DOI：10.11721/cqnuj20130209

关于整数矩阵几个问题的思考*

孙春涛，蹇　红
(重庆邮电大学 数理学院，重庆 400065)

摘要：由于环中的元素未必有逆，因此域上的矩阵的那些结果在交换环上的矩阵就未必能够成立。在前人研究整数矩阵可逆的等价条件、整数矩阵的初等变换、整系数线性方程组解的判定、整数矩阵的应用的基础上，进一步提出整数矩阵的特征值、特征向量、相似以及相似对角化等问题，并得出了一系列结果。主要结果有整数矩阵仅通过整初等行变换一定可变成上三角矩阵(下三角矩阵)；整特征向量对应的特征值一定是整数；对称整数矩阵的特征值与特征向量的关系；整数矩阵与对角矩阵整相似的两个充要条件；对称整数矩阵 A 有 n 个不同的特征值，且 A 可对角化，则 A 一定是整对角矩阵。

关键词：整数矩阵；相似；对角化；特征值；特征向量
中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2013)02-0039-03

1 基本定义与性质

1.1 基本定义

相抵标准型、特征值、特征向量、相似标准型及对角化[1-4]都是实矩阵中研究的重点。本文将在交换环[5-6]上展开研究，用 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_k\rangle$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的最大公约数，E 表示单位阵，$R(A)$ 表示矩阵 A 的秩，$diag\ A$ 表示 A 为对角矩阵。

定义 1[7]　设 $a_{ij}\in \mathbf{Z}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$，称矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为整数矩阵，并记 $m\times n$ 的整数矩阵全体为 $M_{m\times n}(\mathbf{Z})$。

定义 2[8]　设整数矩阵 A,B 满足 $AB=BA=E$，则称矩阵 A 是可逆的，并称 B 为 A 的逆，记为 $A^{-1}=B$。

定义 3[9]　将：1)交换任意两行；2)任意一行乘以 -1；3)任一行的任意整数倍加至另外一行上去。合称为整数矩阵的整初等行变换；类似定义整初等列变换，整初等行变换与整初等列变换统称为整初等变换。

定义 4　设整数矩阵 A,B 以及可逆整数矩阵 P 满足 $P^{-1}AP=B$，则称 A 与 B 整相似。

定义 5　设有非零整向量 α(每个分量都是整数)，实数 λ，使得 $A\alpha=\lambda\alpha$，则称 λ 为 A 的特征值，并称 α 为 A 的(特征值 λ 对应的)特征向量。

整数矩阵的秩、整数方阵的行列式、对称整数矩阵及整系数线性方程组[6]的定义直接参照实矩阵。

1.2 整数矩阵的性质

性质 1[10]　整数矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|=1$ 或 -1。

性质 2[11]　任何一个非零的 $m\times n$ 整数矩阵 A 都等价于整数矩阵

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \square & & \\ & & & d_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为正整数，且 $d_i\,|\,d_{i+1}(i=1,2,\cdots,r-1)$。

性质 3　若整数矩阵 A 可逆，则 A 的任一行或任一列的各元素的最大公约数等于 1。

1.3 相关引理

引理 1　整数矩阵

$$A\in M_{m\times n}(\mathbf{Z}), x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \square\\ x_n\end{pmatrix}$$

则 $Ax=0$ 有非平凡整数解当且仅当 $R(A)<n$。

证明　必要性显然成立。

下证充分性。若 $R(A)<n$，则 $Ax=0$ 一定有非零有理解，不妨记其一解为 $x=\begin{pmatrix} p_1/q_1\\ p_2/q_2\\ \square\\ p_n/q_n\end{pmatrix}$(这里 $p_i, q_i\in \mathbf{Z}$)，

* 收稿日期：2012-05-29　　修回日期：2012-07-22　　网络出版时间：2013-03-16　13：37
作者简介：孙春涛，男，讲师，研究方向为稳定性理论，E-mail：sunct@cqupt.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130316.1337.201302.39_009.html

只须记 $K=q_1q_2\cdots q_n$,那么 Kx 一定是则 $\boldsymbol{A}x=0$ 的非平凡整数解。 证毕

推论 1 整数矩阵的整特征值一定有对应的整特征向量。

引理 2 若 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,$i=1,2,\cdots,n$ 是整数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,记 $d=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$,则 $\beta=\frac{1}{d}\alpha$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

引理 3 整数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵整相似的一个必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部是整数。

2 主要结果

定理 1 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(\mathbf{Z})$,则 $\boldsymbol{A}$ 仅通过整初等行变换一定能变成上三角矩阵(下三角矩阵)。

证明 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,首先考虑 $\boldsymbol{A}$ 的第一列。

1)$\boldsymbol{A}$ 的第一列的元素全部为零,则看 $\boldsymbol{A}$ 的第二列。

2)$\boldsymbol{A}$ 的第一列没有全部为零,可首先通过定义 3 的 2)将第一列中的小于零的元素全部变正,得到矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$。如果 $\boldsymbol{B}$ 的第一列只有一个元素为正,则通过定义 3 的 1)就可将第一列做成上三角。如果 $\boldsymbol{B}$ 的第一列中的正元素不止一个,可记 $W=\sum_{i=1}^{m}b_{i1}$,显然 W 是有限正整数。如果 $b_{s1}\geqslant b_{t1}>0$,则通过定义 3 的 3)将第 t 行的 -1 倍加至第 s 行,此时得到矩阵记为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,显然 $\sum_{i=1}^{m}c_{i1}<W$,重复这一步骤,总能经过有限次操作之后,第一列元素之和不能再减少。此时第一列元素有且只有一个为正,其余全为零。则将这一正数对应的行交换至第一行即可。

由此 $\boldsymbol{A}$ 已变成$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & *\\0 & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$,继续类似变换 $\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}$ 一定可以变成上三角矩阵。 证毕

定理 2 整数矩阵的非零整特征向量对应的特征值一定是整数。

证明 由引理 1 可得,不妨假设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,且 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle=1$,是整数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,对应的特征值记为 λ,则有 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$,利用有理数有限次和差运算,乘法运算的封闭性可知,$\lambda\alpha$ 是整向量,记 $\lambda=\frac{p}{q}$,p 与 q 是互素的整数,那么

$$q\mid a_i,i=1,2,\cdots,n$$

从而

$$q\mid\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$$

所以 $q=1$ 或 -1,即 λ 一定是整数。 证毕

定理 3 整数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵整相似等价于 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 且

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\pm1$$

定理 4 如果整数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值,任取 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量,分别记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,用 d_i 表示 α_i 的各元素的最大公约数,则 $\boldsymbol{A}$ 整相似于对角矩阵$\Leftrightarrow|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=\pm\prod_{i=1}^{n}d_i$。

证明 先证必要性。不妨设整数可逆阵 $\boldsymbol{U}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$使得 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,不妨设 α_i 就是特征值 λ_i 对应的特征向量,则 $\exists\delta_i$ 使得 $\alpha_i=\delta_i\beta_i$,利用性质 3 易知 $\delta_i=\pm d_i\in\mathbf{Z}$,所以 $\alpha_i=\pm d_i\beta_i$。故由性质 1 有

$$|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=\pm|d_1\beta_1,d_2\beta_2,\cdots,d_n\beta_n|=$$

$$\pm|\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n|\prod_{i=1}^{n}d_i=\pm\prod_{i=1}^{n}d_i$$

再证充分性。只须令 $\boldsymbol{U}=\left(\frac{\alpha_1}{d_1},\frac{\alpha_2}{d_2},\cdots,\frac{\alpha_n}{d_n}\right)$,则 $\boldsymbol{U}$ 是可逆整数矩阵,且 $\boldsymbol{U}$ 使 $\boldsymbol{A}$ 整相似于对角矩阵。 证毕

推论 2 在不计列向量的顺序以及列向量的正负情况下,上面的 $\boldsymbol{U}$ 矩阵具有唯一性。

定理 5 若对称整数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值,且 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,则 $\boldsymbol{A}$ 一定是对角整矩阵。

证明 设 $\boldsymbol{U}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$使得

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 分别是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量,又由 $\boldsymbol{A}$ 的对称性,可知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是两两正交的。于是

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & & & \\ & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}$$

取行列式得 $1=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i$，所以 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=1$。从而 α_1，α_2，…，α_n 恰好取遍 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，故不妨记 $\alpha_k=e_{i_k}$，$k=1,2,\cdots,n$，$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 构成 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{U}^{-1}=$$
$$(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})^{\mathrm{T}}=$$
$$diag(\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_n})$$

必定是对角阵。 证毕

参考文献：

[1] 张贤科，许甫华. 高等代数学[M]. 北京：清华大学出版社，1998.
Zhang X K，Xu P H. Advanced linear algebra[M]. Beijing：Tsinghua University Press，1998.

[2] Jacob B. Linear algebra [M]. New York：W H Freeman & Comp，1990.

[3] 史荣昌，魏丰. 矩阵分析[M]. 北京：北京理工大学出版社，2006.
Shi R C，Wei F. Matrix analysis[M]. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，2006.

[4] 程静，何承源. 广义酉矩阵与广义 Hermite 矩阵的一些性质[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(3)：58-59.
Cheng J，He C Y. Some properties of generalized unitary matrices and generalized hermite matrices[J]. Journal of Chongqing Normal University：Nature Science，2010，27(3)：58-59.

[5] 孟丽娜，郑宝东，刘威，等. 非负交换整半环上矩阵的正/负行列式保持问题[J]. 数学的实践与认识，2011，41(18)：243-247.
Meng L N，Zheng B C，Liu W，et al. Positive/negative determinant preservers for matrices over nonnegative commutative semiring without zero divisors[J]. Mathematics in Practice and Theory，2011，41(18)：243-247.

[6] Martin G，Wong E B. The number of 2×2 integer matrices having a prescribed integer eigenvalue[J]. Algebra Number Theory，2008(2)：979-1000.

[7] 田正平. 整数矩阵的方幂和表示[J]. 杭州师范学院学报：社会科学版，1990，6(3)：6-13.
Tian Z P. Sums of powers of integer matrices[J]. Journal of Hangzhou Teachers College：Humanities and Social Sciences，1990，6(3)：6-13.

[8] 张景晓. 整数矩阵的性质及应用[J]. 重庆理工大学学报：自然科学版，2010，24(4)：117-119.
Zhang X J. Basic properties of integer matrix and its application[J]. Journal of Chongqing Institute of Technology：Natural Science，2010，24(4)：117-119.

[9] 董桂真. 整数环上线性方程组有解的充要条件[J]. 济南大学学报：社会科学版，1997，7(3)：59-61.
Dong G Z. A sufficient and necessary condition that linear equations system with integral coefficient has integral solution[J]. Journal of University of Jinan：Social Science Edition，1997，7(3)：63-65.

[10] 王远民，詹玉. 构造整数矩阵，解决数论问题[J]. 攀枝花学院学报，2009，26(6)：73-75.
Wang Y M，Zhan Y. Structure integer matrix solution theory of numbers question[J]. Journal of Panzhihua University，2009，26(6)：73-75.

[11] 鲁礼勇. 整系数线性方程组的整数解的判定[J]. 襄樊学院学报，2006，27(5)：7-11.
Lu L Y. Distinguishment of the integer solution of a system of linear equations with integer coefficients[J]. Journal of Xiangfan University，2006，27(5)：7-11.

The Research on the Problems of Integer Matrix

SUN Chun-tao，JIAN Hong

(School of Mathematics and Physics，Chongqing University of Posts and Telecommunications，Chongqing 400065，China)

Abstract：Because the element on the metal ring may not have the inverse，so the theorems on the matrix in field would perhaps incorrect. In this article，I mainly do research on the eigenvalue，eigenvector and similar diagonalization. These results are：integer matrix can change into upper triangular matrix through integer elementary row operation；two necessary and sufficient conditions about similarity diagonalization of integer matrix；if the integer matrix has different eigenvalue，it can diagonalizable if and only if it is an integer diagonal matrix.

Key words：integer matrix；similarity；diagonalization；eigenvalue；eigenvector

(责任编辑 黄 颖)