DOI:10.11721/cqnuj20130210

# 离散时间正奇异系统的可容许性分析*

黄丽琼,吴保卫,刘丽丽
(陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062)

摘要:讨论了离散时间正奇异系统的可容许性问题,系统的可容许性是指系统是正则的、因果的、稳定的。首先根据离散时间正奇异系统稳定性的一个李亚普诺夫不等式条件 $(\hat{E}^D\hat{A})^{\mathrm{T}}P(\hat{E}^D\hat{A})-P<0$,利用线性矩阵不等式的方法,给出其可容许的一个充要条件;进一步讨论了如果一个离散正奇异系统存在单项分解,利用矩阵分解的方法,给出它可容许的一个充要条件:对任给的正定矩阵 $Y$,存在对角半正定矩阵 $X$ 满足李亚普诺夫方程 $A^{\mathrm{T}}XA-E^{\mathrm{T}}XE+E^{\mathrm{T}}YE=0$ 和秩条件 $\mathrm{rank}(E^{\mathrm{T}}XE)=r$。最后给出实例验证结论的可行性。

关键词:正奇异系统;因果性;稳定性;可容许性
中图分类号:O231 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2013)02-0042-04

正系统是指对任意的一个非负初始状态 $x(0)$,系统的变量 $x(t)$ 也是非负的。正系统经常在一些要求状态变量为正的模型中出现,例如人口模型[1]、经济模型[2]、生物模型[3]等。在过去的几年中,对于正系统的讨论和应用,大多数是在正标准系统中研究的,文献[4-5]中讨论了正标准系统的结构性质并给出了其初始分析,文献[6]中给出了离散时间正标准系统的稳定性条件。然而在实际问题中,一些系统模型需要用奇异系统表示出来,例如电路网络系统、化工系统、能源系统等,因此正奇异系统引起了广泛的关注与研究[7-14]。文献[7]中给出了离散时间正奇异系统的可达性和可控性判据,文献[8-9]中给出了正奇异系统的稳定性条件,文献[10]中给出了正奇异系统存在一个状态反馈,使闭环系统是非负的且是稳定的条件,文献[11]中讨论了连续时间正奇异系统的可容许性。本文主要讨论离散时间正奇异系统的可容许性。

## 1 预备知识

以下给出后面结果中需要用到的一些定义和引理,文章中用到的记号基本都是标准的。具体地,$\mathbf{R}^n$ 为 $n$ 维实向量空间,$\overline{\mathbf{R}}_+^{n\times n}$ 为 $n\times n$ 维非负实矩阵的集合,$\mathbf{C}$ 为复数集,$\mathbf{Z}_+$ 为正整数集,$A^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $A$ 的转置,$\mathrm{rank}(A)$ 为矩阵 $A$ 的秩,$A^{-1}$ 为矩阵 $A$ 的逆矩阵,$\mathrm{ind}(A)$ 为矩阵 $A$ 的指标,即满足 $\min\{k\in\mathbf{Z}_+: \mathrm{rank}(A^{k+1})=\mathrm{rank}(A^k)\}$,$\det(A)$ 为矩阵 $A$ 的行列式,$\deg(\cdot)$ 为多项式的次数,$A^D$ 为矩阵 $A$ 的 Drazin 逆,即满足下列 3 个式子:1) $A^DAA^D=A^D$,2) $A^DA=AA^D$,3) $A^{k+1}A^D=A^k$,$k\geqslant \mathrm{ind}(A)$,$A>0$ 表示矩阵 $A$ 是正定的,$A<0$ 表示矩阵 $A$ 是负定的,$A\geqslant\geqslant 0$ $(A>>0)$ 表示矩阵 $A$ 是非负(正)的,即 $A$ 的每一个元素都是非负(正)的。

考虑下面的离散时间奇异系统

$$Ex(k+1)=Ax(k) \tag{1}$$

其中 $x(k)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态,$E,A\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\mathrm{rank}(E)=r<n$。

**定义 1**[12-13] 1)若存在一个 $\lambda\in\mathbf{C}$,使得 $\det(\lambda E-A)\neq 0$,称系统(1)是正则的;

2)如果 $\deg(\det(\lambda E-A))=\mathrm{rank}E$,称系统(1)是因果的;

3)如果系统(1)的所有有限特征根的模都小于 1,称系统(1)是稳定的;

4)如果系统(1)是正则的、因果的、稳定的,则称系统(1)是可容许的。

**定义 2** 如果对每一个可容许初始状态 $x(0)\geqslant\geqslant 0$,系统(1)的状态轨迹都是非负的,即 $x(t)\geqslant\geqslant 0$,$(t\geqslant 0)$,则称系统(1)是正系统。

根据文献[8]知,如果系统(1)是正则的,则存在两个非奇异矩阵 $M,N$,使得

* 收稿日期:2012-07-31 修回日期:2012-08-30 网络出版时间:2013-03-16 13:37
资助项目:国家自然科学基金(No. 10971123);陕西省自然科学基础研究计划项目(No. SJ08A20)
作者简介:黄丽琼,女,硕士研究生,研究方向为控制论,E-mail:huangbird1987@163.com 通讯作者:吴保卫,E-mail:wubw@snnu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130316.1337.201302.42_010.html

$$MEN=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix},MAN=\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

其中 $\Lambda$ 为幂零的，$J$ 为 Jordan 标准型。

如果系统(1)是正则的且 $\mathrm{ind}(E,A)=v$，则存在 $\hat{\lambda}\in\mathbf{C}$，使得 $\det(\hat{\lambda}E-A)\neq 0$，那么系统(1)的解可由 Drazin 的形式表示为

$$x(k)=(\hat{E}^D\hat{A})^k\hat{E}\hat{E}^D x(0)$$

其中 $x(0)\in\mathrm{Im}(\hat{E}\hat{E}^D)\cap\mathbf{R}_+^n$ 为可容许初始条件，$\hat{E}=(\hat{\lambda}E-A)^{-1}E$，$\hat{A}=(\hat{\lambda}E-A)^{-1}A$，把矩阵 $E,A$ 的相应分解代入 $\hat{E},\hat{A}$ 中，那么

$$\hat{E}=N\begin{bmatrix} (\hat{\lambda}I-J)^{-1} & 0 \\ 0 & (\hat{\lambda}\Lambda-I)^{-1}\Lambda \end{bmatrix}N^{-1}$$

$$\hat{A}=N\begin{bmatrix} (\hat{\lambda}I-J)^{-1}J & 0 \\ 0 & (\hat{\lambda}\Lambda-I)^{-1} \end{bmatrix}N^{-1}$$

$$\hat{E}^D\hat{E}=N\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{-1},\hat{E}^D\hat{A}=N\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{-1}$$

$$\hat{E}\hat{A}^D=N\begin{bmatrix} J^D & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}N^{-1}$$

根据以上分析给出下面的一些引理。

**引理 1**[6]　对于一个标准非负系统 $x(k+1)=Ax(k)$，其中 $A\in\overline{\mathbf{R}}_+^{n\times n}$，系统(1)是渐进稳定的当且仅当存在一个对角正定矩阵 $P$ 使得 $A^{\mathrm{T}}PA-P<0$ 成立。

**引理 2**[8]　如果系统(1)是正则的且 $\hat{E}\hat{E}^D\geqslant\geqslant 0$，$\mathrm{ind}(E,A)=\nu$，那么系统(1)是正系统当且仅当 $\hat{E}^D\hat{A}\geqslant\geqslant 0$。

**引理 3**[8]　设系统(1)是正则的且 $\hat{E}\hat{E}^D\geqslant\geqslant 0$，如果系统(1)是正系统，那么系统(1)是稳定的，当且仅当存在一个对角正定矩阵 $P$，使得

$$(\hat{E}^D\hat{A})^{\mathrm{T}}P(\hat{E}^D\hat{A})-P<0$$

成立。

## 2 主要结果

由文献[11]知，系统(1)是因果的当且仅当 $\hat{E}\hat{A}^D$ 的子矩阵 $\Lambda=0$，系统(1)为稳定的，当且仅当 $\hat{E}^D\hat{A}$ 的子矩阵 $J$ 是稳定的。

**定理 1**　设系统(1)是正则的且 $\hat{E}\hat{E}^D\geqslant\geqslant 0$，如果系统(1)是正系统，那么系统(1)是可容许的当且仅当存在一个对角正定矩阵 $P$，使得下面不等式成立

$$(\hat{E}^D\hat{A})^{\mathrm{T}}P(\hat{E}^D\hat{A})-P<0 \tag{2}$$

$$(\hat{E}\hat{A}^D)^{\mathrm{T}}P(\hat{E}\hat{A}^D)-((\hat{E}^D\hat{A})^D)^{\mathrm{T}}P(\hat{E}^D\hat{A})^D\leqslant 0 \tag{3}$$

**证明**　充分性。由条件(2)可以直接得出系统(1)是稳定的，设 $N^{\mathrm{T}}PN=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^{\mathrm{T}} & P_3 \end{bmatrix}$，则

$$(\hat{E}\hat{A}^D)^{\mathrm{T}}P(\hat{E}\hat{A}^D)-((\hat{E}^D\hat{A})^D)^{\mathrm{T}}P(\hat{E}^D\hat{A})^D=$$

$$N^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix} (J^D)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \Lambda^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}N^{\mathrm{T}}PN\begin{bmatrix} J^D & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}N^{-1}-$$

$$N^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix} (J^D)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{\mathrm{T}}PN\begin{bmatrix} J^D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{-1}=$$

$$N^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & (J^D)^{\mathrm{T}}P_2\Lambda \\ \Lambda^{\mathrm{T}}P_2^{\mathrm{T}}J^D & \Lambda^{T}P_3\Lambda \end{bmatrix}N^{-1}\leqslant 0 \tag{4}$$

由(4)式可知 $\Lambda^{\mathrm{T}}P_3\Lambda\leqslant 0$，又由于 $P_3>0$，所以 $\Lambda^{\mathrm{T}}P_3\Lambda\geqslant 0$，因此 $\Lambda^{\mathrm{T}}P_3\Lambda=0$，则可得到 $\Lambda=0$，即系统(1)是可容许的。

必要性。系统(1)是可容许的，则系统(1)是稳定的，由文献[8]的定理 4.8 知，存在一个对角正定矩阵 $P$ 使得(2)式成立。

又由于系统(1)是因果的，因此

$$(\hat{E}\hat{A}^D)^{\mathrm{T}}P(\hat{E}\hat{A}^D)-((\hat{E}^D\hat{A})^D)^{\mathrm{T}}P(\hat{E}^D\hat{A})^D=$$

$$N^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix} (J^D)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{\mathrm{T}}PN\begin{bmatrix} J^D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{-1}-$$

$$N^{-\mathrm{T}}\begin{bmatrix} (J^D)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{\mathrm{T}}PN\begin{bmatrix} J^D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N^{-1}\leqslant 0$$

即(4)式成立。　　证毕

接下来通过构造一个广义 Lyapunov 方程给出正离散奇异系统可容许性的一个充要条件。

**引理 4**[11]　如果矩阵 $A$ 的每一行每一列只有一个正元素，其余元素均是 0，则称矩阵 $A$ 是单项矩阵，而且 $A^{-1}\geqslant\geqslant 0$ 也是一个单项矩阵。

**定义 3**　设系统(1)是正则的，如果存在两个单项矩阵 $H,Q$，使得 $E$ 和 $A$ 有下面的分解

$$E=H\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}Q,A=H\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}Q$$

其中 $A_1\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$，$\Lambda\in\mathbf{R}^{n_2\times n_2}$，$\Lambda$ 是幂零的且幂零指数为 $\nu$，$n_1+n_2=n$，称这样的一个分解为单项分解。

记 $\overline{E}=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}$，$\overline{A}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$，称 $(\overline{E},\overline{A})$ 为 $(E,A)$ 的单项形式。由于 $H,Q$ 都是单项矩阵，所以系统(1)的非负性等价于系统 $(\overline{E},\overline{A})$ 的非负性。

**定理 2**　设系统(1)是正则的且存在一个单项分解，当系统(1)是正系统时，系统(1)是可容许的当且

仅当对任意给定的正定矩阵 $Y$，存在对角半正定矩阵 $X$ 满足 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}XA-E^{\mathrm{T}}XE+E^{\mathrm{T}}YE=0 \tag{5}$$

和秩条件 $\operatorname{rank}(E^{\mathrm{T}}XE)=r$。

**证明** 充分性。系统$(\bar{E},\bar{A})$是由系统(1)通过单项分解得到的，所以系统$(\bar{E},\bar{A})$和系统(1)具有相同的非负性，由于系统$(\bar{E},\bar{A})$是正系统，且通过直接计算得到$\bar{E}^{D}\bar{E}\geqslant\geqslant 0,\bar{E}\bar{A}=\bar{A}\bar{E}$，所以$\bar{E}^{D}\bar{A}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant\geqslant 0$，即 $A_1\geqslant\geqslant 0$。

记 $\bar{X}=H^{\mathrm{T}}XH,\bar{Y}=H^{\mathrm{T}}YH=\begin{bmatrix}Y_1 & Y_2\\ Y_2^{\mathrm{T}} & Y_3\end{bmatrix}$，由于 $H$ 是单项矩阵，$X$ 是对角半正定矩阵，定义

$$H^{\mathrm{T}}=[h_1e_{i1},h_2e_{i2},\cdots,h_ne_{in}]^{\mathrm{T}}$$
$$X=[x_1e_1,x_2e_2,\cdots,x_ne_n]$$

其中 $e_i$ 是 $n\times 1$ 维列向量，第 $i$ 个位置元素为 1，其余位置元素都为零。$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个置换，所以 $\bar{X}=H^{\mathrm{T}}XH=$

$$\begin{bmatrix}h_1^2x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & h_2^2x_2 & 0 & 0\\ \square & \square & \square & \square\\ 0 & \cdots & 0 & h_n^2x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & X_3\end{bmatrix}$$

因此(5)式可重新写成下面的形式

$$Q^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm{T}}X_1A_1-X_1+Y_1 & Y_2\Lambda\\ \Lambda^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & X_3-\Lambda^{\mathrm{T}}X_3\Lambda+\Lambda^{\mathrm{T}}Y_3\Lambda\end{bmatrix}Q=0$$

即为

$$\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm{T}}X_1A_1-X_1+Y_1 & Y_2\Lambda\\ \Lambda^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} & X_3-\Lambda^{\mathrm{T}}X_3\Lambda+\Lambda^{\mathrm{T}}Y_3\Lambda\end{bmatrix}=0 \tag{6}$$

由(6)式中的(2,2)块知

$$X_3=\Lambda^{\mathrm{T}}X_3\Lambda-\Lambda^{\mathrm{T}}Y_3\Lambda\leqslant$$
$$(\Lambda^{v})^{\mathrm{T}}X_3\Lambda^{v}-(\Lambda^{v})^{\mathrm{T}}Y_3\Lambda^{v}=0$$

即 $X_3\leqslant 0$，又由于 $X_3\geqslant 0$，所以 $X_3=0$。

又由 $X\geqslant 0,E^{\mathrm{T}}XE\geqslant 0$ 及秩条件

$$\operatorname{rank}(E^{\mathrm{T}}XE)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=r$$

得到 $X_1>0$，且是对角的，进一步根据

$$\operatorname{rank}(E^{\mathrm{T}}XE)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=$$
$$\operatorname{rank}(I_{n_1})+\operatorname{rank}(\Lambda)=r$$

得到 $\Lambda=0$，则该系统具有因果性。

再由(6)式的(1,1)块得

$$A_1^{\mathrm{T}}X_1A_1-X_1+Y_1=0$$

其中 $A_1\geqslant\geqslant 0,X_1>0$ 且为对角的，$Y_1$ 是正定的，根据引理 1 可知 $A_1$ 是渐近稳定矩阵，所以系统(1)是稳定的。

必要性。系统(1)是可容许的，则 $\Lambda=0$ 且系统(1)的所有特征根的模都小于 1，由引理 1 知，对任意的正定矩阵 $Y_1$，都存在对角正定矩阵 $X_1$，使得 $A_1^{\mathrm{T}}X_1A_1-X_1+Y_1=0$ 成立。

设 $\bar{X}=\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\bar{Y}=\begin{bmatrix}Y_1 & Y_2\\ Y_2^{\mathrm{T}} & Y_3\end{bmatrix}$，其中 $X_1$ 是对角正定矩阵，$\bar{Y}$ 是正定矩阵，因此

$$A^{\mathrm{T}}XA-E^{\mathrm{T}}XE+E^{\mathrm{T}}YE=\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}-$$
$$\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1 & Y_2\\ Y_2^{\mathrm{T}} & Y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

由系统(1)是因果的可知

$$\operatorname{rank}(E)=\operatorname{rank}(I_{n_1})=r$$

又因为 $X_1>0$，所以 $\operatorname{rank}(X_1)=\operatorname{rank}(I_{n_1})$，则可得到 $\operatorname{rank}(E^{\mathrm{T}}XE)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=r$。 证毕

**例** 考虑具有如下参数矩阵的一个离散奇异系统

$$E=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\bar{E}\bar{E}^{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\bar{E}^{D}\bar{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

计算可得 $\bar{E}\bar{E}^{D}\geqslant\geqslant 0,\bar{E}^{D}\bar{A}\geqslant\geqslant 0$，通过解定理 1 的线性矩阵不等式得到一个可行解 $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$。进一步，存在两个单项矩阵 $H=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$，使得 $E=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ 成立，通过解定理 2 的广义 Lyapunov 等式得到一个可行解

$$X=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 9.778 & 0\\ 0 & 0 & 1.333\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1.333\\ 0 & -1.333 & 1\end{bmatrix}$$

## 3 结论

本文讨论了离散时间正奇义系统的可容许性，根据离散时间正奇异系统稳定的一个不等式，利用线性矩阵不等式，给出了离散时间正奇义系统可容许的一个充要条件，进一步讨论了如果一个离散时间正奇异系统存在单项分解，通过构造一个广义的 Lyapunov 方程，给出它可容许的一个充要条件，最后给出实例验证所给定理的可行性。

## 参考文献：

[1] Farina L, Rinaldi S. Positive linear systems: theory and applications[M]. New York: Wiley, 2000.

[2] Canto B, Coll C, Sanchez E. Positive solutions of a discrete-time descriptor system[J]. International Journal of Systems Science, 2008, 39: 81-88.

[3] Liu C, Zhang Q L, Feng Y F, et al. Complex dynamics in a harvested differential-algebraic ecoepidemiological model[J]. International Journal of Information and Systems Sciences, 2009, 5(3/4): 311-324.

[4] Coxson P G, Shapiro H. Positive input reachability and controllability of positive systems[J]. Linear Algebra and its Applications, 1987, 94: 35-53.

[5] Dai L. Descriptor control systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[6] Haddad W M, Chellaboina V, August E. Stability and dissipativity theory for discrete-time nonnegative and compartmental dynamical systems[J]. International Journal of Control, 2003, 76: 1845-1861.

[7] Bru R, Coll C, Sanchez E. Structural properties of positive linear time-invariant difference-algebraic equations[J]. Linear Algebra and its Applications, 2003, 349: 1-10.

[8] Virnik E. Stability analysis of positive descriptor systems[J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 429: 2640-2659.

[9] Virnik E. Analysis of positive descriptor systems: topics in systems and control theory[M]. German: VDM Publishing, 2008.

[10] Herrero A, Ramrez A, Thome N. Nonnegative of control singular systems via state-feedbacks[C]//Commault C, Marchand N. Positive systems. Berlin: Springer-Verlag, 2006: 25-32.

[11] Zhang Y M, Zhang Q L, Tanaka T, et al. Admissibility for positive continuous-time descriptor systems[J]. International Journal of Systems Science, DOI: 10.1080/00207721.2012.685200.

[12] 龚文振. 离散不确定广义系统的鲁棒稳定性: LMI 条件[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2009, 37: 16-19.
Gong W Z. The robust stability of discrete – time uncertain singular systems: LMI conditions[J]. Journal of Shaanxi Normal University: Natural Science Edition, 2009, 37(1): 16-19.

[13] Xu S Y, Lam J. Robust control and filtering of singular systems[M]. Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[14] 肖小庆，周磊，陆国平. 李普希兹离散非线性奇异系统的广义二次镇定[J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2009, 31(5): 63-66.
Xiao X Q, Zhou L, Lu G P. Generalized quadratic stabilization of Lipschitz discrete nonlinear singular systems[J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition, 2009, 31(5): 63-66.

# Admissibility Analysis of Positive Discrete-time Descriptor System

HUANG Li-qiong, WU Bao-wei, LIU Li-li

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

**Abstract**: The admissibility of positive discrete-time singular system is discussed in this paper, if a system is regular, causal, stable, we call it admissible. Firstly, according to the Lyapunov inequality $(\hat{E}^D\hat{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\hat{E}^D\hat{A})-\boldsymbol{P}<0$, which is a condition of stability for the positive discrete-time singular system, a necessary and sufficient condition for the system to be admissible are expressed in Linear Matrix Inequalities terms. Furthermore, suppose the system has a monomial decomposition, it is admissible if and only if there exists a positive definite diagonal matrix $\boldsymbol{X}$ and a positive definite matrix $\boldsymbol{Y}$ such that $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XA}-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XE}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{YE}=0$ and $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{XE})=r$, Finally, numerical example is given to illustrate the validity of the proposed conditions.

**Key words**: positive singular system; causality; stability; admissibility

（责任编辑　黄　颖）