2013 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2013
第 30 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 2

DOI: 10.11721/cqnuj20130211

关于一些交错单群的新刻画*

何立官[1,2]，陈贵云[2]
(1. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715)

摘要：设 $\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合，$k_1(G)$，$k_2(G)$ 分别表示 G 中最高阶元素的阶和次高阶元素的阶。V. D. Mazurov 等人 2009 年证明了用元素阶集合 $\pi_e(G)$ 和群的阶 $|G|$ 刻画有限单群。本文试图用更少的数量刻画交错单群，并证明了：1) 设 G 为有限群，M 为交错单群 $A_n(n=5,6,7,9,10,11,13)$，则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$，且 $k_1(G)=k_1(M)$；2) 设 G 为有限群，M 为交错单群 $A_n(n=8,12)$，则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$，且 $k_i(G)=k_i(M)$，$i=1,2$。

关键词：有限群；最高阶元素的阶；次高阶元素的阶；交错单群；刻画

中图分类号：O152.1 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6693(2013)02-0046-04

本文所讨论的群均为有限群，$\pi_e(G)$ 表示群 G 的元素阶的集合，$k_1(G)$ 表示群 G 中最高阶元素的阶，$k_2(G)$ 表示群 G 中次高阶元素的阶。设 k 为一正整数，$\pi(k)$ 表示 k 的素因子之集，特别地 $\pi(G)=\pi(|G|)$。用 $\Gamma(G)$ 表示 G 的素图，$t(G)$ 表示 G 的素图连通分支数，$\pi_i(i=1,2,\cdots,t(G))$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支所含顶点之集。如果 $2\mid |G|$，则总设 $2\in\pi_1$[1]，其余符号及术语是标准的。

众所周知，在过去 30 年里用群的阶和元素阶的集合刻画有限单群一直是单群数量刻画领域中的一个重要的课题。课题的提出者施武杰教授及其学生对该课题做了大量的工作，并证明了几乎所有有限单群都可以通过群的阶与元素阶之集合唯一刻画[2-8]。2009 年俄罗斯数学家 V. D. Mazurov 等人在施武杰教授工作的基础上最终完成课题的证明[9]。笔者试图用更少数量去刻画有限单群，并用群的阶与最高阶元素的阶(少数情况下用到次高阶元素的阶)刻画了单 K_3-群、单 K_4-群、散在单群、部分李型单群和部分对称群[10-13]。而本文继续这一工作，只用群的阶、最高阶元的阶和次高阶元素的阶刻画了交错单群 $A_n(n\leqslant 13)$。

1 主要引理

引理 1[1] 设 G 的素图分支大于 1，则 G 的结构是如下之一：

1) G 是 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群；

2) G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $\left|G/K\right|\,\Big|\,\left|Out(K/H)\right|$。

引理 2[14] 设 G 是偶阶 Frobenius 群，K 是 Frobenius 核，H 是 Frobenius 补，则

$$t(G)=2 \text{ 且 } \Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$$

引理 3[14] 设 G 是偶阶 2-Frobenius 群，则 $t(G)=2$，且 G 有正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得

$$\pi(K/H)=\pi_2,\ \pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$$

G/K 和 K/H 均为循环群且满足 $\left|G/K\right|\,\Big|\,\left|Aut(K/H)\right|$。特别地 $\left|G/K\right|<\left|K/H\right|$，$G$ 可解。

引理 4[15] 设 π'群 H 作用在 π 群 G 上，且 G 和 H 中至少有一个可解。则对任意素数 $p\mid |G|$，G 中存在 H 不

* 收稿日期：2012-06-06 修回日期：2012-07-20 网络出版时间：2013-03-16 13:37
资助项目：国家自然科学基金(No. 11271301；No. 11171364)；重庆市自然科学基金(No. CSTC2011jjA00020；No. 2009bb8111)；重庆教委科技项目(No. KJ110609)；重庆师范大学科研基金项目(No. 12XLB029；No. 10XLZ001)
作者简介：何立官，男，讲师，博士，研究方向为有限群，E-mail：guanlihe@126.com；通讯作者：陈贵云，E-mail：gychen@swnu.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130316.1337.201302.46_011.html

变的 p-Sylow 子群。

引理 5[16]　设 G 是交错单群 $A_n(n\leqslant 13)$,则 $|G|$,$k_1(G)$ 和 $k_2(G)$ 如表 1。

2 定理及其证明

表 1　$A_n(n\leqslant 13)$ 的阶及高阶与次高阶元的阶

G	$\lvert G\rvert$	$k_1(G)$	$k_2(G)$
A_5	$2^2\cdot 3\cdot 5$	5	3
A_6	$2^3\cdot 3^2\cdot 5$	5	4
A_7	$2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$	7	6
A_8	$2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$	15	7
A_9	$2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$	15	12
A_{10}	$2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$	21	15
A_{11}	$2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$	21	20
A_{12}	$2^9\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$	35	30
A_{13}	$2^9\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$	35	30

定理 1　设 G 为有限群,M 为交错单群 A_n,其中 $n=5,6,7,9,10,11,13$。则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$,且 $k_1(G)=k_1(M)$。

证明　必要性显然,下证充分性。先讨论 $M=A_5,A_6,A_7,A_{11}$ 的情形。因为方法类似,所以只考虑 $M=A_5,A_7$。

当 $M=A_5$ 时,由引理 5 知 $|G|=2^2\cdot 3\cdot 5$,$k_1(G)=5$。因为 $k_1(G)=5$,所以 5 是素图 $\Gamma(G)$ 的孤立点,从而 $t(G)\geqslant 2$。由引理 1 知 G 是 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群,或者 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得 H 和 G/K 是 π_1-群,K/H 是非交换单群,其中 $2\in\pi_1$。H 为幂零群,而且 $\left|G/K\right|\,\Big|\,\left|Out\left(K/H\right)\right|$。

首先,如果 G 是 Frobenius 群,则由引理 2 知

$$t(G)=2 \text{ 且 } \Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$$

其中 K 是 Frobenius 核,H 是 Frobenius 补。于是 K 要么为 $\{2,3\}$-Hall 子群,要么为 5-Sylow-子群。设 S 为 K 的一个 Sylow-子群。因为 K 幂零,所以 $|H|\,|\,(|S|-1)$。于是可以选择 K 的适当的 Sylow-子群 S 使得 $|H|$ 不整除 $|S|-1$,从而得出矛盾。因此 K 不能为 5-Sylow-子群。从而 K 为 $\{2,3\}$-Hall 子群。考虑 K 的 3-Sylow-子群,则有 $5\,|\,2$,矛盾。故 G 不是 Frobenius 群。

其次,如果 G 是 2-Frobenius 群,则由引理 3 知 $t(G)=2$,且 G 有正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得

$$\pi\left(K/H\right)=\pi_2,\ \pi(H)\cup\pi\left(G/K\right)=\pi_1,\ \left|G/K\right|\,\Big|\,\left|Aut\left(K/H\right)\right|$$

因为 5 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点,所以 $\pi_2=\{5\}$。因此 $\pi(H)\cup\pi\left(G/K\right)=\{2,3\}$,且 $\left|K/H\right|=5$。

又因为 $\left|G/K\right|\,\Big|\,\left|Aut\left(K/H\right)\right|=4$,所以 $3\,|\,|H|$。用 G 中的 5 阶元共轭作用在 H 上,由引理 4 知存在 H 的 3-Sylow 子群 L 在该作用下不变。因为 $|L|=3$,所以有 5 不整除 $|Aut(L)|$。故该作用只能是平凡作用,这说明 G 中有 15 阶元,矛盾。因此,G 不是 2-Frobenius 群。

于是 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得 H 和 G/K 是 π_1 群,K/H 是非交换单群,其中 $2\in\pi_1$。H 为幂零群,而且 $\left|G/K\right|\,\Big|\,\left|Out\left(K/H\right)\right|$。由 $|G|=2^2\cdot 3\cdot 5$ 知 K/H 只能同构于 A_5,因此 $K=G$,$H=1$,即 $G\cong A_5$。

当 $M=A_7$ 时,由引理 5 知 $|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$,$k_1(G)=7$。因为 $k_1(G)=7$,所以 7 是素图 $\Gamma(G)$ 的孤立点,从而 $t(G)\geqslant 2$。类似情形 $M=A_5$ 的讨论知 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得 H 和 G/K 是 π_1 群,K/H 是非交换单群,其中 $2\in\pi_1$。H 为幂零群,而且 $\left|G/K\right|\,\Big|\,\left|Out\left(K/H\right)\right|$。由于 7 是 $\Gamma(G)$ 孤立点,故 $7\in\pi\left(K/H\right)$。由文献[16]知 K/H 同构于 $L_2(7)$,$L_2(8)$ 或 A_7。

设 $K/H\cong L_2(7)$ 或 $L_2(8)$,由文献[16]知 $5\,|\,|H|$。设 L 为 H 的 5-Sylow 子群,则 $|L|=5$,且 $L\lhd G$。用 G 的 7 阶元共轭作用在 L 上,该作用平凡,G 中有 35 阶元,矛盾。

于是 $K/H\cong A_7$,因此 $K=G$,$H=1$,即 $G\cong A_7$。

下面考虑情形 $M=A_9,A_{10},A_{13}$。因为方法类似,只考虑 $M=A_9,A_{10}$ 的情形。

当 $M=A_9$ 时,由引理5知 $|G|=2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$,$k_1(G)=15$。易证 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 使得 K/H 为非交换单群,且 $\{5,7\}\subseteq\pi(K/H)$。事实上,令

$$1=G_k\lhd G_{k-1}\lhd\cdots\lhd G_1\lhd G_0=G$$

为 G 的一主群列,则存在正整数 i 使得 $\{5,7\}\cap\pi(G_i)\neq\varnothing$,而 $\{5,7\}\cap\pi(G_{i+1})=\varnothing$。取 $K=G_i$,$H=G_{i+1}$,则 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 为 G 的正规列,而 K/H 为 G/H 的极小正规子群。断言 $\{5,7\}\subseteq\pi(K)$。如果 $7\in\pi(K)$ 而 $5\notin\pi(K)$,那么 $5\in\pi(G/H)$。由 Frattini 论断有 $G=N_G(S_7)K$,其中 S_7 为 K 的一个的7-Sylow 子群。于是 $5\in\pi(N_G(S_7))$,从而 G 中有35阶子群,矛盾,故 $5\in\pi(K)$。同理可以证明当 $5\in\pi(K)$ 时,$7\in\pi(K)$。所以 $\{5,7\}\subseteq\pi(K)$,因此 $\{5,7\}\subseteq\pi(K/H)$。由于 K/H 为同构单群的直积,故 K/H 只能为非交换单群。而 $\left|K/H\right|\,\Big|\,2^6\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$。由文献[16]知 K/H 同构于 $A_7,A_8,L_3(4)$ 或 A_9。设 K/H 同构于 $A_7,A_8,L_3(4)$,令 $\overline{K}=K/H$,考虑 G 作用在 $\overline{K}$ 上,则 $G/C_G(\overline{K})$ 同构于 $Aut(\overline{K})$ 的一子群,从而有 $\left|G/C_G(\overline{K})\right|\,\Big|\,\left|Aut(\overline{K})\right|$。于是有 $3\in\pi(C_G(\overline{K}))$,即说明 $\overline{G}=G/H$ 中有21阶元,矛盾。故 $K/H\cong A_9$,因此 $K=G$,$H=1$,即 $G\cong A_9$。

当 $M=A_{10}$ 时,由引理5知 $|G|=2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$,$k_1(G)=21$。类似情形 $M=A_9$ 的讨论知 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 使得 K/H 为非交换单群,且 $\{5,7\}\subseteq\pi(K/H)$。而 $\left|K/H\right|\,\Big|\,2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$,由文献[16]知 K/H 同构于 A_7,$A_8,L_3(4),A_9,J_2$ 或 A_{10}。设 K/H 同构于 $A_7,A_8,L_3(4),A_9$。令 $\overline{K}=K/H$。考虑 G 作用在 $\overline{K}$ 上,则 $G/C_G(\overline{K})$ 同构于 $Aut(\overline{K})$ 的一子群,从而有 $\left|G/C_G(\overline{K})\right|\,\Big|\,\left|Aut(\overline{K})\right|$。于是有 $5\in\pi(C_G(\overline{K}))$,即说明 $\overline{G}=G/H$ 中有35阶元,矛盾。设 $K/H\cong J_2$,此时有 $3\in\pi(C_G(\overline{K}))$。又因为 J_2 中有10阶元,所以 $\overline{G}=G/H$ 中有30阶元,矛盾。故 $K/H\cong A_{10}$,因此 $K=G$,$H=1$,即 $G\cong A_{10}$。 证毕

定理2 设 G 为有限群,M 为交错单群 A_n,其中 $n=8,12$。则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$,且 $k_i(G)=k_i(M)$,$i=1,2$。

证明 必要性显然,下证充分性。因为证明方法类似,在此只讨论 $M=A_{12}$ 的情形。此时

$$|G|=2^9\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11,\ k_1(G)=35,k_2(G)=30$$

类似定理1中情形 $M=A_9$ 的讨论知 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 使得 K/H 为非交换单群,且 $\{5,11\}\subseteq\pi(K/H)$。由文献[16]知 K/H 同构于 M_{22},A_{11} 或 A_{12}。

设 K/H 同构于 M_{22},A_{11},令 $\overline{K}=K/H$,考类 G 作用在 $\overline{K}$ 上,则 $G/C_G(\overline{K})$ 同构于 $Aut(\overline{K})$ 的一子群,从而有 $\left|G/C_G(\overline{K})\right|\,\Big|\,\left|Aut(\overline{K})\right|$。于是有 $3\in\pi(C_G(\overline{K}))$,即说明 $\overline{G}=G/H$ 中有33阶元,与 $k_1(G)=35$,$k_2(G)=30$ 矛盾。故 $K/H\cong A_{12}$,因此 $K=G$,$H=1$,即 $G\cong A_{12}$。 证毕

作为定理1和定理2的推论,有定理3。

定理3 设 G 为有限群,M 为交错单群 A_n,其中 $n\leqslant 13$。则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$,且 $\pi_e(G)=\pi_e(M)$。

参考文献:

[1] Williams J S. Prime graph components of finite group [J]. J Alg,1981,69:487-513.

[2] Shi W J. A new characterization of the sporadic simple groups [C]//Cheng K N, Leong Y K. Proceedings of the 1987 Singapore group theory conference. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1989: 531-540.

[3] Shi W J, Bi J X. A characterization of the alternating groups [J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 1992, 16(1): 81-90.

[4] Shi W J, Bi J X. A characterization of Suzuki-Reegroups [J]. Science in China, Ser A, 1991, 34(1): 14-19.

[5] Shi W J, Bi J X. A characteristic property for each finite projective special linear group [J]. Lecture Notes in Math, 1990, 1456: 171-180.

[6] Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups [J]. Progress in Nature Science, 1994, 4(3): 316-326.

[7] Cao H P, Shi W J. Pure quantitative characterization of finite projective special unitary groups [J]. Science in China, Ser A, 2002, 45: 761-772.

[8] Xu M C, Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd) [J]. Algebra Colloquium, 2003, 10: 427-443.

[9] Vasil'ev A V, Grechkoseeva M A, Mazurov V D. Characterization of the finite simple groups by spectrum and order [J]. Algebra and Logic, 2009, 48(6): 385-409.

[10] He L G, Chen G Y. A new characterization of $L_2(q)$ where $q \leqslant 125$ [J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2011(28): 127-136.

[11] 何立官，陈贵云. 关于 $L_3(q)(q\leqslant 8)$ 和 $U_3(q)(q\leqslant 11)$ 的新刻画[J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(10)：81-87.

He L G, Chen G Y. A new characterization of $L_3(q)$ ($q\leqslant 8$) and $U_3(q)$ ($q\leqslant 11$) [J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition, 2011, 33(10): 81-87.

[12] 何立官. 群的阶及最高阶元素的阶与群结构[D]. 重庆：西南大学，2012.

He L G. The relationship between the structure of a finite group and its order and largest element order [D]. Chongqing: Southwest University, 2012.

[13] 何立官，陈贵云. 关于一些单群的新刻画[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2012，35(5)：589-598.

He L G, Chen G Y. A new characterization of some simple groups [J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2012, 35(5): 589-598.

[14] 陈贵云. 关于 Frobenius 群和 2-Frobenius 群[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，1995，20(5)：485-487.

Chen G Y. On structure of Frobenius group and 2-Frobenius group [J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science Edition, 1995, 20(5): 485-487.

[15] 徐明曜. 有限群导引(下册)[M]. 北京：科学出版社，1999.

Xu M Y. Introduction of theory of finite groups 2 [M]. Beijing: Science Press, 1999.

[16] Conway J H, Curtis R T, Norton S P, et al. ATLAS of finite groups [M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.

A New Characterization of Some Alternating Groups

HE Li-guan[1,2], CHEN Gui-yun[2]

(1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: Let G be a finite group, $\pi_e(G)$ denote the set of orders of elements in G, $k_1(G)$ denote the largest element order of G, and $k_2(G)$, the second largest element order. It is a well-known topic to characterize a finite simple group by using two quantities, the order of G and $\pi_e(G)$ in the past 30 years. In 2009, this topic has been finished by V. D. Mazurov, et al. This paper will try to characterize some alternating groups by using less quantities and proves that: 1) Let G be a finite group, M be alternating group A_n ($n=5, 6, 7, 9, 10, 11, 13$). Then $G\cong M$ if and only if $|G| = |M|$, and $k_1(G) = k_1(M)$; 2) Let G be a finite group, M be alternating group A_n ($n=8, 12$). Then $G\cong M$ if and only if $|G| = |M|$, and $k_i(G) = k_i(M)$, where $i=1, 2$.

Key words: finite group; the largest element order; the second largest element order; alternating group; characterization

(责任编辑　黄　颖)