运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130301

关于极大极小分式规划的一个二阶对偶*

焦合华

(长江师范学院 数学与计算机学院，重庆 涪陵 408100)

摘要：本文研究了一类广义极大极小分式规划问题(P)。利用二阶(F,α,ρ,d)-I 型函数和(F,α,ρ,θ)-d-V 一致不变凸函数，引入了二阶(F,α,ρ,θ)伪拟 d-V-I 型一致不变凸函数和二阶(F,α,ρ,θ)严格伪拟 d-V-I 型一致不变凸函数的概念，并建立了该极大极小分式规划问题(P)的一个二阶对偶模型(D)。最后，在此二阶广义(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸性条件下，并利用函数 F 的次线性，得到了规划问题(P)和对偶问题(D)的弱对偶定理，强对偶定理和严格逆对偶定理。本文所得结果改进和推广了以前文献的一些相应结果。

关键词：极大极小规划；分式规划；二阶对偶；广义(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸

中图分类号：O221.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2013)03-0001-04

极大极小分式规划是数学规划的重要类型之一，它在多目标规划、选择投资组合及工程设计等方面都有重要应用。一直以来，对极大极小分式规划的最优性条件和对偶性研究是最优化理论的热门领域之一。

本文讨论如下广义极大极小分式规划问题

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min\limits_{x\in S}\sup\limits_{y\in Y}\dfrac{f(x,y)}{h(x,y)}\\ \text{s. t.}\qquad g(x)\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $S=\{x\in X:g(x)\leqslant 0\}$为规划(P)的可行集，$X$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的开子集，Y 为 $\mathbf{R}^l$ 的紧子集，设 $f,h:X\times Y\to\mathbf{R}$ 和 $g:X\to\mathbf{R}^m$ 关于 x 的一、二阶偏导数均连续，并且对 $\forall(x,y)\in S\times Y,f(x,y)\geqslant 0,h(x,y)>0$。

Yadav 和 Mukherjee[1] 为可微的凸极大极小分式规划问题(P)建立了 2 个对偶模型，并得到了一些对偶结果。Chandra 和 Kumar[2] 改进了文献[1]中规划问题(P)的 2 个对偶模型，并获得了几个对偶结果。之后，许多学者在各种广义凸性条件下建立了规划(P)的最优性条件和对偶定理[3-5]。

二阶对偶相对于一阶对偶而言具有计算上的优势。1975 年，Mangasarian[6] 首先在一类非线性规划中建立了二阶对偶模型，并得到了一些对偶结果。Bector 等[7] 在一类广义不变凸性条件下建立了极大极小规划的二阶对偶定理。Liu[8] 利用二阶广义 B-不变凸推广了文献[7]中相应结果。Husain 等[9] 在一类广义凸性条件下，分别证明了不可微极大极小规划的 Mond-Weir 型和 Mangasarian 型二阶对偶定理。最近，Husain 等[10] 以及 Sharma 和 Gulati[11] 分别利用 2 种不同广义凸性建立了极大极小分式规划问题(P)的二阶对偶定理。

Ahmad 等[12] 在二阶(F,α,ρ,d)-I 型条件下，证明了一类不可微极大极小规划的二阶 Mond-Weir 型和 Wolfe 型对偶定理。而 Jayswal 等[13] 利用(F,α,ρ,θ)-d-V 一致不变凸性，得到了一类非光滑多目标规划问题的一些最优性充分条件和 Mond-Weir 型对偶定理。

本文受文献[10-13]中工作的启发，结合二阶(F,α,ρ,d)-I 型函数和(F,α,ρ,θ)-d-V 一致不变凸函数，引入二阶(F,α,ρ,θ)(严格)伪拟 d-V-I 型一致不变凸的概念，建立极大极小分式规划问题(P)的一个二阶对偶模型，并在此二阶广义 I 型一致不变凸性条件下，讨论其弱对偶，强对偶和严格逆对偶定理。

1 预备知识

设 $M=\{1,2,\cdots,m\}$，对任意的 $x\in S$，规定

$$J(x)=\{j\in M:g_j(x)=0\}$$

$$Y(x)=\left\{y\in Y:\frac{f(x,y)}{h(x,y)}=\sup_{z\in Y}\frac{f(x,z)}{h(x,z)}\right\}$$

$$K(x)=\{(s,t,u)\in N\times\mathbf{R}_+^s\times\mathbf{R}^{ls}:1\leqslant s\leqslant n+1,$$
$$t=(t_1,t_2,\cdots,t_s)\in\mathbf{R}_+^s,\sum_{i=1}^s t_i=1,u=(y_1,y_2,\cdots,y_s),$$
$$y_i\in Y(x),i=1,2,\cdots,s\}$$

---

* 收稿日期：2012-12-31　　网络出版时间：2013-05-20 18:04

资助项目：国家自然科学基金(No. 60974082)；重庆市教委科学研究项目(No. KJ121302；No. KJ131314)

作者简介：焦合华，男，副教授，博士研究生，研究方向为最优化理论及其应用，E-mail:jiaohh361@126.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130520.1804.201303.1_001.html

定义 1[12]　称函数 $F: X\times X\times \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 关于第三变元是次线性的，如果对 $\forall x,\bar{x}\in X$，有

1)　$F(x,\bar{x};\gamma_1+\gamma_2)\leqslant F(x,\bar{x};\gamma_1)+F(x,\bar{x};\gamma_2)$，$\forall \gamma_1,\gamma_2\in\mathbf{R}^n$

2)　$F(x,\bar{x};k\gamma)=kF(x,\bar{x};\gamma)$　$\forall k\in\mathbf{R}_+,\gamma\in\mathbf{R}^n$

注　由2)可知，$F(x,\bar{x};0)=0$，并由1)可得

$$-F(x,\bar{x};-\gamma)\leqslant F(x,\bar{x};\gamma),\ \forall \gamma\in\mathbf{R}^n$$

设 $\alpha=(\alpha^0,\alpha^1):(X\times X)\to\mathbf{R}_+\setminus\{0\}$，$\rho=(\rho^0,\rho^1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，$b_0,b_1:X\times X\to\mathbf{R}_+$，$\phi_0,\phi_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$d:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$(满足 $d(0)=0$)，$\theta:X\times X\to\mathbf{R}_+$(满足 $\theta(x,\bar{x})=0\Leftrightarrow x=\bar{x}$)，并设 $\Psi,\Gamma:X\to\mathbf{R}$ 在 $\bar{x}\in X$ 处都是二阶可微的，符号"∇"表示关于 x 的梯度"∇_x"。

借助二阶(F,α,ρ,d)-I 型函数[12]和(F,α,ρ,θ)-d-V 一致不变凸函数[13]，提出如下概念。

定义 2　称(Ψ,Γ)在 $\bar{x}\in X$ 点是二阶(F,α,ρ,θ)伪拟 d-V-I 型一致不变凸的，若对 $\forall x\in S$，$p\in\mathbf{R}^n$，存在 $d,\theta,b_t,\phi_t,\alpha^t,\rho^t(t=0,1)$和函数 F 使得

$$F(x,\bar{x};\alpha^0(x,\bar{x})\{\nabla\Psi(\bar{x})+\nabla^2\Psi(\bar{x})p\})+\rho^0 d^2(\theta(x,\bar{x}))\geqslant 0\Rightarrow$$

$$b_0(x,\bar{x})\phi_0\left[\Psi(x)-\Psi(\bar{x})+\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\Psi(\bar{x})p\right]\geqslant 0$$

$$-b_1(x,\bar{x})\phi_1\left[\Gamma(\bar{x})-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\Gamma(\bar{x})p\right]\leqslant 0\Rightarrow$$

$$F(x,\bar{x};\alpha^1(x,\bar{x})\{\nabla\Gamma(\bar{x})+\nabla^2\Gamma(\bar{x})p\})+\rho^1 d^2(\theta(x,\bar{x}))\leqslant 0$$

在以上定义中，若

$$F(x,\bar{x};\alpha^0(x,\bar{x})\{\nabla\Psi(\bar{x})+\nabla^2\Psi(\bar{x})p\})+\rho^0 d^2(\theta(x,\bar{x}))\geqslant 0\Rightarrow$$

$$b_0(x,\bar{x})\phi_0\left[\Psi(x)-\Psi(\bar{x})+\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\Psi(\bar{x})p\right]>0$$

则称(Ψ,Γ)在 $\bar{x}\in X$ 点是二阶(F,α,ρ,θ)严格伪拟 d-V-I 型一致不变凸的。

下面定理在证明强对偶定理中是必要的。

定理 1[2]　设 $\bar{x}$ 是规划(P)的一个最优解，并且 $\nabla g_j(\bar{x}),j\in J(\bar{x})$线性独立，则存在$(\bar{s},\bar{t},\bar{u})\in K(\bar{x})$，$\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+$和 $\bar{\mu}\in\mathbf{R}^m_+$使得

$$\nabla\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))+\nabla\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})=0$$

$$f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i)=0,\ i=1,2,\cdots,\bar{s}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})=0$$

2 对偶性

下面建立极大极小分式规划(P)的二阶对偶模型(D)，并在二阶广义(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸条件下证明其弱对偶、强对偶和严格逆对偶定理。

(D)　$\max\limits_{(s,t,u)\in K(z)}\ \sup\limits_{(z,\mu,\lambda,p)\in H(s,t,u)}\lambda$

$$\nabla\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))+\nabla^2\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))p+\nabla\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j(z)+\nabla^2\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j(z)p=0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))+\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(z)-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\left[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))+\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(z)\right]p\geqslant 0 \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J_\beta}\mu_j g_j(z)-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\sum_{j\in J_\beta}\mu_j g_j(z)p\geqslant 0,\ \beta=1,2,\cdots,r \tag{3}$$

$J_\beta\subseteq M,\beta=0,1,2,\cdots,r$ 满足 $\bigcup_{\beta=0}^{r}J_\beta=M$ 且 $J_\beta\cap J_\gamma=\varnothing$，如果 $\beta\neq\gamma$。

其中，对$(s,t,u)\in K(z)$，$H(s,t,u)$是满足以上关系(1)～(3)式的所有点$(z,\mu,\lambda,p)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m_+\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n$的集合。

若对某$(s,t,u)\in K(z)$，$H(s,t,u)=\varnothing$，则定义 $\sup\limits_{H(s,t,u)}\lambda=-\infty$。

定理 2　(弱对偶)设 x 和(z,μ,λ,s,t,u,p)分别为规划(P)和对偶(D)的可行解，并且

1)对 $\forall\beta=1,2,\cdots,r$，若

$$\left[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(\cdot,y_i)-\lambda h(\cdot,y_i))+\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(\cdot),\sum_{j\in J_\beta}\mu_j g_j(\cdot)\right]$$

在 z 点是二阶(F,α,ρ,θ)伪拟 d-V-I 型一致不变凸；

2) $\phi_0(a)\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 0$，$a\geqslant 0\Rightarrow\phi_1(a)\geqslant 0$，$b_0(x,z)>0$，$b_1(x,z)\geqslant 0$；

3) $\alpha^0(x,z)=\alpha^1(x,z)$，$\rho^0\geqslant -r\rho^1$，则 $\sup\limits_{y\in Y}\dfrac{f(x,y)}{h(x,y)}\geqslant\lambda$。

证明　因为 $a\geqslant 0\Rightarrow\phi_1(a)\geqslant 0$，$b_1(x,z)\geqslant 0$，所以由(3)式可得

$$-b_1(x,z)\phi_1\left[\sum_{j\in J_\beta}\mu_j g_j(z)-\frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}\nabla^2\sum_{j\in J_\beta}\mu_j g_j(z)p\right]\leqslant 0,\beta=1,2,\cdots,r$$

再由条件1)的第2部分，上式可推得

$$F\left(x,z;\alpha^1(x,z)\left\{\nabla\sum_{j\in J_\beta}\mu_j g_j(z)+\nabla^2\sum_{j\in J_\beta}\mu_j g_j(z)p\right\}\right)+\rho^1 d^2(\theta(x,z))\leqslant 0,\beta=1,2,\cdots,r$$

以上不等式组相加，并结合函数 F 的次线性即定义1的条件1)可得

$$F(x,z;\alpha^1(x,z)\{\nabla\sum_{j\in M\setminus J_0}\mu_j g_j(z)+$$
$$\nabla^2\sum_{j\in M\setminus J_0}\mu_j g_j(z)p\})+r\rho^1 d^2(\theta(x,z))\leqslant 0$$

利用(1)式和 F 的次线性的注，上式又可推得

$$-F(x,z;\alpha^1(x,z)\{\nabla[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(z)]+\nabla^2[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(z)]p\})+r\rho^1 d^2(\theta(x,z))\leqslant 0$$

考虑定理 2 中的条件 3)，可得

$$F(x,z;\alpha^0(x,z)\{\nabla[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(z)]+\nabla^2[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(z)]p\})+\rho^0 d^2(\theta(x,z))\geqslant 0$$

再根据定理 2 中的条件 1)的第 1 部分，又可推得

$$b_0(x,z)\phi_0\{\sum_{i=1}^{s}t_i(f(x,y_i)-\lambda h(x,y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(x)-\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))-$$
$$\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(z)+\frac{1}{2}p^{\mathrm T}\nabla^2[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-$$
$$\lambda h(z,y_i))+\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(z)]p\}\geqslant 0$$

由 $b_0(x,z)>0$，$\phi_0(a)\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 0$ 和(2)式，可得

$$\sum_{i=1}^{s}t_i(f(x,y_i)-\lambda h(x,y_i))+\sum_{j\in J_0}\mu_j g_j(x)\geqslant 0$$

再由 $x\in S$，$\mu\geqslant 0$ 可得

$$\sum_{i=1}^{s}t_i(f(x,y_i)-\lambda h(x,y_i))\geqslant 0$$

因此，存在某个 i_0 使得 $f(x,y_{i_0})-\lambda h(x,y_{i_0})\geqslant 0$。所以 $\sup_{y\in Y}\frac{f(x,y)}{h(x,y)}\geqslant\frac{f(x,y_{i_0})}{h(x,y_{i_0})}\geqslant\lambda$。　　证毕

定理 3　(强对偶)设 $\bar x$ 是规划(P)的一个最优解，且 $\nabla g_j(\bar x)$，$j\in J(\bar x)$ 线性独立，则存在 $(\bar s,\bar t,\bar u)\in K(\bar x)$ 和 $(\bar x,\bar\mu,\bar\lambda,\bar p=0)\in H(\bar s,\bar t,\bar u)$ 使得 $(\bar x,\bar\mu,\bar\lambda,\bar s,\bar t,\bar u,\bar p=0)$ 是对偶(D)的一个可行解，且其目标函数值相等。而且，若定理 1 的条件对规划(P)和对偶(D)的所有可行解均成立，则 $(\bar x,\bar\mu,\bar\lambda,\bar s,\bar t,\bar u,\bar p=0)$ 是对偶(D)的一个最优解。

证明　因为 $\bar x$ 是规划(P)的一个最优解，且 $\nabla g_j(\bar x)$，$j\in J(\bar x)$ 线性独立，所以，由定理 1 知，存在 $(\bar s,\bar t,\bar u)\in K(\bar x)$ 和 $(\bar x,\bar\mu,\bar\lambda,\bar p=0)\in H(\bar s,\bar t,\bar u)$ 使得 $(\bar x,\bar\mu,\bar\lambda,\bar s,\bar t,\bar u,\bar p=0)$ 是对偶(D)的一个可行解，且其目标函数值相等。而 $(\bar x,\bar\mu,\bar\lambda,\bar s,\bar t,\bar u,\bar p=0)$ 是对偶(D)的一个最优解由定理 2 直接可得。　　证毕

定理 4　(严格逆对偶)设 $\bar x$ 和 $(\bar z,\bar\mu,\bar\lambda,\bar s,\bar t,\bar u,\bar p)$ 分别是规划(P)和对偶(D)的可行解，如果

1) $\sup_{\bar y\in Y}\frac{f(\bar x,\bar y)}{h(\bar x,\bar y)}=\bar\lambda$；

2) 对 $\forall\beta=1,2,\cdots,r$，$[\sum_{i=1}^{\bar s}\bar t_i(f(\cdot,\bar y_i)-\bar\lambda h(\cdot,\bar y_i))+\sum_{j\in J_0}\bar\mu_j g_j(\cdot),\sum_{j\in J_\beta}\bar\mu_j g_j(\cdot)]$ 在 $\bar z$ 点是二阶 (F,α,ρ,θ) 严格伪拟 d-V-I 型一致不变凸的；

3) $\phi_0(a)>0\Rightarrow a>0$，$a\geqslant 0\Rightarrow\phi_1(a)\geqslant 0$，$b_0(\bar x,\bar z)>0$，$b_1(\bar x,\bar z)\geqslant 0$；

4) $\alpha^0(\bar x,\bar z)=\alpha^1(\bar x,\bar z)$，$\rho^0\geqslant -r\rho^1$。

则 $\bar x=\bar z$。

证明　(反证法)假设 $\bar x\neq\bar z$，则由(3)式有

$$\sum_{j\in J_\beta}\bar\mu_j g_j(\bar z)-\frac{1}{2}\bar p^{\mathrm T}\nabla^2\sum_{j\in J_\beta}\bar\mu_j g_j(\bar z)\bar p\geqslant 0$$
$$\beta=1,2,\cdots,r$$

由 $a\geqslant 0\Rightarrow\phi_1(a)\geqslant 0$ 和 $b_1(\bar x,\bar z)\geqslant 0$，上式可推得

$$-b_1(\bar x,\bar z)\phi_1\Big[\sum_{j\in J_\beta}\bar\mu_j g_j(\bar z)-$$
$$\frac{1}{2}\bar p^{\mathrm T}\nabla^2\sum_{j\in J_\beta}\bar\mu_j g_j(\bar z)\bar p\Big]\leqslant 0,\beta=1,2,\cdots,r$$

再由条件 2)的第 2 部分可得

$$F(\bar x,\bar z;\alpha^1(\bar x,\bar z)\{\nabla\sum_{j\in J_\beta}\bar\mu_j g_j(\bar z)+\nabla^2\sum_{j\in J_\beta}\bar\mu_j g_j(\bar z)\bar p\})+$$
$$\rho^1 d^2(\theta(\bar x,\bar z))\leqslant 0,\beta=1,2,\cdots,r$$

相加不等式，并由函数 F 的次线性即定义 1 的条件 1)得

$$F(\bar x,\bar z;\alpha^1(\bar x,\bar z)\{\nabla\sum_{j\in M\setminus J_0}\bar\mu_j g_j(\bar z)+$$
$$\nabla^2\sum_{j\in M\setminus J_0}\bar\mu_j g_j(\bar z)\bar p\})+r\rho^1 d^2(\theta(\bar x,\bar z))\leqslant 0$$

利用(1)式和次线性的注可知

$$-F(\bar x,\bar z;\alpha^1(\bar x,\bar z)\{\nabla[\sum_{i=1}^{\bar s}\bar t_i(f(\bar z,\bar y_i)-\bar\lambda h(\bar z,\bar y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\bar\mu_j g_j(\bar z)]+\nabla^2[\sum_{i=1}^{\bar s}\bar t_i(f(\bar z,\bar y_i)-\bar\lambda h(\bar z,\bar y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\bar\mu_j g_j(\bar z)]\bar p\})+r\rho^1 d^2(\theta(\bar x,\bar z))\leqslant 0$$

根据条件 4)有

$$F(\bar x,\bar z;\alpha^0(\bar x,\bar z)\{\nabla[\sum_{i=1}^{\bar s}\bar t_i(f(\bar z,\bar y_i)-\bar\lambda h(\bar z,\bar y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\bar\mu_j g_j(\bar z)]+\nabla^2[\sum_{i=1}^{\bar s}\bar t_i(f(\bar z,\bar y_i)-\bar\lambda h(\bar z,\bar y_i))+$$
$$\sum_{j\in J_0}\bar\mu_j g_j(\bar z)]\bar p\})+\rho^0 d^2(\theta(\bar x,\bar z))\geqslant 0$$

再由条件 2)的第 1 部分可得

$$b_0(\bar{x},\bar{z})\phi_0\{\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))+\sum_{j\in J_0}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})-\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{z},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{z},\bar{y}_i))-\sum_{j\in J_0}\bar{\mu}_j g_j(\bar{z})+\frac{1}{2}\bar{p}^{\mathrm{T}}\nabla^2[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{z},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{z},\bar{y}_i))+\sum_{j\in J_0}\bar{\mu}_j g_j(\bar{z})]\bar{p}\}>0$$

又由 $b_0(\bar{x},\bar{z})>0$，$\phi_0(a)>0\Rightarrow a>0$ 及(2)式得

$$\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))+\sum_{j\in J_0}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})>0$$

因为 $\bar{x}\in S$，$\bar{\mu}\geqslant 0$，可得

$$\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))>0$$

因此，存在 i_0 使得

$$f(\bar{x},\bar{y}_{i_0})-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_{i_0})>0$$

故 $\sup\limits_{\bar{y}\in Y}\dfrac{f(\bar{x},\bar{y})}{h(\bar{x},\bar{y})}\geqslant\dfrac{f(\bar{x},\bar{y}_{i_0})}{h(\bar{x},\bar{y}_{i_0})}>\lambda$，此与条件 1)矛盾。所以 $\bar{x}=\bar{z}$。 证毕

参考文献：

[1] Yadav S R, Mukherjee R N. Duality for fractional minimax programming problems[J]. J Aust Math Soc Ser B, 1990, 31(4): 484-492.

[2] Chandra S, Kumar V. Duality in fractional minimax programming[J]. J Aust Math Soc Ser A, 1995, 58(3): 376-386.

[3] Liu J C, Wu C S. On minimax fractional optimality conditions with invexity[J]. J Math Anal Appl, 1998, 219(1): 21-35.

[4] Ahmad I. Optimality conditions and duality in fractional minimax programming involving generalized ρ-invexity[J]. Inter J Manag Syst, 2003, 19(1): 165-180.

[5] Yang X M, Hou S H. On minimax fractional optimality and duality with generalized convexity[J]. J Glob Optim, 2005, 31(2): 235-252.

[6] Mangasarian O L. Second and higher order duality in nonlinear programming[J]. J Math Anal Appl, 1975, 51(3): 607- 620.

[7] Bector C R, Chandra S, Husain I. Second order duality for a minimax programming problem[J]. Opsearch, 1991, 28(2): 249-263.

[8] Liu J C. Second order duality for minimax programming [J]. Util Math, 1999, 56(1): 53-63.

[9] Husain Z, Jayswal A, Ahmad I. Second order duality for nondifferentiable minimax programming problems with generalized convexity[J]. J Glob Optim, 2009, 44(4): 593-608.

[10] Husain Z, Ahmad I, Sharma S. Second-order duality for minmax fractional programming[J]. Optim Lett, 2009, 3(2): 277-286.

[11] Sharma S, Gulati T R. Second order duality in minmax fractional programming with generalized univexity[J]. J Glob Optim, 2012, 52(1): 161-169.

[12] Ahmad I, Husain Z, Sharma S. Second-order duality in nondifferentiable minmax programming involving type-I functions[J]. J Comput Appl Math, 2008, 215(1): 91-102.

[13] Jayswal A, Ahmadb I, Al-Homidanb S. Sufficiency and duality for nonsmooth multiobjective programming problems involving generalized (F,α,ρ,θ)-d-Vunivex functions[J]. Math Comput Model, 2011, 53(1): 81-90.

Operations Research and Cybernetics

On a Second Order Dual for Minimax Fractional Programming

JIAO He-hua

(College of Mathematics and Computer, Yangtze Normal University, Fuling Chongqing 408100, China)

Abstract: In this paper, a class of generalized minimax fractional programming problem (P) is studied. Using second order (F,α,ρ,d)-I type function and (F,α,ρ,θ)-d-Vunivex function, second order (F,α,ρ,θ) pseudo quasi d-V-I type univex function and second order (F,α,ρ,θ) strictly pseudo quasi d-V-I type univex function are introduced and a second order dual model (D) of this minimax fractional programming problem (P) is formulated. Finally, under the second order generalized (F,α,ρ,θ)-d-V-I type univexity and using the sublinearity of function F, a weak duality theorem, a strong duality theorem and a strict converse duality theorem between the programming problem (P) and the dual problem (D) are obtained. The results presented in this paper improve and extend some corresponding results in the previous literatures.

Key words: minimax programming; fractional programming; second order duality; generalized (F,α,ρ,θ)-d-V-I type univexity

（责任编辑 黄 颖）