来获得问题的全局极小。这种求解过程由局部极小化的两阶段循环组成：第一阶段对原目标函数执行局部极小化；第二阶段对提出的这种新的平稳点函数或拟平稳点函数执行极小化，同时使得原目标函数下降。最后通过举例，并运用 Matlab7.11 进行数值计算，结果表明：本文提出的新的平稳点函数法和拟平稳点函数法是非常有效的。

关键词：全局最优化；辅助函数；局部极小化；平稳点函数法；拟平稳点函数法

中图分类号：O221.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2013)01-0001-06

在现实生活中，大量的自然科学和社会科学中的问题都可以归结为全局最优化问题。当全局最优化问题存在多个不同于全局极小点的局部极小点时，经典的求解线性规划问题的技术不能成功地应用到非线性全局优化问题中。而且，还缺少一个很好的判定准则来判定一个局部极小是否为全局极小。因此，长期以来非线性全局优化问题成为最优化领域中的一个难点。

一般考虑如下形式的问题[2]

$$\min_{\text{s.t. } x\in X} f(x)$$

其中 $X\subset \mathbf{R}^n$ 是可行域，$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是目标函数。

对于求解目标函数和约束函数(如果有的话)都连续可微的全局优化问题，葛仁溥等首次提出了填充函数法[3]来求解。后来张连生、吴至友等人分别对填充函数的定义进行了改进[5-6]，在文献[6]中给出了一种新的填充函数和拟填充函数以及相应的算法。然而填充函数法或拟填充函数法都有一个不足，就是在极小化填充函数或拟填充函数的时候不能直接从当前局部极小点 x^* 出发，必须从点 x^* 的附近点出发极小化填充函数或拟填充函数。针对这种缺陷，吴至友等人在文献[7]中提出了一种全局下降法(平稳点函数法)和拟全局下降法(拟平稳点函数法)，这种方法的优点在于目标函数的局部极小点 x^* 不是平稳点函数和拟平稳点函数的平稳点，所以可以直接从点 x^* 出发极小化辅助函数。注意到，在文献[7]中的辅助函数 $g_r(t)$，$f_r(t)$ 当 $t\geqslant 0$ 时都为常数 1，这样平稳点函数 $\varphi_{r,q,x^*}(x)$ 与原问题的目标函数没有关系。针对文献[6]和[7]的这些缺点和优点，本文提出了一种新的平稳点函数，该新的平稳点函数避免了上面所述的缺陷。但是，平稳点函数法在执行数值试验的搜索过程中容易跑向约束集 Ω 的边界点处停止，所以作者又提出了一种新的拟平稳点函数来避免这种现象，这种新的拟平稳点函数法在执行数值试验的搜索过程总会在约束集 Ω 的内部进行。从理论分析和数值算例的结果都表明，这种新的平稳点函数法和拟平稳点函数法是非常有效的。

本文安排如下：第 2 节，提出一种新的平稳点函数，并且给出相应的平稳点函数法；第 3 节，提出一种新的拟平稳点函数及拟平稳点函数法；第 4 节，给出数值试验，试验的结果表明，提出的这种新的平稳点函数法和拟平稳点函数法是有效的。

1 一种新的平稳点函数和平稳点函数法

考虑极小化问题

$$(P)\quad \min_{x\in\mathbf{R}^n} f(x) \tag{1}$$

假设 1　$f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续可微。

假设 2　令 Y 是极小化问题(P)的所有局部极小点的集合，令

$$F=\{f(x)\mid x\in Y\}$$

假设 F 是一个有限集，即极小化问题(P)的局部极小值只有有限个。

假设 3　存在 $x_0^0\in\mathbf{R}^n$，$f_0>0$ 和一个箱子集 $\Omega=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid c_i\leqslant x_i\leqslant d_i, i=1,2,\cdots,n\}\subset\mathbf{R}^n$ 使得 $x_0^0\in\Omega$ 和对任意的 $x\in\mathbf{R}^n\setminus\operatorname{int}\Omega$ 有 $f(x)\geqslant f(x_0^0)+f_0$，其中 $c_i,d_i\in\mathbf{R}$，$i=1,\cdots,n$。

注 1　如果 $f(x)$ 满足强制性条件，即 $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x)=+\infty$，则 $f(x)$ 满足假设 3。

注 2　在假设 3 的条件下极小化问题(P)等价于

* 收稿日期：2012-07-20　　网络出版时间：2013-01-18 15:05

资助项目：国家自然科学基金(No. 10971241)

作者简介：吴至友，女，教授，博士，研究方向为最优化理论与方法，E-mail：zhiyouwu@263.net

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130118.1505.201301.1_001.html

下面的极小化问题(2)

$$(\mathrm{P}_\Omega)\ \min_{\mathrm{s.t.}\,x\in\Omega} f(x) \tag{2}$$

设x^*是满足$f(x^*)\leqslant f(x_0^0)$的一个当前局部极小点,其中x_0^0满足假设3。

不失一般性,取$c=(c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$, $d=(d_1,\cdots,d_n)^{\mathrm{T}}$, $x_0=(c_1-1,\cdots,c_n-1)^{\mathrm{T}}$。显然,有$x_0\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega$和对任意的$x\in\Omega$有$\|x-x_0\|\geqslant 1$,而且$d$是$\Omega$中离点$x_0$最远的顶点。

设$L=\{\bar{x}\in Y|f(\bar{x})<f(x^*)\}$,$\beta_0=\min_{x\in L}(f(x^*)-f(x))$。如果$L=\varphi$,不妨设$\beta_0=+\infty$。

下面在文献[7]中定义的平稳点函数基础上对其做如下的改进:

定义1 (平稳点)点x_0称为函数$f(x)$在集合Ω上的平稳点,如果$\nabla f(x_0)=0$。

定义2 (平稳点函数)函数$p_{x^*}(x)$称为极小化问题(1)在局部极小点x^*处的一个平稳点函数,如果函数$p_{x^*}(x)$满足下面的条件:

(i)对任意满足$f(x)\geqslant f(x^*)$的点$x\in\Omega$,x都不是函数$p_{x^*}(x)$的平稳点;

(ii)设$\bar{x}\in\mathrm{int}\ \Omega$是函数$p_{x^*}(x)$的任意局部极小点,那么一定有$f(\bar{x})<f(x^*)$;

(iii)如果x^*不是极小化问题(1)的全局极小点,即$L\neq\varphi$,则函数$p_{x^*}(x)$一定在Ω上存在一个满足下列条件:$p_{x^*}(\bar{x})<p_{x^*}(x^*)$和对$x\in\partial\Omega$有$p_{x^*}(\bar{x})<p_{x^*}(x)$的一个局部极小点$\bar{x}$,显然$\bar{x}$一定是$p_{x^*}(x)$的平稳点。

对任意的$r>0$,$q>0$,设

$$g_{r,q}(t)=\begin{cases}e^{\frac{t}{q}}, & t\geqslant 0\\ \dfrac{r-2q}{qr^3}t^3+\dfrac{2r-3q}{qr^2}t^2+\dfrac{t}{q}+1, & -r<t\leqslant 0\\ 0, & t\leqslant -r\end{cases} \tag{3}$$

$$f_r(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ \dfrac{r-2}{r^3}t^3+\dfrac{r-3}{r^2}t^2+1, & -r<t\leqslant 0\\ t+r & t\leqslant -r\end{cases} \tag{4}$$

其中$f_r(t)$是文献[7]中所定义的函数。容易验证$g_{r,q}(t)$和$f_r(t)$在$\mathbf{R}$上都是连续可微的。

本文给出如下形式的一种新的平稳点函数

$$\varphi_{r,q,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+f_r(f(x)-f(x^*)) \tag{5}$$

注意到x^*不是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的平稳点。

定义$D=\dfrac{1}{\|d-x_0\|^2}$,下面讨论这种新的平稳点函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的一些重要性质。

定理1 如果假设1,3成立,那么对于任意的$r>0$,$q>\dfrac{T}{\sqrt{D}}$(其中$T=\max_{x\in\Omega}\|\nabla f(x)\|$)时函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$满足下面的条件:

(i)如果$x\in\Omega$满足$f(x)\geqslant f(x^*)$,则x不是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的平稳点;

(ii)设$\bar{x}\in\mathrm{int}\ \Omega$是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的任意局部极小点,那么一定有$f(\bar{x})<f(x^*)$。

证明 (i)由(5)式,有

$$\nabla\varphi_{r,q,x^*}(x)=-\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|^3}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+\frac{1}{\|x-x_0\|}g'_{r,q}(f(x)-f(x^*))\nabla f(x)+f'_r(f(x)-f(x^*))\nabla f(x)$$

如果$f(x)\geqslant f(x^*)$,则有

$$\nabla\varphi_{r,q,x^*}(x)=-\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|^3}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}+\frac{1}{q}\frac{1}{\|x-x_0\|}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}\nabla f(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}\left(-\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|^2}+\frac{1}{q}\nabla f(x)\right)$$

因为$D=\dfrac{1}{\|d-x_0\|^2}$,$q>\dfrac{T}{\sqrt{D}}$,其中$T=\max_{x\in\Omega}\|\nabla f(x)\|$,所以$\dfrac{1}{\|x-x_0\|}\geqslant\sqrt{D}$,$\|\nabla f(x)\|\leqslant T$。因此,$\left\|-\dfrac{x-x_0}{\|x-x_0\|^2}+\dfrac{1}{q}\nabla f(x)\right\|\geqslant\left|\dfrac{1}{\|x-x_0\|}-\dfrac{1}{q}\|\nabla f(x)\|\right|\geqslant\sqrt{D}-\dfrac{T}{q}>0$,即$-\dfrac{x-x_0}{\|x-x_0\|^2}+\dfrac{1}{q}\nabla f(x)\neq 0$,因此$\nabla\varphi_{r,q,x^*}(x)\neq 0$。从而满足上述条件的$x$一定不是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的平稳点。

(ii)设$\bar{x}\in\mathrm{int}\ \Omega$是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的一个局部极小点。如果$f(\bar{x})\geqslant f(x^*)$,那么$\nabla\varphi_{r,q,x^*}(\bar{x})=\dfrac{1}{\|\bar{x}-x_0\|}e^{\frac{f(\bar{x})-f(x^*)}{q}}\left(-\dfrac{\bar{x}-x_0}{\|\bar{x}-x_0\|^2}+\dfrac{1}{q}\nabla f(\bar{x})\right)$。因为$q>\dfrac{T}{\sqrt{D}}$,所以由(i)的证明可知$\nabla\varphi_{r,q,x^*}(\bar{x})\neq 0$,因此$\bar{x}$不是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的平稳点,从而$\bar{x}$不是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的极值点,这与设$\bar{x}$是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$的一个局部极小点矛盾。所以,$f(\bar{x})<f(x^*)$。 证毕

定理2 假设

(i)假设1,2,3成立;

(ii)$L\neq\varphi$,即x^*不是极小化问题(1)的一个全局极小点。那么当参数r满足$0<r\leqslant\dfrac{\beta_0}{2}$时,对任意的$\bar{x}\in L$是函数$\varphi_{r,q,x^*}(x)$在$\Omega$上的一个局部极小点和一

个平稳点，而且有 $\varphi_{r,q,x^*}(\bar{x})<\varphi_{r,q,x^*}(x^*)$ 和对任意的 $x\in\partial\Omega$ 有 $\varphi_{r,q,x^*}(\bar{x})<\varphi_{r,q,x^*}(x)$。

证明　由假设2和 $L\neq\varphi$ 可知，$\{f(x^*)-f(x)\mid x\in L\}$ 是一个非空有限集合。由 $\beta_0=\min\limits_{x\in L}(f(x^*)-f(x))$ 可知 $\beta_0>0$，对任意的 $\bar{x}\in L$ 和参数 r 满足 $0<r\leqslant\frac{\beta_0}{2}$ 时有 $f(\bar{x})-f(x^*)\leqslant-\beta_0\leqslant-2r<-r$，由假设1中 $f(x)$ 的连续性和 $\bar{x}\in L$ 可知，存在一个邻域 $N(\bar{x},\delta_0)$ 使得对任意的 $x\in N(\bar{x},\delta_0)$ 有 $f(x)-f(x^*)<-r$ 和 $f(x)\geqslant f(\bar{x})$。所以对任意的 $x\in N(\bar{x},\delta_0)$ 时有 $g_{r,q}(f(x)-f(x^*))=0$，$g'_{r,q}(f(x)-f(x^*))=0$，$f_r(f(x)-f(x^*))=f(x)-f(x^*)+r\geqslant f(\bar{x})-f(x^*)+r$，$\nabla f(\bar{x})=0$。

对任意的 $x\in N(\bar{x},\delta_0)$，$0<r\leqslant\frac{\beta_0}{2}$ 有

$$\varphi_{r,q,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+f_r(f(x)-f(x^*))=f(x)-f(x^*)+r\geqslant f(\bar{x})-f(x^*)+r=\varphi_{r,q,x^*}(\bar{x})$$

和 $\nabla\varphi_{r,q,x^*}(\bar{x})=0$。因为 $\bar{x}\in L\subset\operatorname{int}\Omega$，所以对任意的 $\bar{x}\in L$ 是函数 $\varphi_{r,q,x^*}(x)$ 在 Ω 上的一个局部极小点和一个平稳点。而且 $\varphi_{r,q,x^*}(\bar{x})=f(\bar{x})-f(x^*)+r<0<1<\frac{1}{\|x^*-x_0\|}+1=\varphi_{r,q,x^*}(x^*)$ 和对任意的 $x\in\partial\Omega$ 因为有 $f(x)\geqslant f(x^*)+f_0$，所以对任意的 $x\in\partial\Omega$ 有 $\varphi_{r,q,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+f_r(f(x)-f(x^*))=\frac{1}{\|x-x_0\|}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}+1>\frac{1}{\|x-x_0\|}+1>0>f(\bar{x})-f(x^*)+r=\varphi_{r,q,x^*}(\bar{x})$。　证毕

由函数 $\varphi_{r,q,x^*}(x)$ 上面的两个性质和定义1可知，函数 $\varphi_{r,q,x^*}(x)$ 是一个平稳点函数。下面，将利用所给的这个新的平稳点函数提出一种求解无约束全局极小化问题(1)的一种新的全局极小化方法：一种新的平稳点函数法，记作SPFM。

算法SPFM：

步骤1　选取一个小的正数 $\mu>0$ 作为参数 r 的终止值，选取一个较大的正数 $M>0$ 作为参数 q 的终止值，选取一个点 $x_0\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega$，使得对任意的 $x\in\Omega$ 满足 $\|x-x_0\|\geqslant1$，选取一个初始点 $x_0^0\in\Omega$ 使得 x_0^0 满足假设3。

设 r_0 和 q_0 分别为参数 r 和 q 的初始值，令 $k:=0$。

步骤2　从 x_k^0 出发，利用局部极小化的方法，得到极小化问题(1)的一个局部极小点 x_k^*。

步骤3　设 $\varphi_{r,q,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+f_r(f(x)-f(x^*))$，其中 $g_{r,q}(t)$，$f_r(t)$ 分别由(3)式和(4)式给定。用局部极小化方法求解下面的问题(6)。

$$\min_{\text{s.t. }x\in\Omega}\varphi_{r,q,x^*}(x)\tag{6}$$

设 $\bar{x}_{r,q,x_k^*}$ 是极小化问题(6)得到的一个局部极小点，如果 $f(\bar{x}_{r,q,x_k^*})<f(x_k^*)$，设 $x_{k+1}^0:=\bar{x}_{r,q,x_k^*}$，$k:=k+1$，转步骤2；否则进行步骤4。

步骤4　如果 $q<M$，通过设 $q:=10q$ 增加 q，然后转步骤3；否则转步骤5。

步骤5　如果 $r>\mu$，设 $q=q_0$，通过设 $r:=\frac{r}{10}$ 来减小 r，然后转步骤3；否则，停止。并且 x_k^* 是极小化问题(1)的一个近似全局极小点。

注3　通常情况下，假设3的验证并不容易。但是，在许多情况下，不需要验证，因为如果 $f(x)$ 满足强制性条件，取一个较大的箱子集 Ω 即可。

注4　在局部极小化问题(6)时，可以通过从包含点 x_k^* 的 Ω 内任一点出发，而不一定是 x_k^*。可以试图选择很多的初始点来获得满足 $f(\bar{x}_{r,q,x_k^*})<f(x_k^*)$ 的局部极小点 $\bar{x}_{r,q,x_k^*}$。

2 一种新的拟平稳点函数和拟平稳点函数法

平稳点函数法在执行数值试验时搜索过程很容易跑向 Ω 的边界点 d 处停止，所以下面提出一种新的拟平稳点函数来避免这种现象，这种新的拟平稳点函数法在执行数值试验时搜索过程总会在 Ω 的内部进行。

首先给出一种新的拟平稳点函数，然后提出一种相应的求解算法，称之为拟平稳点函数算法(QSPFM)。

对任意的 $r>0$ 和任意给定的 $c>0$，在文献[6]中定义了如下形式的函数

$$h_{r,c}(t)=\begin{cases}t+r, & t\leqslant-r\\ \frac{r-2}{r^3}t^3+\frac{r-3}{r^2}t^2+1, & -r<t\leqslant0\\ 1, & 0<t\leqslant1\\ -\frac{4c-2}{r^3}t^3+\frac{(6c-3)(r+2)}{r^3}t^2-\frac{(6c-3)(2+2r)}{r^3}t+\frac{4c-2+(6c-3)r}{r^3}+1, & 1\leqslant t\leqslant1+r\\ 2c, & t>r+1\end{cases}\tag{7}$$

这里 c 是一个给定的常数且 $c\geqslant1$，函数 $h_{r,c}(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续可微的。

提出如下形式的一种新的拟平稳点函数

$$H_{r,q,c,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+$$

$$h_{r,c}(f(x)-f(x^*))\tag{8}$$

其中 $g_{r,q}(t)$ 由(3)式给定。

下面讨论函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的一些重要的性质。

定理3 如果假设3成立,对任意的参数 $r>0$,x,$x''\in\Omega$ 且 $x,x''\neq x^*$,那么函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 满足下面的条件:

(i)设 $T=\max\limits_{x\in\Omega}\|\nabla f(x)\|$ 和 $q>\dfrac{T}{\sqrt{D}}$,如果 $0\leqslant f(x)-f(x^*)\leqslant 1$ 或 $f(x)-f(x^*)\geqslant 1+r$,则点 x 不是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的平稳点;

(ii)对满足 $1<f(x'')-f(x^*)<1+r$ 的 $f(x)$ 的平稳点 x'' 不是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的平稳点。

证明 由(8)式,有

$$\nabla H_{r,q,c,x^*}(x)=-\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|^3}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+\frac{1}{\|x-x_0\|}g'_{r,q}(f(x)-f(x^*))\nabla f(x)+h'_{r,c}(f(x)-f(x^*))\nabla f(x)$$

如果 $f(x)\geqslant f(x^*)$,那么

$$\nabla H_{r,q,c,x^*}(x)=-\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|^3}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}+\frac{1}{q}\frac{1}{\|x-x_0\|}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}\nabla f(x)+h'_{r,c}(f(x)-f(x^*))\nabla f(x)$$

(i)如果 $0\leqslant f(x)-f(x^*)\leqslant 1$ 或 $f(x)-f(x^*)\geqslant 1+r$,且 $T=\max\limits_{x\in\Omega}\|\nabla f(x)\|$ 和 $q>\dfrac{T}{\sqrt{D}}$,则有

$$\nabla H_{r,q,c,x^*}(x)=-\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|^3}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}+\frac{1}{q}\frac{1}{\|x-x_0\|}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}\nabla f(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}\left(-\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|^2}+\frac{1}{q}\nabla f(x)\right)\neq 0$$

(由定理1(i)的证明可得)。所以,满足上述条件的点 x 不是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的平稳点;

(ii)由 $1<f(x'')-f(x^*)<1+r$ 和 $\nabla f(x'')=0$,有

$$\nabla H_{r,q,c,x^*}(x'')=-\frac{x''-x_0}{\|x''-x_0\|^3}e^{\frac{f(x'')-f(x^*)}{q}}\neq 0$$

所以满足上述条件的 x'' 不是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的平稳点。 证毕

定理4 假设

(i)假设1,2,3成立;

(ii)$L\neq\varphi$,即 x^* 不是极小化问题(1)的一个全局极小点,那么

①当参数 r 满足 $0<r\leqslant\dfrac{\beta_0}{2}$ 时,对任意的 $\bar{x}\in L$ 是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 在 Ω 上的一个局部极小点和一个平稳点。而且有 $H_{r,q,c,x^*}(\bar{x})<H_{r,q,c,x^*}(x^*)$ 和对任意的 $x\in\partial\Omega$,$c\geqslant 1$ 有 $H_{r,q,c,x^*}(\bar{x})<H_{r,q,c,x^*}(x)$。

②对任意的 $r>0$,$q>0$,任意的 x 满足 $f(x)\leqslant f(x^*)-2r$ 时 x 一定都是满足 $H_{r,q,c,x^*}(x)<H_{r,q,c,x^*}(x^*)$ 且对任意的 $y\in\partial\Omega$ 有 $H_{r,q,c,x^*}(x)<H_{r,q,c,x^*}(y)$ 的函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的局部极小点和平稳点。

证明 ①由假设2和 $L\neq\varphi$ 可知,$\{f(x^*)-f(x)\mid x\in L\}$ 是一个非空有限集合。由 $\beta_0=\min\limits_{x\in L}(f(x^*)-f(x))$ 有 $\beta_0>0$,且对任意的 $\bar{x}\in L$ 和 $0<r\leqslant\dfrac{\beta_0}{2}$,有 $f(\bar{x})-f(x^*)\leqslant-\beta_0\leqslant-2r<-r$,由假设1中 $f(x)$ 的连续性且 $\bar{x}\in L$ 可知,存在一个邻域 $N(\bar{x},\delta_0)$ 使得对任意的 $x\in N(\bar{x},\delta_0)$ 有 $f(x)-f(x^*)<-r$ 和 $f(x)\geqslant f(\bar{x})$,所以对任意的 $x\in N(\bar{x},\delta_0)$ 时有 $g_{r,q}(f(x)-f(x^*))=0$,$g'_{r,q}(f(x)-f(x^*))=0$,$h_{r,c}(f(x)-f(x^*))=f(x)-f(x^*)+r\geqslant f(\bar{x})-f(x^*)+r$,$\nabla f(\bar{x})=0$。因此对任意的 $x\in N(\bar{x},\delta_0)$,有

$$H_{r,q,c,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+h_{r,c}(f(x)-f(x^*))=f(x)-f(x^*)+r\geqslant f(\bar{x})-f(x^*)+r=H_{r,q,c,x^*}(\bar{x})$$

和 $\nabla H_{r,q,c,x^*}(\bar{x})=0$。又因为 $\bar{x}\in L\subset\operatorname{int}\Omega$,所以当 $0<r\leqslant\dfrac{\beta_0}{2}$ 时,对任意 $\bar{x}\in L$ 是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 在 Ω 上的一个局部极小点和一个平稳点。而且

$$H_{r,q,c,x^*}(\bar{x})=\frac{1}{\|\bar{x}-x_0\|}g_{r,q}(f(\bar{x})-f(x^*))+h_{r,c}(f(\bar{x})-f(x^*))=f(\bar{x})-f(x^*)+r<0<1<\frac{1}{\|x^*-x_0\|}+1=H_{r,q,c,x^*}(x^*)$$

和对任意的 $x\in\partial\Omega$,由假设3有 $f(x)\geqslant f(x^*)+f_0$,所以对任意的 $x\in\partial\Omega$,$c\geqslant 1$ 有

$$H_{r,q,c,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+h_{r,c}(f(x)-f(x^*))\geqslant\frac{1}{\|x-x_0\|}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}+1>\frac{1}{\|x-x_0\|}+1>0>f(\bar{x})-f(x^*)+r=H_{r,q,c,x^*}(\bar{x})$$

② 类似①可以得到证明。 证毕

定理5 设假设3成立,$\bar{x}$ 是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 在 Ω 上从点 x^* 出发极小化得到的一个局部极小点,那么对任意的 $r+1\leqslant f_0$ 和 $c\geqslant 1$,有 $\bar{x}\in\operatorname{int}\Omega$,并且 $\bar{x}$ 是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的一个平稳点。其中 f_0 是由假设3确定的。

证明 对任意的 $x\in\partial\Omega$ 和 $r+1\leqslant f_0$ 有 $f(x)\geqslant f(x^*)+f_0\geqslant f(x^*)+r+1$,即有 $f(x)-f(x^*)\geqslant r+1$。因此对任意的 $x\in\partial\Omega$ 和 $r+1\leqslant f_0$ 有

$$H_{r,q,c,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+$$

$$h_{r,c}(f(x)-f(x^*))=\frac{1}{\|x-x_0\|}e^{\frac{f(x)-f(x^*)}{q}}+2c>$$

$$\frac{1}{\|x-x_0\|}+2c>2c$$

$$H_{r,q,c,x^*}(x^*)=\frac{1}{\|x^*-x_0\|}g_{r,q}(f(x^*)-f(x^*))+$$

$$h_{r,c}(f(x^*)-f(x^*))=\frac{1}{\|x^*-x_0\|}+1\leqslant 1+1=2$$

因为 $c\geqslant 1$,所以 $H_{r,q,c,x^*}(x)>H_{r,q,c,x^*}(x^*)$。又因为 $H_{r,q,c,x^*}(x^*)\geqslant H_{r,q,c,x^*}(\bar{x})$,所以对任意的 $r+1\leq f_0$ 和 $c\geqslant 1$ 时有 $H_{r,q,c,x^*}(x)>H_{r,q,c,x^*}(\bar{x})$,故 $\bar{x}\in \mathrm{int}\,\Omega$。又因为 $\bar{x}$ 是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的局部极小点,所以 $\bar{x}$ 是函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的一个平稳点。　　证毕

由函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 的以上 3 个性质和定义 2 可知,函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 具有定义 2 几乎所有好的性质,所以称函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 是一个新的拟平稳点函数。下面,将利用所给的这个新的拟平稳点函数提出一种求解无约束全局极小化问题(1)的一种新的全局极小化方法:一种新的拟平稳点函数法,记作 QSPFM。

算法 QSPFM:

步骤 1　选取一个小的正数 $\mu>0$ 作为参数 r 的终止值,选取一个较大的正数 $M>0$ 作为参数 q 的终止值,选取一个点 $x_0\in \mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 使得对任意的 $x\in\Omega$ 满足 $\|x-x_0\|\geqslant 1$,选取一个初始点 $x_0^0\in\Omega$ 使得 x_0^0 满足假设 3。设 r_0,q_0 分别为参数 r,q 的初始值,令 $k:=0$。

步骤 2　从 x_k^0 出发,利用局部极小化的方法,得到极小化问题(1)的一个局部极小点 x_k^*。

步骤 3　设 $H_{r,q,c,x^*}(x)=\frac{1}{\|x-x_0\|}\times g_{r,q}(f(x)-f(x^*))+h_{r,c}(f(x)-f(x^*))$,其中 $g_{r,q}(t)$,$h_{r,c}(t)$ 分别由(3)式和(7)式给定。用局部极小化方法求解下面的问题(9)

$$\min_{\text{s.t. }x\in\Omega}H_{r,q,c,x^*}(x) \tag{9}$$

设 $\bar{x}_{r,q,c,x_k^*}$ 是极小化问题(9)得到的一个局部极小点,如果 $f(\bar{x}_{r,q,c,x_k^*})<f(x_k^*)$,设 $x_{k+1}^0:=\bar{x}_{r,q,c,x_k^*}$,$k:=k+1$,转步骤 2;否则进行步骤 4。

步骤 4　如果 $q<M$,通过设 $q:=10q$ 增加 q,然后转步骤 3;否则转步骤 5。

步骤 5　如果 $r>\mu$,设 $q=q_0$,通过设 $r:=\frac{r}{10}$ 来减小 r,然后转步骤 3;否则,停止。并且 x_k^* 是极小化问题(1)的一个近似全局极小点。

3 数值计算

应用算法 SPFM 和算法 QSPFM 来求解一些著名的检验函数的全局极小点。在后面的算例中,在算法 SPFM 步骤 1 中,取 $\mu=10^{-10}$,$M=10^{10}$,$r_0=1$,$q_0=100$;在算法 QSPFM 步骤 1 中,取 $\mu=10^{-10}$,$M=10^{10}$,$r_0=1$,$q_0=100$,$c=1$。

例 1　Goldstein-Price (G−P)($n=2$)[1]

$$\min_{x,y}f_G(x,y)=[1+(x+y+1)^2(19-14x+3x^2-14y+6xy+3y^2)]\times[30+(2x-3y)^2(18-32x+12x^2+48y-36xy+27y^2)]$$

容易验证函数 $f_G(x,y)$ 是强制的,在本例中取 $\Omega=\{(x,y)\mid -3\leqslant x\leqslant 3,-3\leqslant y\leqslant 3\}$,并且取 $x_0=(4,4)$,$x_0^0=(1,1)$。通过算法 SPFM 和算法 QSPFM 解出的全局极小点是 $x^*=(-0.000\,0,-1.000\,0)$,全局极小值为 $f(x^*)=3.000\,0$,迭代次数都是两次。

例 2　Six-Hump Camel-back ($n=2$)[8]

$$\min f_s(x)=4x_1^2-2.1x_1^4+x_1^6/3-x_1x_2-4x_2^2+4x_2^4$$

在本例中取 $\Omega=\{(x_1,x_2)\mid -3\leqslant x_1\leqslant 3,-3\leqslant x_2\leqslant 3\}$,并且取 $x_0=(4,4)$,$x_0^0=(0,0)$。应用算法 SPFM 解出的全局极小点是 $x^*=(0.089\,8,0.712\,7)$,并且全局极小值为 $f(x^*)=-1.031\,6$。应用算法 QSPFM 解出的全局极小点也是 $x^*=(0.089\,8,0.712\,7)$,并且全局极小值为 $f(x^*)=-1.031\,6$。它们的迭代次数都是两次,只是在第一次极小化函数 $H_{r,q,c,x^*}(x)$ 时得到的局部极小点和局部极小值不同。

4 结论

在本文中详细地介绍了对无约束全局最优化的一种新的平稳点函数法和拟平稳点函数法,这种方法只需要调用局部搜索方法就能求得全局最优解,这是由于作者提出的平稳点函数和拟平稳点函数具有非常好的性质。在提出的这两种算法中应用了 Matlab7.11 最优化工具箱的最优化子程序,从计算的结果看,这种新的平稳点函数法和拟平稳点函数法是非常有效的。

参考文献:

[1] Dixon L C W, Szego G P. Twards global optimization [Z]. North-Holland: Amsterdam, 1978.

[2] 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社,1997.
Yuan Y X, Sun W Y. Optimization theory and method [M]. Beijing: Science Press, 1997.

[3] Ge R P. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables [J]. Math Program, 1990, 46: 191-204.

[4] 吴至友. 全局最优化的几种确定性算法[M]. 上海:上海大学出版社,2003.
Wu Z Y. Several deterministic algorithms for global optimization[M]. Shanghai: Shanghai University Press, 2003.

[5] Zhang L S, Ng C K, Li D, et al. A new filled function method

for global optimization [J]. Journal of Global Optimization, 2004, 28: 17-43.

[6] Wu Z Y, Lee H W J, Zhang L S, et al. A novel filled function method and quasi-filled function method for global optimization [J]. Computational Optimization and Applications, 2005, 34: 249-272.

[7] Wu Z Y, Li D, Zhang L S. Global descent methods for unconstrained global optimization [J]. Journal of Global Optimization, 2011, 50: 379-396.

[8] Branin F H. Widely convergent methods for finding multiple solution of simultaneous nonlinear equations [J]. IBM J Res Dev, 1972, 16: 504-522.

Operations Research and Cybernetics

A Novel Auxiliary Function Method for Unconstrained Global Optimization

WU Zhi-you, LIU Cheng-jun

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, we present novel stationary point of function method and quasi stationary point of function method for unconstrained global optimization problems to attain the global optimality by implement a series of local minimization. More concretely, the solution process consists of a two-phase cycle of local minimization: the first phase execute local search of the original objective function. The second stage proposed implementation of this new stationary point of function or quasi stationary point of function minimization, while making the original objective function decreased. Finally, some numerical examples are checked by using Matlab7. 11 which illustrate that the new stationary point of function method and quasi stationary point of function method are efficient.

Key words: global optimization; assistant function; local minimization; stationary point of function method; quasi stationary point of function method

（责任编辑　游中胜）

外刊摘要转载

Global Optimality Conditions and Optimization Methods for Quadratic Assignment Problems

WU Zhi-you[1], YANG Yong-jian[2], BAI Fu-sheng[1], TIAN Jing[1]

(1. School of Information Technology and Mathematical Sciences, University of Ballarat, Ballarat 3353, Australia;
2. Dept. of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: In this paper some global optimality conditions for general quadratic {0, 1} programming problems with linear equality constraints are discussed and then some global optimality conditions for quadratic assignment problems (QAP) are presented. A local optimization method for (QAP) is derived according to the necessary global optimality conditions. A global optimization method for (QAP) is presented by combining the sufficient global optimality conditions, the local optimization method and some auxiliary functions. Some numerical examples are given to illustrate the efficiency of the given optimization methods.

Key words: quadratic assignment program; global optimality condition; local optimization method; global optimization method; auxiliary function

（转载于 Applied Mathematics and Computation, 2012 年 218 卷）