运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130201

强 G-半预不变凸函数及其性质*

彭再云[1]，孔祥茜[1,2]
(1. 重庆交通大学 理学院，重庆 400074；2. 吉林大学 管理学院，长春 130022)

摘要：讨论了一类新的广义凸函数—强 G-半预不变凸函数，它是一类重要的广义凸性函数，是强预不变凸函数与强 G-预不变凸函数的真推广。首先，举例证明了强 G-半预不变凸函数的存在性；然后给出了强 G-半预不变凸函数的几个重要性质，获得强 G-半预不变凸函数 f 与其水平集 $S_\alpha=\{x\in X:f(x)\leqslant\alpha\}$、上图 $E_f=\{(x,\alpha):x\in X,\alpha\in\mathbf{R},f(x)\leqslant\alpha\}$的关系，还得到了强 G-半预不变凸函数的判定；最后，得到了强 G-半预不变凸函数在非线性规划问题中的一个应用：对于一类不等式约束优化问题(P)，令 $y\in D$ 是问题(P)的最优解，f 是在 D 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数，约束函数 $g_i,i\in J$ 是 D 上关于同一函数 η 的强 G_i-半预不变凸函数，则 y 是问题(P)的唯一的最优解。并举例验证了结论的正确性。

关键词：半连通集；非线性规划；G-半预不变凸函数；强 G-半预不变凸函数
中图分类号：O221.1　　文献标志码：A　　文章编号：1672-6693(2013)02-0001-06

凸性和广义凸性在数学、经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色；有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一。在 1981 年，Hanson 和 Craven 提出了一类广义凸函数——不变凸函数，并且 Craven 利用它们建立了分式规划的对偶原理；1988 年，Weir 和 Mond 在文献[1]中提出一类广义凸函数—预不变凸函数，它是不变凸函数的推广形式；1992 年，Yang 和 Chen 在文献[2]中提出了半预不变凸函数的概念；在 2005 年，颜丽佳和刘芙萍在文献[3]又提出了一类特殊的预不变凸函数—强预不变凸函数，讨论了它与强不变凸函数之间的关系，另外还给出了它的一些基本性质和等价命题；2007 年，T. Antczak 在文献[4]中提出一类广义凸函数—G-预不变凸函数，它是预不变凸函数的推广，并给出了 G-预不变凸函数的一些基本性质和判定方法；最近，Peng 等在文献[5-6]中对相应广义凸函数进行了进一步推广，分别得到 G-半预不变凸函数和强 G-预不变凸函数这两类新的函数，用实例说明了它们的存在性，获得了一些较好的性质，并对其在非线性规划问题中的应用进行了探索。

在文献[2-3,5-6]的启发下，本文提出了一类新的广义凸函数——强 G-半预不变凸函数，它是强预不变凸函数与强 G-预不变凸函数的真推广。首先，用例子证明了强 G-半预不变凸函数的存在性；然后给出了强 G-半预不变凸函数的 4 个基本性质；同时还给出了强 G-半预不变凸函数的判定；最后，给出了强 G-半预不变凸函数在非线性规划问题中的一个应用，并举例进一步验证了结论的正确性。

1 基本概念与举例

为了后面讨论的需要，先给出如下的定义。

定义 1[1]　如果存在一个向量函数 $\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$，使得 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1],y+\lambda\eta(x,y)\in X$ 成立，则称集合 X 是不变凸集。

定义 2[2]　如果对于 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$，使得存在 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$，满足 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in X$，则称 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是半连通集。

定义 3[5]　令 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半连通集，则称 $f:X\to\mathbf{R}$ 是在 y 上关于 η 的(严格) G-半预不变凸函数，当且仅当存在一个连续的实值增函数 $G:I_f(X)\to\mathbf{R}$ 和一个向量映射 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$，使得对于所有 $x\in X(x\neq y),\lambda\in[0,1](\lambda\in(0,1))$，满足 $\lim_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$，且有 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y)))(<)$。

定义 4[6]　设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，函数 $f:X\to\mathbf{R}$，如果存在连续递增函数 $G:I_f$

* 收稿日期：2012-06-05　修回日期：2012-08-28　网络出版时间：2013-03-16 13:37
资助项目：国家自然科学基金(No. 11271389)；国家青年基金(No. 11201509)；重庆市自然科学基金(No. CSTC2012jjA00016；No. CSTC2011AC6104)；重庆市教委资助项目(No. KJ120401)
作者简介：彭再云，男，副教授，博士研究生，研究方向为最优化理论与应用，E-mail：pengzaiyun@126.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130316.1337.201302.1_001.html

$(K)\to\mathbf{R}$ 和一个常数 $\beta>0$，使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，满足

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

则称函数 f 是 K 上关于 η 的强 G-预不变凸函数。

下面给出强 G-半预不变凸函数的概念。

定义5 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半连通集，函数 $f:X\to\mathbf{R}$，如果存在连续递增函数 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$ 和一个常数 $\beta>0$，使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$ 有 $\lim_{\lambda\to 0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$，且满足 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2]$，则称函数 f 是 K 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数。

注1 强 G-半预不变凸函数是大量存在的，下面给出例1说明其存在性。

例1 令 $K=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$，$f(x)=\sin(|x|+1)^2$，$G(t)=\arcsin t$，$t\in[-1,1]$，$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\lambda x-y, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x-y, & x<0,y\leqslant 0\\ -\lambda x-y, & x\geqslant 0,y<0\\ -x-y, & x\leqslant 0,y>0\end{cases}$，则存在 $\beta=1$ 使得 f 是关于 η 的强 G-半预不变凸函数。

分析 不难验证，对于 $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in[0,1]$，当 $\beta=1$ 时有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2]$$

由强 G-半预不变凸函数的定义，显然 f 是在 K 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数。

2 强 G-半预不变凸函数的性质

本节先介绍强 G-半预不变凸函数的几个基本性质。

说明 若一个实值函数 G 满足 $G(x+y)=G(x)+G(y)$，x,y 在该函数的定义域中，则称函数 G 满足可加性；若一个实值函数 G 满足 $G(kx)=kG(x)$，$k>0$，x 在该函数的定义域中，则称函数 G 满足正齐次性。

定理1 1）令 K 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，$f,g:K\to\mathbf{R}$ 是关于同一 η 和 G 的强 G-半预不变凸函数，若 G^{-1} 和 G 满足可加性，则 $f+g$ 也是关于同一 η 的强 G-半预不变凸函数；

2）假设 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的强 G-半预不变凸函数，α 是一个常数，若 G^{-1} 和 G 满足可加性，则 $f+\alpha$ 也是关于 η 的强 G-半预不变凸函数；

3）假设 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的强 G-半预不变凸函数，$k>0$，若 G^{-1} 和 G 满足正齐次性，则 kf 也是关于 η 的强 G-半预不变凸函数。

证明 1）因为 f,g 是两个关于同一 η 和 G 的强 G-半预不变凸函数，故存在常数 $\beta_1>0,\beta_2>0$，对 $\forall x,y\in K$，$\forall\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta_1\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2]$$

$$g(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}[\lambda G(g(x))+(1-\lambda)G(g(y))-\beta_2\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2]$$

由以上两式及 G^{-1} 和 G 的可加性得

$$(f+g)(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))+g(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant$$
$$G^{-1}[\lambda G((f+g)(x))+(1-\lambda)G((f+g)(y))-(\beta_1+\beta_2)\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2]$$

故 $f+g$ 是关于 η 的强 G-半预不变凸函数。

结论2）、3）可类似证明。 证毕

定理2 令 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的半连通集。如果 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的关于 η 的强 G-半预不变凸函数，则水平集 $S_\alpha=\{x\in X:f(x)\leqslant\alpha\}$ 是一个关于 η 的半连通集，其中 $\alpha\in\mathbf{R}$。

证明 令 $x,y\in X$，使得 $f(x)\leqslant\alpha$ 和 $f(y)\leqslant\alpha$ 成立。由假设，对于任意的 $\lambda\in[0,1]$，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in X$。由于 f 是在 X 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数，则对于 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\exists\beta>0$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)\leqslant$$
$$G^{-1}(\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\alpha)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)=$$
$$G^{-1}(G(\alpha)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)\leqslant G^{-1}(G(\alpha))=\alpha$$

所以 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in S_\alpha$，即水平集 S_α 是一个关于 η 的半连通集。 证毕

接下来讨论强 G-半预不变凸性的几何性质，首先给出强 G-半不变凸集的概念。

定义6 令 T 是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$ 中的一个子集。则称 T 是关于 η 的强 G-半不变凸集，当且仅当存在一个向量映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 和一个连续的实值增函数 $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对于 $\forall(x_1,y_1)\in T,(x_2,y_2)\in T$ 和 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\exists\beta>0$，满足 $(x_2+\lambda\eta(x_1,x_2,\lambda),G^{-1}(\lambda G(y_1)+(1-\lambda)G(y_2)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x_1,x_2,\lambda)\|^2))\in T$。

定理 3　令 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的半连通集,f 是定义在 X 上的实值函数。则 f 是 X 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数,当且仅当其上图 $E_f=\{(x,\alpha):x\in X,\alpha\in\mathbf{R},f(x)\leqslant\alpha\}$ 是一个关于 η 的强 G-半不变凸集。

证明　必要性。令 $(x,\alpha)\in E_f$,$(y,\gamma)\in E_f$,使得 $f(x)\leqslant\alpha$ 和 $f(y)\leqslant\gamma$ 成立。由假设,f 是关于 η 的强 G-半预不变凸函数,则对于 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\exists\beta>0$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)\leqslant$$
$$G^{-1}(\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\gamma)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)$$

因此 $(y+\lambda\eta(x,y,\lambda),G^{-1}(\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\gamma)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2))\in E_f$。即对于任意的 $\lambda\in[0,1]$,其上图 E_f 是一个关于 η 的强 G-半不变凸集。

充分性。对于任意的 $x,y\in X$ 及 $(x,f(x))\in E_f$ 和 $(y,f(y))\in E_f$,由于 E_f 是一个关于 η 的强 G-半不变凸集,则对于任意的 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$(y+\lambda\eta(x,y,\lambda),G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2))\in E_f$$

即有 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)$。因此 f 是 X 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数。　　证毕

定理 4　令 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的半连通集,f 是定义在 X 上的实值函数。则 f 是 X 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数,当且仅当对于 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,$\exists\beta>0$,有 $f(x)\leqslant\alpha$ 和 $f(y)\leqslant\gamma$,满足

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\gamma)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)$$

证明　令 $x,y\in X$ 使得 $f(x)\leqslant\alpha$ 和 $f(y)\leqslant\gamma$ 成立。由假设,对于任意的 $\lambda\in[0,1]$,显然有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in X$。由于 f 是在 X 上的关于 η 的强 G-半预不变凸函数,则对于 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\exists\beta>0$,有 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)$。因此,可以得到

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\gamma)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)$$

反之,令 $(x,\alpha)\in E_f$ 和 $(y,\gamma)\in E_f$,由假设,对于 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\exists\beta>0$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\gamma)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)$$

由 f 的上图的定义,可以得到

$$(y+\lambda\eta(x,y,\lambda),G^{-1}(\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\gamma)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2))\in E_f$$

即 E_f 是一个强 G-半不变凸集。于是由定理 3 可得 f 是一个在 X 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数。　　证毕

定理 5　令 $F\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 是任意集合,定义 $F:=\{(x,\alpha):x\in\mathbf{R}^n,\alpha\in\mathbf{R}\}$ 是关于 η 的强 G-半不变凸集,并且令 $f(x)=\inf\{\alpha:(x,\alpha)\in F\}$。则 f 是一个在 X 上的关于 η 的强 G-半预不变凸函数。

证明　令 $\alpha_1,\gamma_1\in\mathbf{R},x,y\in\mathbf{R}^n$ 使得 $f(x)<\alpha_1$ 和 $f(y)\leqslant\gamma_1$ 成立。则存在 α_2 和 γ_2 使得 $(x,\alpha_2)\in F$,$(y,\gamma_2)\in F$,并且 $f(x)\leqslant\alpha_2<\alpha_1$,$f(y)\leqslant\gamma_2<\gamma_1$ 成立。

由假设,F 是一个关于 η 的强 G-半不变凸集,则对于 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\exists\beta>0$,有

$$(y+\lambda\eta(x,y,\lambda),G^{-1}(\lambda G(\alpha_2)+(1-\lambda)G(\gamma_2)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2))\in F$$

又由 f 的定义知对于 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\exists\beta>0$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(\alpha_2)+(1-\lambda)G(\gamma_2)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)$$

由定理 4 可得 f 是一个在 X 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数。　　证毕

定理 6　对于任意的 $x\in\mathbf{R}^n$,令 $X\subseteq\mathbf{R}^{n+1}$,并且 $f(x)=\inf\{u:u\in\mathbf{R},(x,u)\in X\}$,$G$ 是连续递增的实值函数。如果对于所有的 (x,u),$(y,v)\in X$,X 是一个关于 $\eta^*:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^{n+1}$ 的半连通集($\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$),那么 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的强 G-半预不变凸函数。其中

$$\eta^*((y,v),(x,u),\lambda)=\begin{cases}\eta(y,x,0),\lambda=0\\ \left(\eta(y,x,\lambda),\dfrac{G^{-1}(\lambda G(u)+(1-\lambda)G(v)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(y,x,\lambda)\|^2)-u}{\lambda}\right),0<\lambda\leqslant1\end{cases}$$

证明　当 $\lambda=0$ 时,结论是显然成立的。

当 $0\leqslant\lambda<1$ 时,$x,y\in\mathbf{R}^n$。由于 X 是一个关于 $\eta^*((y,v),(x,u),\lambda)$ 的半连通集,则对于任意的 (y,v),$(x,u)\in X$,有 $(x,u)+\lambda\eta^*((y,v),(x,u),\lambda)\in X$,$\forall\lambda\in(0,1]$ 成立。由

$$\eta^*((y,v),(x,u),\lambda)=\left(\eta(y,x,\lambda),\frac{G^{-1}(\lambda G(u)+(1-\lambda)G(v)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(y,x,\lambda)\|^2)-u}{\lambda}\right)$$

可以得到对于 $\forall\lambda\in(0,1]$,$\exists\beta>0$,有

$$(x,u)+\lambda\eta^*((y,v),(x,u),\lambda)=(x+\lambda\eta(y,x,\lambda),G^{-1}(\lambda G(u)+(1-\lambda)G(v)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(y,x,\lambda)\|^2))\in X$$

因此,由 f 的定义,可以得到对于任意的 $\lambda\in(0,1]$,$\exists\beta>0$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)$$

成立。所以,f 是在 $\mathbf{R}^n$ 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数。 证毕

定理7 令 $f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的强 G-半预不变凸函数。令 $\mu=\inf_{u\in X}f(u)$,则集合 $E=\{u\in X:f(u)=u\}$ 是关于同一 η 的半连通集。如果 f 是关于 η 的强 G-半预不变凸函数,则 E 是一个单点集。

证明 1)令 $x,y\in E,\lambda\in[0,1]$。由 f 是关于 η 的强 G-半预不变凸函数,则 $\exists\beta>0$,使得

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)=$$
$$G^{-1}(\lambda G(\mu)+(1-\lambda)G(\mu)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)=G^{-1}(G(\mu)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)\leqslant\mu$$

因此 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in E$。所以,$E$ 是一个关于 η 的半连通集。

2)令 $x,y\in E(x\neq y)$ 使得 $f(x)=f(y)=\mu$ 成立。由于 E 是一个关于 η 的半连通集,对于所有的 $\lambda\in[0,1]$,$\exists\beta>0$,可以得到 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in E\subset X$。由于 f 是关于 η 的强 G-半预不变凸函数,因此 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)<\mu$。而这与 $\mu=\inf_{u\in X}f(u)$ 矛盾。从而,E 是一个单点集。 证毕

3 强 G-半预不变凸函数的判定

这一节将给出强 G-半预不变凸函数的一个判定。在介绍判定定理前,先给出条件 A 的概念。

条件 A 称函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 满足条件 A,如果对于 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,$\exists\beta>0$,有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y,\lambda),\lambda)=-\lambda\eta(x,y,\lambda),\eta(x,y+\lambda\eta(x,y,\lambda),\lambda)=(1-\lambda)\eta(x,y,\lambda)$$

注2 事实上,满足条件 A 的映射 η 是大量存在的。下面给出例2说明其存在性。

例2 $\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y-\lambda, x=1,0\leqslant y<1\\ x-y,0\leqslant x<1,0\leqslant y\leqslant1\\ x-y,x\leqslant0,y\leqslant0\\ -\dfrac{1}{2}-y,0<x\leqslant1,y\leqslant0\\ \dfrac{1}{2}-y,x\leqslant0,0<y\leqslant1\end{cases}$,令 $K=(-\infty,1]$。很容易验证 η 均满足

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y,\lambda),\lambda)=-\lambda\eta(x,y,\lambda),\eta(x,y+\lambda\eta(x,y,\lambda),\lambda)=(1-\lambda)\eta(x,y,\lambda)$$

即条件 A 成立。

定理8 令 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半连通集,且 η 满足条件 A,如果 f 是 G-半预不变凸函数,且 $\exists\alpha>0$,使得 $\forall x,y\in K$ 和 $\bar\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(y+\bar\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\bar\lambda G(f(x))+(1-\bar\lambda)G(f(y))-\alpha\bar\lambda(1-\bar\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)\tag{1}$$

那么 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上关于 η 的强 G-半预不变凸函数。

证明 反设 $f:K\to\mathbf{R}$ 不是一个强 G-半预不变凸函数,那么对于 $\forall\beta>0$,$\exists x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,使得

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))>G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)\tag{2}$$

选择 γ_1,γ_2 满足 $0<\gamma_1<\lambda<\gamma_2<1,\lambda=\bar\lambda\gamma_1+(1-\bar\lambda)\gamma_2$。

令 $\bar x=y+\gamma_1\eta(x,y,\bar\lambda),\bar y=y+\gamma_2\eta(x,y,\bar\lambda)$。由 f 是 G-半预不变凸函数,可以得到

$$f(\bar x)\leqslant G^{-1}[\gamma_1G(f(x))+(1-\gamma_1)G(f(y))],f(\bar y)\leqslant G^{-1}[\gamma_2G(f(x))+(1-\gamma_2)G(f(y))]\tag{3}$$

由条件 A,可以得到

$$\bar y+\bar\lambda\eta(\bar x,\bar y,\lambda)=y+\gamma_2\eta(x,y,\lambda)+\bar\lambda\eta(y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),y+\gamma_2\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$
$$y+\gamma_2\eta(x,y,\lambda)+\bar\lambda\eta(y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda)+(\gamma_2-\gamma_1)\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$
$$y+\gamma_2\eta(x,y,\lambda)+\bar\lambda\eta\left(y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda)+\frac{(\gamma_2-\gamma_1)}{1-\gamma_1}\eta(x,y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),\lambda),\lambda\right)=$$
$$y+\gamma_2\eta(x,y,\lambda)-\bar\lambda\frac{(\gamma_2-\gamma_1)}{1-\gamma_1}\eta(x,y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$
$$y+(\gamma_2-\bar\lambda(\gamma_2-\gamma_1))\eta(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\tag{4}$$

由(1)式可得

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(\bar y+\bar\lambda\eta(\bar x,\bar y,\lambda))\leqslant$$
$$G^{-1}[\bar\lambda G(f(\bar x))+(1-\bar\lambda)G(f(\bar y))-\alpha\bar\lambda(1-\bar\lambda)\|\eta(\bar x,\bar y,\lambda)\|^2]\tag{5}$$

又由条件 A 可得

$$\eta(\bar x,\bar y,\lambda)=\eta(y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),y+\gamma_2\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$
$$\eta(y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda)+(\gamma_2-\gamma_1)\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$

$$\eta\left(y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda)+\frac{(\gamma_2-\gamma_1)}{1-\gamma_1}\eta(x,y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),\lambda),\lambda\right)=$$
$$-\frac{(\gamma_2-\gamma_1)}{1-\gamma_1}\eta(x,y+\gamma_1\eta(x,y,\lambda),\lambda)=-(\gamma_2-\gamma_1)\eta(x,y,\lambda)\tag{6}$$

因此由(4)~(6)式可得
$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(\bar{y}+\bar{\lambda}\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda))\leqslant$$
$$G^{-1}[\bar{\lambda}G(f(\bar{x}))+(1-\bar{\lambda})G(f(\bar{y}))-\alpha\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})(\gamma_2-\gamma_1)^2\ \|\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda)\|^2]=$$
$$G^{-1}\left[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\alpha\frac{(\lambda-\gamma_2)(\gamma_1-\lambda)}{(\gamma_2-\gamma_1)^2}(\gamma_2-\gamma_1)^2\ \|\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda)\|^2\right]=$$
$$G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\alpha(\lambda-\gamma_2)(\gamma_1-\lambda)\|\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda)\|^2]=$$
$$G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda)\|^2]\tag{7}$$

其中$\beta=\dfrac{(\lambda-\gamma_2)(\gamma_1-\lambda)}{\lambda(1-\lambda)}>0$。显然(7)式与(2)式矛盾,所以$f$是$K\subseteq\mathbf{R}^n$上关于$\eta$的强$G$-半预不变凸函数。

证毕

注 3　定理 8 给出了G-半预不变凸函数是强G-半预不变凸函数的一个充分性定理,定理中条件(1)式是至关重要的,下面用例 3 说明条件(1)式是不可缺的。

例 3　令$X=[-1,1]$,很容易检验X是关于$\eta(x,y,\lambda)$的一个半连通集,且$\lim_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$,其中$\eta(x,y,\lambda)=$

$$\begin{cases}\dfrac{x-y}{\sqrt{\lambda}},0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1,x\geqslant y,0\leqslant\lambda\leqslant1\\ \dfrac{x-y}{\sqrt{\lambda}},-1\leqslant x<0,-1\leqslant y<0,x\leqslant y,0<\lambda\leqslant1\\ -y-x^2+2x,0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1,x<y\\ \lambda^2(x-y),-1\leqslant x<0,-1\leqslant y<0,x>y\\ 0,-1\leqslant x<0,0\leqslant y\leqslant1,x\leqslant-y\\ -y,0\leqslant x\leqslant1,-1\leqslant y<0,x\geqslant-y\\ -\dfrac{1}{2}x-y,-1\leqslant x\leqslant0,0\leqslant y\leqslant1,x>-y\\ 0,0\leqslant x\leqslant1,-1\leqslant y<0,x<-y\end{cases}$$

。令$f(x)=\ln(3-|x|)$。由定义 3,可以检验f是一个关于η的G-半预不变凸函数,其中$G(t)=\mathrm{e}^t$。然而,取$x=1,y=0,\lambda=\dfrac{1}{2},\beta=1$,可以得到$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))>G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2]$。即$f$不是关于同一$\eta$的强$G$-半预不变凸函数。

4 强 G-半预不变凸函数的应用

接下来讨论如下有不等式约束情况下的非线性规划问题

$$\begin{aligned}&(\mathrm{P})\ \min f(x)\\ &\mathrm{s.t.}\ \ g_i(x)\leqslant0,i\in J=\{1,\cdots,m\},x\in X\end{aligned}$$

其中X是$\mathbf{R}^n$的非空子集,$f,g_i:X\to\mathbf{R},i=1,2,\cdots,m$,问题(P)的可行解集为$D:=\{x\in X:g_i(x)\leqslant0,i\in J\}$。

定理 9　令$y\in D$是问题(P)的最优解,并且假设f是在D上关于η的强G-半预不变凸函数,约束函数$g_i,i\in J$是在D上关于同一函数η的强G_i-半预不变凸函数。则y是问题(P)的唯一的最优解。

证明　假设存在$\bar{x}\in D(\bar{x}\neq y)$是问题(P)的另一个最优解。通过假设,约束函数$g_i,i\in J$是在$D$上关于同一函数$\eta$的强$G_i$-半预不变凸函数。已知$\bar{x}\in D$和$y\in D$,由强$G$-半预不变凸函数的定义,则对于所有的$i\in J,\forall\lambda\in[0,1],\exists\beta>0$,有

$$g_i(y+\lambda\eta(\bar{x},y,\lambda))\leqslant G_i^{-1}(\lambda G_i(g_i(\bar{x}))+(1-\lambda)G_i(g_i(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\bar{x},y,\lambda)\|^2)\leqslant$$
$$G_i^{-1}(\lambda G_i(0)+(1-\lambda)G_i(0)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\bar{x},y,\lambda)\|^2)\leqslant G_i^{-1}(G_i(0))=0$$

因此,对于所有的$i\in J$和任意的$\lambda\in[0,1]$,有$y+\lambda\eta(\bar{x},y,\lambda)\in D$。又由,$f$是在$D$上关于函数$\eta$的强$G$-半预不变凸函,则对于所有的$x\in D,\forall\lambda\in[0,1],\exists\beta>0$,满足

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y,\lambda)\|^2)\tag{8}$$

将$x=\bar{x}$代入(8)式可得
$$f(y+\lambda\eta(\bar{x},y,\lambda))\leqslant$$

$$G^{-1}(\lambda G(f(\bar{x}))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\bar{x},y,\lambda)\|^2)<G^{-1}(G(f(y)))=f(y) \quad (9)$$

由于 $y+\lambda\eta(\bar{x},y,\lambda)\in D$,则(9)式与 y 为问题(P)的唯一最优解矛盾,所以,问题(P)的最优解是唯一的。 证毕

最后给出一个非凸最优化问题的例子来说明定理 9 的正确性。

例 4 考虑下面的最优化问题 $f(x)=\exp(\arctan|x|^2)\to\min$,$g(x)=\arctan[(|x|-1)^2-1]\leqslant 0$。

可直接算出此最优化问题的所有可行解集为 $D=\{x\in\mathbf{R}:-2\leqslant x\leqslant 2\}$。可行解 $\bar{x}=0$ 为所给最优化问题的最优解。

根据定义 5,可以验证目标函数 f 是在 $\mathbf{R}$ 上关于 η 的强 G_1-半预不变凸函数,其中 $G_1(t)=\tan(\ln t)$;同时,也可以验证约束函数 g 是在 $\mathbf{R}$ 上关于 η 的强 G_2-半预不变凸函数,其中 $G_2(t)=\tan t$,$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-\lambda y, x\geqslant 0, y\geqslant 0, x\geqslant y\\ -x-y, x\geqslant 0, y<0\\ x-y, x<0, y<0, x<y\\ -x-y, x\leqslant 0, y>0\end{cases}$。显然满足定理 9 的所有假设,根据定理 9,$\bar{x}=0$ 是所考虑最优化问题的唯一最优解。

参考文献:

[1] Weir T, Mond B. Preinvex functions in multiobjective optimization[J]. J Math Anal Appl, 1988, 136: 29-38.

[2] Yang X Q, Chen G Y. A class of nonconvex functions and prevariatioal inequalities [J]. J Math Anal Appl, 1992, 169: 359-373.

[3] 颜丽佳,刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2005, 22(1): 11-15.
Yan L J, Liu F P. Strongly preinvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2005, 22(1): 11-15.

[4] Antczak T. G-preinvex functions in mathmatica programming [J]. J Comput Appl Math, 2007, 217: 212-226.

[5] Peng Z Y, Zhao Y, Xu S. Semi-G-preinvexity and optimality in nonlinear programming[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 198, doi: 10.1186/1029-242X-2012-198.

[6] 彭再云,房效亮,赵勇. 强 G-预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2011, 28(6): 1-4.
Peng Z Y, Fang X L, Zhao Y. Strongly G-preinvex functions [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011, 28(6): 1-4.

[7] 唐万梅. 强预不变凸函数的性质[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2006, 23: 8-12.
Tang W M. The properties of strongly preinvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2006, 23(2): 8-12.

[8] Antczak T. New optimality conditions and duality results of G type in differentiable mathematical programming[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 1617-1632.

[9] 彭再云,汪达成. 强预不变凸函数的新性质及应用[J]. 重庆交通大学学报:自然科学版, 2008, 27: 39-42.
Peng Z Y, Wang D C. New characteristics and application of strictly pre-invex function[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University: Natural Science, 2008, 27(5): 839-942.

[10] Jeyakumar V. Inequality systems and optimization[J]. J Math Anal Appl, 1991, 159(1): 51-71.

Operations Research and Cybernetics

Strongly Semi-G-preinvex Functions and Its Properties

PENG Zai-yun[1], KONG Xiang-xi[1,2]

(1. Collegel of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;
2. School of Management, Jilin University, Changchun 130022, China)

Abstract: A class of new generalized convex function-strongly semi-G-preinvex functions, which is a true generalization of strongly preinvex functions and strongly G-preinvex functions, is studied. First, an example is given to show that there exists a great deal of strongly semi-G-preinvex functions. Then, we discuss some properties of strongly semi-G-preinvex functions, get the relationships between strongly G-preinvex functions f and it's level-set $S_\alpha=\{x\in X: f(x)\leqslant\alpha\}$, epigraph $E_f=\{(x,\alpha): x\in X, \alpha\in\mathbf{R}, f(x)\leqslant\alpha\}$. At the same time, a judging theorem of strongly semi-G-preinvex functions is given. Finally, an application of strongly semi-G-preinvexity is obtained in nonlinear programming problems: for a class of restrained optimization (P), let $y\in D$ is a optimum of (P), let f is a strongly semi-G-preinvex functions on D, restrained function g_i, $i\in J$ is a strongly semi-G_i-preinvex functions on D, then y is unique. Then examples are given for illustration of the corresponding results.

Key words: semi-connected sets; nonlinear programming; semi-G-preinvex functions; strongly semi-G-preinvex functions

(责任编辑 黄 颖)