

# 基于直接免疫的 SEIR 计算机病毒传播模型\*

彭梅<sup>1,2</sup>, 李传东<sup>2</sup>, 何兴<sup>2</sup>

(1. 长江师范学院 数学与计算机学院, 重庆 408100; 2. 重庆大学 计算机学院, 重庆 400030)

**摘要:** 对计算机病毒传播特性的研究可以为控制计算机病毒的传播提供理论依据。本文根据计算机病毒具有潜伏性的特点, 提出了一类带有直接免疫的 SEIR 计算机病毒传播模型, 利用微分方程理论分析了传播阈值  $R_0$  的取值是影响网络中病毒能否被控制的关键, 说明了提高直接免疫率可以有效控制  $R_0$ , 从而进一步控制计算机病毒在网络中的传播; 分析了计算机病毒在网络传播过程中无病平衡点和地方病平衡点的稳定性: 1) 当  $R_0 \leq 1$  时, 无病平衡点  $P_0$  局部渐近稳定, 且全局渐近稳定; 在当  $R_0 > 1$  时, 无病平衡点  $P_0$  不稳定; 2) 当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点  $P^*$  全局稳定; 最后通过模型仿真验证了 1) 和 2) 结论的正确性。

**关键词:** 计算机病毒; 动力学模型; 平衡点; 传播阈值

中图分类号: O223

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2013)01-0077-04

计算机病毒类似于生物病毒, 它具有自我复制并传播给其他宿主的功能, 具有极大的破坏性, 计算机一旦被感染, 就会带来巨大损失, 如某些强大的病毒会在运行后直接格式化数据, 甚至可以破坏引导扇区和 BIOS, 对硬件环境造成极大的破坏。而互联网产业的普及给病毒传播带来了有效的媒介。目前对计算机病毒研究的模型分为微观模型和宏观模型: 微观模型是从病毒代码本身着手来建立能识别病毒的模型<sup>[1]</sup>, 其目的用于反病毒软件的研发; 宏观模型是借鉴生物传染病的仓室模型<sup>[2]</sup>, 建立计算机病毒传播的仓室模型, 研究各仓室病毒的数量随时间演化的规律, 目的是预测病毒演化趋势, 从而找到能有效控制病毒在网络上传播的方法<sup>[3]</sup>。本文建立一个 SEIR 模型, 从宏观的角度对计算机病毒的传播进行研究。

目前国内外有大量的文献对计算机病毒在网络上的传播作出了研究<sup>[4-8]</sup>, 如 Ren 等人建立了一个具有饱和传染率的 SIR 模型<sup>[4]</sup>; Misha 等人提出了一个具有垂直传播的计算机蠕虫传播的 SEIRS 模型<sup>[5]</sup>; HAN 等人引入时滞来反映病毒传播的潜伏期建立了一个 SIRS 模型<sup>[6]</sup>; 冯丽萍等建立了一个基于直接免疫的计算机传播的模型<sup>[7]</sup>; 巩永旺等建立了电子邮件病毒的元胞自动机建模与分析<sup>[8]</sup>。本文主要用一个仓室来描述计算机病毒在传播过程中的潜伏性, 并且根据计算机病毒会在进入网络和处于潜伏的状态下, 可能会被防毒软件所查杀, 建立了一个基于直接免疫条件下的 SEIR 模型, 该模型的传染机制如图 1 所示。

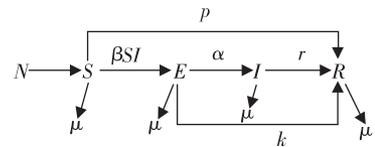


图 1 SEIR 模型传染机制

## 1 SEIR 模型

根据仓室模型建模的思想, 把  $t$  时刻的总节点数  $N(t)$  分为易感节点、潜伏节点、感染节点和免疫点 4 部分: 以  $S(t)$  表示  $t$  时刻易感节点数, 假设新进入节点均为易感节点;  $E(t)$  表示  $t$  时刻虽已沾染病毒, 但未被触发并不具备传染性的节点数;  $I(t)$  表示  $t$  时刻染毒且已爆发并具有传染性的节点数;  $R(t)$  表示  $t$  时刻通过防毒软件或重装系统获得免疫的节点数。假设节点一旦进入  $R$  状态, 便不会再被传染。以  $\beta$  表示传染率系数, 这里采用双线性传染率, 则单位时间内新增的染毒节点(潜伏状态)数为  $\beta SI$ ;  $p$ 、 $k$  分别表示易感节点通过安装防毒软件进入免疫状态和潜伏节点通过防毒软件清除病毒进入免疫状态的概率;  $\alpha$  表示处于潜伏状态的节点未成功查杀病毒并被触发进入感染状态的概率;  $\gamma$  表示通过杀毒软件清除病毒或重装系统进入免疫状态的概率;  $\mu$  表示节点因某些原因离开网络的概率。其中  $0 \leq \beta, \alpha, p, k, \mu \leq 1$ 。

由上述假设, 建立如下具有直接免疫的潜伏计算机病毒传播动力学模型

\* 收稿日期 2012-05-11 网络出版时间 2013-01-18 15:05

资助项目: 国家自然科学基金(No. 60974020)

作者简介: 彭梅, 讲师, 硕士, 研究方向为计算机病毒模型, E-mail: pmgs@qq.com; 通讯作者: 李传东, E-mail: zhuandong.li@qatar.tamu.edu

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130118.1505.201301.77\_016.html

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-p)N - \beta SI - (p+\mu)S \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\alpha+k+\mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - (\gamma+\mu)I \\ \frac{dR}{dt} = pn + kE + \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \quad (2)$$

由于系统(1)中的前3个方程不含 $R$ ,因此只考虑

$$\text{如下模型} \begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-p)N - \beta SI - (p+\mu)S \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\alpha+k+\mu)E \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - (\gamma+\mu)I \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{令} (\gamma+\mu) = a(\alpha+k+\mu) = b(p+\mu) = c, (1-p)N$$

$$= A, \text{则系统(3)可改为} \begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - cS \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI - bE \\ \frac{dI}{dt} = \alpha E - aI \end{cases} \quad (4)$$

$N$ 和 $R$ 能从方程(2)中及 $R = N - S - E - I$ 获得,故系统(4)的可行域为

$$D = \left\{ (S, E, I) \in \mathbb{R}_+^3 \mid S \geq 0, \right. \\ \left. E \geq 0, I \geq 0, S + E + I \leq \frac{A}{c} \right\}$$

且区域 $D$ 是系统(4)的正向不变集。

## 2 稳定性分析

### 2.1 平衡点分析

$$\text{令} \frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0, \text{得到系统(4)的平衡点。}$$

当 $I=0$ 时,此时系统(4)处于无病状态,得到无病

$$\text{平衡点 } P_0 = (S_0, E_0, I_0) = \left( \frac{A}{c}, 0, 0 \right).$$

当 $I>0$ 时,得到系统(4)的地方病平衡点

$$P^* = (S^*, E^*, I^*) = \left( \frac{ab}{\beta\alpha}, \frac{a}{\alpha} I^*, I^* \right)$$

这里 $I^* = \frac{\beta\alpha A - abc}{\beta ab}$ ,定义系统的基本再生数为 $R_0 =$

$\frac{\beta\alpha A}{abc}$ 则平衡点 $P_0$ 和 $P^*$ 也可分别记为

$$P_0 = \left( \frac{R_0}{ab}, 0, 0 \right), P^* = \left( \frac{ab}{\beta\alpha}, \frac{a(R_0-1)}{\alpha\beta}, \frac{a(R_0-1)}{\beta} \right)$$

显然,当 $R_0 \leq 1$ 时,系统(4)只有一个平衡点 $P_0$ ;当 $R_0 > 1$ 时,系统(4)有边界平衡点 $P_0$ 和正平衡点 $P^*$ 。

### 2.2 平衡点的局部稳定性分析

定理1 当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点 $P_0$ 是局部渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点 $P_0$ 不稳定。

证明 方程组(4)在 $P_0$ 点的Jacobi矩阵为

$$J_0 = \begin{pmatrix} -c & 0 & -\frac{ab}{\alpha}R_0 \\ 0 & -b & \frac{ab}{\alpha}R_0 \\ 0 & \alpha & -a \end{pmatrix}$$

其所对应的特征方程为

$$f(\lambda) = (\lambda + c) [\lambda^2 + (a+b)\lambda - ab(R_0 - 1)] = 0$$

显然有

$$\lambda_1 = -c < 0, \lambda_{2,3} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4ab(R_0 - 1)}}{2}$$

当 $R_0 \leq 1$ 时, $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ;当 $R_0 > 1$ 时,

$$\lambda_2 = \frac{-(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + 4ab(R_0 - 1)}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 = \frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 4ab(R_0 - 1)}}{2} > 0$$

因此,当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点 $P_0$ 是稳定的,且是局部渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点 $P_0$ 不稳定。定理得证。证毕

定理2 当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点 $P^*$ 局部渐近稳定,平衡点 $P^*$ 的Jacobi矩阵为

$$J^* = \begin{pmatrix} -\beta I^* - c & 0 & -\frac{ab}{\alpha} \\ \beta I^* & -b & \frac{ab}{\alpha} \\ 0 & \alpha & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cR_0 & 0 & -\frac{ab}{\alpha} \\ cR_0 - c & -b & \frac{ab}{\alpha} \\ 0 & \alpha & -a \end{pmatrix}$$

其所对应的特征方程为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3 = 0$$

这里 $m_1 = a + b + cR_0, m_2 = (a+b)cR_0, m_3 = abc(R_0 - 1)$ 。显然, $m_1 > 0, m_2 > 0, m_3 > 0$ 。因此 $\Delta_1 = m_1 > 0,$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m_1 & 1 \\ m_3 & m_2 \end{vmatrix} = m_1 m_2 - m_3 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} m_1 & 1 & 0 \\ m_3 & m_2 & m_1 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix} =$$

$$m_1(m_1 m_2 - m_3) > 0.$$

由Hurwitz判据可得特征方程 $f(\lambda) = 0$ 的根的实部均为负,因此系统(4)在平衡点 $P^*$ 是局部渐近稳定的。定理得证。证毕

### 2.3 全局稳定分析

定理3 当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点 $P_0$ 是全局渐近稳定的。

证明 构造Liapunov函数 $L = \alpha E + bI$ ,显然 $L > 0$ , $L$ 沿系统(4)的导数为

$$L' = \alpha E'(t) + bI'(t) = \alpha(\beta SI - bE) + b(\alpha E - aI) = (\alpha\beta S - ab)I =$$

$$\alpha\beta \left( S - \frac{A}{c} \cdot \frac{1}{R_0} \right) \leq \alpha\beta \frac{A}{c} \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) < 0$$

定理得证。 证毕

定理 4 当  $R_0 > 1$  时, 系统 (4) 是全局稳渐近定的。

证明 这里采用 Li 等人所著的论文中提到的高维系统全局渐近稳定的几何方法<sup>[9]</sup>来证明系统 (4) 的全局稳定性。

显然系统 (4) 满足  $D$  是单连通的, 并存在一个紧的吸引集  $K \subset D$ , 并且当  $R_0 > 1$  时, 系统存在一个不稳定的边界平衡点  $P_0$ ,  $D$  内仅存在唯一的正平衡点  $P^*$ , 且  $P^*$  局部渐近稳定, 下面仅需证明  $q < 0$  即可。

系统 (4) 在  $P^*$  处的 Jacobi 矩阵为  $J^*$ ,  $J^*$  第二加复合矩阵为

$$J^{(2)} = \begin{pmatrix} -\beta I^* - c - b & \frac{ab}{\alpha} & \frac{ab}{\alpha} \\ \alpha & -\beta I^* - a - c & 0 \\ 0 & \beta I^* & -a - b \end{pmatrix}$$

选取  $P(x) = \text{diag} \left( 1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I} \right)$  则

$$P_f P^{-1} = \text{diag} \left( 0, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} \right)$$

矩阵  $B = P_f P^{-1} + P J^{(2)} P^{-1}$  可写成

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

其中  $B_{11} = -\beta I^* - c - b$ ,  $B_{12} = \frac{abI}{\alpha E} (1, 1)$

$$B_{21} = \frac{E}{I} (\alpha, 0)^T$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \beta I^* - a - c & 0 \\ \beta I^* & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \beta I^* - a - b \end{bmatrix}$$

令  $(u, v, w)$  代表  $R^3 \cong R^{(3)}$  的向量, 其范数  $\| \cdot \|$  定义为  $\| (u, v, w) \| = \max \{ |u|, |v| + |w| \}$ , 相应于范数的 Lozinskiĭ 测度是  $\mu(B)$ , 利用估值法<sup>[10-11]</sup>得

其中

$$g_1 = \mu(B_{11}) + |B_{12}|, \quad g_2 = |B_{21}| + \mu(B_{22}) \quad (5)$$

$$|B_{12}| = \frac{abI}{\alpha E} \quad (6)$$

$$|B_{21}| = \frac{E}{I} \alpha \quad (7)$$

$$\mu(B_{11}) = -\beta I^* - b - c \quad (8)$$

$$\mu(B_{22}) = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - a - c \quad (9)$$

由方程组 (4) 的第二、三式得

$$\frac{E'}{E} = \frac{\beta SI}{E} - b, \quad \frac{I'}{I} = \frac{\alpha E}{I} \quad (10)$$

将 (6)~(10) 式分别代入 (5) 式得

$$g_1 = \frac{E'}{E} - c - \beta I^*, \quad g_2 = \frac{E'}{E} - c$$

利用  $\mu(B) \leq \sup \{g_1, g_2\}$  得  $\mu(B) \leq \frac{E'}{E} - c$

从而有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) d\tau \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left( \frac{E'}{E} - c \right) d\tau = \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(0)} - c$$

由于系统一致生存, 故存在  $c_1 > 0$  和  $T > 0$ , 使得  $0 < c_1 \leq E(t) < \frac{A}{c}$ , 于是有

$$q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) d\tau \leq -\frac{c}{2} < 0$$

因此结论成立, 定理得证。

证毕

### 3 模型仿真

为了验证对理论分析的正确性, 观察  $R_0 \leq 1$  和  $R_0 > 1$  时, 病毒在网络中的流行的不同情况, 下面介绍数值模拟的实验过程及结果:

1) 取  $\alpha = 0.005$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\mu = 0.0001$ ,  $p = 0.5$ ,  $k = 0.5$ ,  $r = 0.01$ ,  $N = 10$ , 此时  $R_0 = 0.098 \leq 1$ , 得到模拟图如图 2 所示。

2) 取  $\alpha = 0.05$ ,  $b = 0.05$ ,  $\mu = 0.0001$ ,  $p = 0.1$ ,  $k = 0.1$ ,  $r = 0.01$ ,  $N = 10$ , 此时  $R_0 = 148.27 > 1$ , 得到模拟图如图 3 所示。

3) 取  $\alpha = 0.05$ ,  $b = 0.05$ ,  $\mu = 0.0001$ ,  $p = 0.5$ ,  $k = 0.5$ ,  $r = 0.01$ ,  $N = 10$ , 此时  $R_0 = 4.4987 > 1$ , 得到模拟图(图 4)。

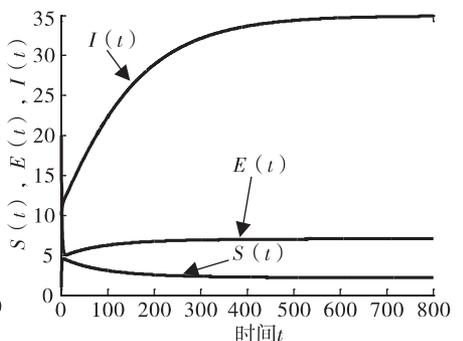
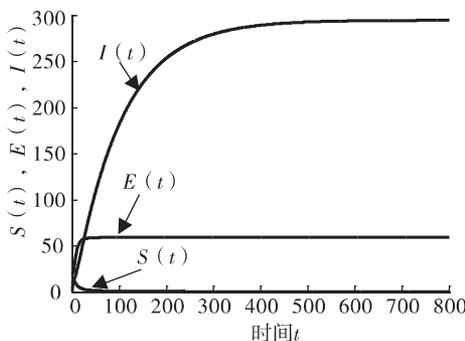
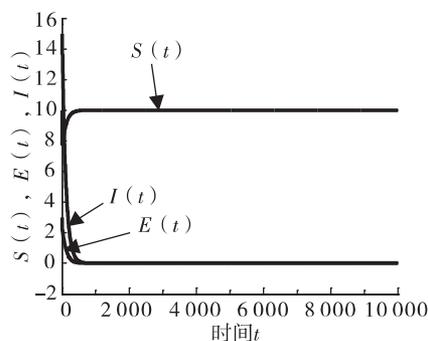


图2 无病平衡点示意图 图3  $p=0.1$   $k=0.1$  时地方病平衡点示意图 图4  $p=0.5$   $h=0.5$  时地方病平衡点示意图

图2表明,当 $R_0 \leq 1$ 时,网络中的病毒数会得到有效控制;图3,图4表明,当 $R_0 > 1$ 时,网络中的病毒不会被灭绝;图3和图4在参数 $p$   $k$ 变化时,网络中的病毒数也会随着参数的增大而下降,主动防御和查杀病毒对网络中病毒的控制起到了重要作用;同时,通过图2~4也可以看出,网络中的病毒数依赖于阈值 $R_0$ ,当网络中病毒处于平衡时, $R_0$ 越大则处于潜伏状态和染病状态的节点数就越多。

## 4 结束语

本文建立了一个基于主动免疫的SEIR计算机病毒模型,该模型考虑了计算机病毒的潜伏性,并在节点进入网络和处于潜伏状态下提出了预先免疫的措施;分析了模型的动力学行为,发现模型中病毒的传播主要依赖于病毒传播的阈值 $R_0$ ,为了减小病毒在网络中的传播,应该尽力减小 $R_0$ 的值,有效办法就是提高预先免疫力,即加大参数 $p$   $k$ 的值。在现实中可以做到这点。

## 参考文献:

- [1] 马洪江,王建忠,张萍. 基于免疫机制的蠕虫检测防御系统[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2005, 23(3): 1-4.  
Ma H J, Wang J Z, Zhang P. Worm detection and prevention system base on immunity[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science Edition, 2005, 23(3): 1-4.
- [2] 马知恩,周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.  
Ma Z E, Zhou Y C. The mathematical model and research of epidemic dynamics[M]. Beijing: Science Press, 2004.
- [3] 张宁,张丹荣,杨建民. 有限资源下网络病毒的阻断策略[J]. 上海理工大学学报:自然科学版, 2007, 29(3): 250-254.  
Zhang N, Zhang D R, Yang J M. Virus propagation and halting strategy of network under the limited resources condition[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology: Natural Science Edition, 2007, 29(3): 250-254.
- [4] Ren J, Yang X, Zhu Q, et al. A novel computer virus model and its dynamics[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13: 376-384.
- [5] Misha B K, Pandey S K. Dynamic model of worms with vertical transmission in computer network[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217: 8438-8446.
- [6] Han X, Tan Q L. Dynamical behavior of computer virus on Internet[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217: 2520-2526.
- [7] 冯丽萍,王鸿斌,冯素琴. 改进的SIR计算机病毒传播模型[J]. 计算机应用, 2011, 31(7): 1891-1893.  
Feng L P, Wang H B, Feng S Q. Improved SIR model of computer virus propagation in the network[J]. Journal of Computer Applications, 2011, 31(7): 1891-1893.
- [8] 巩永旺,宋玉荣,蒋国平. 电子邮件病毒传播的元胞自动机建模与分析[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(10): 3793-3796.  
Gong Y W, Song Y R, Jiang G P. Cellular automata modeling and analysis of E-mail virus propagation[J]. Application Research of Computers, 2011, 28(10): 3793-3796.
- [9] Li M Y, Muldowney J S. A geometric approach to the global stability problems[J]. SIAM J Math Anal, 1996, 27(4): 1070-1083.
- [10] Martin J R H. Logarithmic norms and projections applied to linear differential system[J]. J Math Anal Appl, 1974, (45): 432-454.
- [11] 赵君平. 一类具有一般非线性隔离函数及潜伏年龄SEIRS传染病模型稳定性分析[J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 2011, 35(5): 464-470.  
Zhao J P. The stability analysis for a SEIRS epidemic model with general screening function and latent-age dependence[J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science Edition, 2011, 35(5): 464-470.

## SEIR Computer Virus Propagation Model Based on Direct Immunization

PENG Mei<sup>1,2</sup>, LI Chuan-dong<sup>2</sup>, HE Xing<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics & Computer Science, Yangtze Normal University, Chongqing 408100;

2. College of Computer, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** The research on the features of computer virus can provide the theory basis for controlling the computer viruses. According to the latent features of computer virus, a SEIR computer virus propagation model is put forward based on direct immunization. Using the theory of differential equation, it indicates that the value of threshold  $R_0$  play a role in the spreading of computer virus. Through improving immunization rates,  $R_0$  can be controlled effectively, and further control the spreading of computer virus. Though qualitative analysis proved that: 1) The virus-free equilibrium  $P_0$  is locally asymptotically stable if  $R_0 < 1$ , whereas is unstable if  $R_0 > 1$  and 2) the viral equilibrium  $P^*$  is locally asymptotically stable if  $R_0 > 1$ . Numerical simulations are given to support results of 1) and 2).

**Key words:** computer virus; dynamical model; equilibrium point; propagation threshold

(责任编辑 游中胜)