2013 年 5 月 重庆师范大学学报(自然科学版) May 2013
第 30 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 3

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130302

带有交货期和加工时间可控的单机排序问题*

范雁鹏，赵传立
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要：讨论了带有交货期和工件的加工时间可控的单机排序问题。本文首先根据最优排序的性质确定了最优资源的分配方法，并将问题转化为指派问题，通过构造多项式时间算法确定最优排序。然后，本文将学习效应与加工时间可控问题结合，分别讨论了加工时间是线性资源函数和凸资源函数两种情况，证明了该类问题是多项式时间可解的。最后，讨论了一种特殊情况(学习因子是常数，加工时间是凸资源函数)，给出了复杂性为 $O(n\log n)$ 的算法，通过运行此算法确定最优资源分配量和工件的最优排序。

关键词：排序；单台机器；交货期指派；加工时间可控；资源分配

中图分类号：O223　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-6693(2013)03-0005-04

近年来，带有可控加工时间的排序问题受到越来越多的关注。加工时间可控是指工件的实际加工时间是一个依赖资源量的函数。关于带有可控加工时间的单机排序问题最早是由 Vickson[1] 提出的。Cheng[2] 等研究了带有工期和可控加工时间的单机排序问题，分别讨论了在 2 种工期分派方法下极小化总提前时间，总延误时间和资源消耗的总费用问题。王方[3] 等讨论了具有学习效应的工期指派和可控加工时间的单机排序问题，目标是确定工件最优的加工顺序、最优工期和资源分配量，对于 2 种不同资源消耗与 3 种不同的工期分派方法的每一种组合，均给出了多项式时间算法。Chio[4] 等研究了带有可控释放时间和可控加工时间的单机排序问题。Shabtay 和 Steiner[5] 对于可控加工时间的排序问题做了详细的综述。

在交货期问题中，若工件在交货期中完工，则不产生惩罚费用，若工件在交货期之前或之后完工则会产生提前或延误的费用。Liman[6] 等研究了带有公共交货期且交货期的开始时间和大小都是待确定的单机排序问题。郭玲[7] 等考虑了将加工时间可控与交货期结合在一起的模型，讨论了带有公共交货期和可控加工时间的单机排序问题，目标是极小化总完工时间、提前时间、延误时间、交货期的结束时间和资源分配的总费用，证明了这个问题是多项式时间可解的。Wan[8] 研究了带有大小固定的交货期和可控加工时间的单机排序问题。Mor 和 Mosheiov[9] 讨论了每个工件都有一个待定的交货期，且交货期大小相同，带有维修活动的单机排序问题，目标函数是极小化包括总提前、总延误、交货期的开始时间和交货期的大小的总费用。此外，Mosheiov 和 Sarig[10] 对于带有交货期的排序问题也进行了深入研究。

本文考虑文献[9]的排序模型，将加工时间可控与每个工件均有一个待定交货期的问题结合构成一个新的模型，给出了一些最优解的性质，并将问题最终转化成指派问题，证明了该类问题是多项式时间可解的。

1 模型描述

设有 n 个工件 $\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$ 在一台机器上加工。全部工件零时刻到达，加工不可中断，且机器在同一时间只能加工一个工件。工件 J_j 的实际加工时间 $p_j(j=1,\cdots,n)$ 是一个依赖资源量的线性非增函数，即

$$p_j=\bar{p}_j-u_jx_j,0\leqslant x_j\leqslant\bar{x}_j<\frac{\bar{p}_j}{u_j}\qquad(1)$$

其中 $\bar{p}_j$ 表示工件 J_j 的正常加工时间，x_j 表示分配给工件 J_j 的资源，$\bar{x}_j$ 表示分配给工件 J_j 的资源的上界，即 $0\leqslant x_j\leqslant\bar{x}_j$，$u_j$ 表示工件 J_j 的正压缩率。$b_j(\geqslant 0)$ 表示单位资源的费用。不失一般性，$\bar{x}_j<\frac{\bar{p}_j}{u_j}$，因为加工时间被压缩为 0 在现实生活中是不合理的。

对于任意一个给定的排序 $\sigma=(J_{(1)},J_{(2)},\cdots,J_{(n)})$，设 $\bar{p}_{(j)},p_{(j)},x_{(j)},b_{(j)},u_{(j)}$ 分别表示排在第 j 个位置上的工件的正常加工时间、实际加工时间、分配的资源、单位资源的费用和压缩率。$C_{(j)}$ 表示排在

* 收稿日期：2012-11-22　修回日期：2013-01-15　网络出版时间：2013-05-20 18:04
资助项目：国家自然科学基金(No. 10471096)
作者简介：范雁鹏，女，硕士研究生，研究方向为排序理论，E-mail：846392401@qq.com；通讯作者：赵传立，E-mail：zhaochuanli@synu.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130520.1804.201303.5_002.html

第 j 个位置上的工件的完工时间，$[d_{(j)}^{(1)},d_{(j)}^{(2)}]$表示第 j 个位置上的工件的交货期，满足 $d_{(j)}^{(1)}\leqslant d_{(j)}^{(2)}$，$j=1,2,\cdots,n$。

排在第 j 个位置上的工件的交货期的开始时间定义为它的加工时间加上一个常数，即 $d_{(j)}^{(1)}=p_{(j)}+q^{(1)}$，类似地，其结束时间定义为它的加工时间加上一个更大的常数，即 $d_{(j)}^{(2)}=p_{(j)}+q^{(2)}$，则排在第 j 个位置上的工件的交货期可表示为$[p_{(j)}+q^{(1)},p_{(j)}+q^{(2)}]$，$D_{(j)}$表示排在第 j 个位置上的工件的交货期的长度。$D_{(j)}=q^{(2)}-q^{(1)}\equiv D$，$j=1,2,\cdots,n$，也即是所有工件的交货期的长度是相等的。

目标是极小化总费用

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{(j)}+\beta T_{(j)}+\gamma d_{(j)}^{(1)}+\delta D_{(j)}+b_{(j)}x_{(j)})=\alpha\sum_{j=1}^{n}E_{(j)}+\beta\sum_{j=1}^{n}T_{(j)}+\gamma\sum_{j=1}^{n}d_{(j)}^{(1)}+\delta\sum_{j=1}^{n}(q^{(2)}-q^{(1)})+\sum_{j=1}^{n}b_{(j)}x_{(j)}$$

其中 $E_{(j)}=\max\{0,d_{(j)}^{(1)}-C_{(j)}\}$表示排在第 j 个位置上的工件的提前时间，$T_{(j)}=\max\{0,C_{(j)}-d_{(j)}^{(2)}\}$，$j=1,2,\cdots,n$，表示排在第 j 个位置上的工件的延误时间。$\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0,\gamma\geqslant0$ 和 $\delta\geqslant0$ 分别表示总提前时间、延误时间、交货期的开始时间和交货期大小的单位费用。

综上，本文所讨论的问题可以表示为

$$1\mid p_j=\bar{p}_j-u_jx_j\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{(j)}+\beta T_{(j)}+\gamma d_{(j)}^{(1)}+\delta D_{(j)}+b_{(j)}x_{(j)})$$

2 资源约束

显而易见，最优排序满足工件的开始加工时间从零时刻开始，且机器没有空闲。

设最优排序为 $\sigma^*=(J_{(1)},J_{(2)},\cdots,J_{(n)})$，由文献[9]可知，最优排序具有以下性质。

性质1　如果 $C_{(j)}<d_{(j)}^{(1)}$，则 $C_{(j-1)}<d_{(j-1)}^{(1)}$。

性质2　如果 $C_{(j)}>d_{(j)}^{(2)}$，则 $C_{(j-1)}>d_{(j-1)}^{(2)}$。

性质3　在最优排序 $\sigma^*=(J_{(1)},J_{(2)},\cdots,J_{(n)})$中，存在某个 k 和 l，使得

$$q^{(1)}=p_{(1)}+p_{(2)}+\cdots+p_{(k)}=\sum_{j=1}^{k}p_{(j)}$$
$$q^{(2)}=p_{(1)}+p_{(2)}+\cdots+p_{(k)}+p_{(k+1)}+\cdots+p_{(l)}=\sum_{j=1}^{l}p_{(j)}$$

性质4　在最优排序 $\sigma^*=(J_{(1)},J_{(2)},\cdots,J_{(n)})$中，设 $q^{(1)^*}=\sum_{j=1}^{k^*}p_{(j)}$，$q^{(2)^*}=\sum_{j=1}^{l^*}p_{(j)}$，则

$$k^*=\left\lceil\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil,l^*=\left\lceil\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$$

对于任意一个给定的排序 $\sigma=(J_{(1)},J_{(2)},\cdots,J_{(n)})$，由上节讨论可知 $q^{(1)}=\sum_{j=1}^{k}p_{(j)}$，$q^{(2)}=\sum_{j=1}^{l}p_{(j)}$。则总费用可表示为

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{(j)}+\beta T_{(j)}+\gamma d_{(j)}^{(1)}+\delta D_{(j)}+b_{(j)}x_{(j)})=\sum_{j=1}^{n}w_jp_{(j)}+\sum_{j=1}^{n}b_{(j)}x_{(j)}$$

因为 $p_{(j)}=\bar{p}_{(j)}-u_{(j)}x_{(j)}$，所以

$$Z=\sum_{j=1}^{n}w_j\bar{p}_{(j)}+\sum_{j=1}^{n}(b_{(j)}-w_ju_{(j)})x_{(j)}\tag{2}$$

其中

$$w_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1),1\leqslant j\leqslant k\\ \delta n+\gamma,k+1\leqslant j\leqslant l\\ \beta(n-j)+\gamma,l+1\leqslant j\leqslant n\end{cases}\tag{3}$$

表示在排序 σ 中排在第 j 个位置上的工件的位置权。

从(2)式可以看出：如果 $b_{(j)}-w_ju_{(j)}$ 是负的，那么最优资源分配为其上界 $\bar{x}_{(j)}$；如果 $b_{(j)}-w_ju_{(j)}$ 是正的，那么最优资源分配为0；如果 $b_{(j)}-w_ju_{(j)}$ 等于0，那么最优资源分配介于0和 $\bar{x}_{(j)}$ 之间，即

$$x_{(j)}^*=\begin{cases}\bar{x}_{(j)},b_{(j)}-w_ju_{(j)}<0\\ x_{(j)}\in[0,\bar{x}_{(j)}],b_{(j)}-w_ju_{(j)}=0\\ 0,b_{(j)}-w_ju_{(j)}>0\end{cases}\tag{4}$$

其中 $x_{(j)}^*$，$j=1,2,\cdots,n$，表示排在第 j 个位置上的工件的最优资源分配量。

接下来讨论最优排序，将问题转化为指派问题。对于 $i,j=1,2,\cdots,n$，设

$$\lambda_{ij}=\begin{cases}w_j\bar{p}_i,b_i-w_ju_i\geqslant0\\ w_j\bar{p}_i+(b_i-w_ju_i)\bar{x}_i,b_i-w_ju_i<0\end{cases}\tag{5}$$

设 $y_{ij}\in\{0,1\}$，如果工件 J_i 排在第 j 个位置上，则 $y_{ij}=1$，否则 $y_{ij}=0$，则有如下指派问题

$$\begin{aligned}\min\quad&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}y_{ij}\\ \text{s.t.}\quad&\sum_{i=1}^{n}y_{ij}=1,j=1,\cdots,n\\ &\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=1,i=1,\cdots,n\\ &y_{ij}\in\{0,1\},i,j=1,\cdots,n\end{aligned}\tag{6}$$

对于问题

$$1\mid p_j(x)=\bar{p}_j-u_jx_j\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{(j)}+\beta T_{(j)}+\gamma d_{(j)}^{(1)}+\delta D_{(j)}+b_{(j)}x_{(j)})$$

给出一个多项式时间算法。

算法1　步骤1　置 $q^{(1)^*}=\sum_{j=1}^{k}p_{(j)}$，$q^{(2)^*}=\sum_{j=1}^{l}p_{(j)}$。其中 $k=\left\lceil\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil$，$l=\left\lceil\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$；

步骤2　用(5)式计算 λ_{ij}；

步骤 3　通过解决指派问题(6)确定最优排序；

步骤 4　通过式子(4)计算最优资源分配；

步骤 5　通过(1)式计算最优加工时间；

步骤 6　置交货期的最优长度为 $D=\sum_{j=k+1}^{l} p_{(j)}$ 。

定理 1　算法 1 求得排序问题

$$1 \mid p_j(x)=\bar{p}_j-u_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{(j)}+\beta T_{(j)}+\gamma d_{(j)}^{(1)}+\delta D_{(j)}+b_{(j)} x_{(j)})$$

的最优排序，计算复杂性是 $O(n^3)$。

证明　由以上讨论可知，算法 1 的主要计算在于步骤 3，而步骤 3 是求解指派问题，其计算复杂性为 $O(n^3)$，因此算法 1 的计算复杂性是 $O(n^3)$。　　证毕

3 模型推广

Lu Yuan-yuan[11]等讨论了具有学习效应的加工时间可控的单机排序问题，考虑了 2 种加工时间模型：1) $p_{jr}(x)=\bar{p}_j r^{a_j}-u_j x_j$；2) $p_{jr}(x)=\left(\frac{\bar{p}_j r^{a_j}}{x_j}\right)^k$。

本节所讨论的问题可以推广到上述 2 种加工时间模型。设最优排序 $\sigma^*=(J_{(1)},J_{(2)},\cdots,J_{(n)})$，则有问题 1。

问题 1　$1 | p_{jr}(x)=\bar{p}_j r^{a_j}-u_j x_j |$

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{(j)}+\beta T_{(j)}+\gamma d_{(j)}^{(1)}+\delta D_{(j)}+b_{(j)} x_{(j)})$$

其中 $a_j \leqslant 0, 0 \leqslant x_j \leqslant \bar{x}_j<\frac{\bar{p}_j n^{a_j}}{u_j}$。

由前面的讨论容易得出以下结果。

1) 目标函数可表示为

$$Z=\sum_{j=1}^{n} w_j \bar{p}_{(j)} j^{a_{(j)}}+\sum_{j=1}^{n}(b_{(j)}-w_j u_{(j)}) x_{(j)}$$

其中 w_j 由(3)式决定。

2) 最优资源分配由(4)式决定。

3) 最优排序。问题 1 可转化为指派问题，即(6)式。其中

$$\lambda_{ij}=\begin{cases} w_j \bar{p}_i j^{a_i}, b_i-w_j u_i \geqslant 0 \\ w_j \bar{p}_i j^{a_i}+(b_i-w_j u_i) \bar{x}_i, b_i-w_j u_i<0 \end{cases} \tag{7}$$

4) 多项式时间算法。问题 1 可以通过算法 1 求得最优排序，不同的是步骤 2 中的 λ_{ij} 由(7)式决定，步骤 5 中的最优加工时间由 $p_{jr}(x)=\bar{p}_j r^{a_j}-u_j x_j$ 求得，计算复杂性为 $O(n^3)$。其证明过程同定理 1。

问题 2　$1\left| p_{jr}(x)=\left(\frac{\bar{p}_j r^{a_j}}{x_j}\right)^k \right|$

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{(j)}+\beta T_{(j)}+\gamma d_{(j)}^{(1)}+\delta D_{(j)}+b_{(j)} x_{(j)})$$

其中 $k>0, x_j>0$。

由前面的讨论容易得出以下结果。

1) 目标函数可表示为

$$Z=\sum_{j=1}^{n} w_j\left(\frac{\bar{p}_{(j)} j^{a_{(j)}}}{x_{(j)}}\right)^k+\sum_{j=1}^{n} b_{(j)} x_{(j)} \tag{8}$$

其中 w_j 由(3)式决定。

2) 最优资源分配。将(8)式看成是关于 x_j 的函数，对其求导并令导数为零。则可求出最优资源分配

$$x_{(j)}^*=\left(\frac{k w_j}{b_{(j)}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \times(\bar{p}_{(j)} j^{a_{(j)}})^{\frac{k}{k+1}} \tag{9}$$

其中 w_j 由(3)式决定。

将(9)式代入(8)式中可得

$$Z'=(k^{\frac{-k}{k+1}}+k^{\frac{1}{k+1}}) \times \sum_{j=1}^{n}(b_{(j)} \bar{p}_{(j)})^{\frac{k}{k+1}}(w_j j^k j^{a_{(j)}})^{\frac{1}{k+1}} \tag{10}$$

3) 最优排序。问题 2 可转化为指派问题，即(6)式。其中

$$\lambda_{ij}=(k^{\frac{-k}{k+1}}+k^{\frac{1}{k+1}}) \times \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}(b_i \bar{p}_i)^{\frac{k}{k+1}}(w_j j^k j^{a_i})^{\frac{1}{k+1}} \tag{11}$$

4) 多项式时间算法。问题 2 可以通过算法 1 求得最优排序，不同的是步骤 2 中的 λ_{ij} 由(11)式决定，步骤 4 中的最优资源分配由(9)式决定，步骤 5 中的最优加工时间由 $p_{jr}(x)=\left(\frac{\bar{p}_j r^{a_j}}{x_j}\right)^k$ 求得，计算复杂性为 $O(n^3)$。其证明过程同定理 1。

接下来讨论 $a_j=a, j=1,2,\cdots,n$ 这一特殊情况。

由(10)式可以得到

$$Z'=(k^{\frac{-k}{k+1}}+k^{\frac{1}{k+1}}) \times \sum_{j=1}^{n} \theta_{(j)} \phi_j \tag{12}$$

其中

$$\theta_{(j)}=(b_{(j)} \bar{p}_{(j)})^{\frac{k}{k+1}} \tag{13}$$

$$\phi_j=(w_j j^{a+k})^{\frac{1}{k+1}} \tag{14}$$

引理 1[12]　将(12)式中最小的 ϕ_j 值匹配给最大的 $\theta_{(j)}$ 值，第二小的 ϕ_j 值匹配给第二大的 $\theta_{(j)}$ 值，如此进行下去，得到的排序是最优排序。

算法 2　步骤 1　置 $q^{(1)*}=\sum_{j=1}^{k} p_{(j)}$，$q^{(2)*}=\sum_{j=1}^{l} p_{(j)}$，其中 $k=\left\lceil\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil, l=\left\lceil\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$；

步骤 2　对每一个目标函数，通过(13)、(14)式计算 $\theta_{(j)}, \phi_j, j=1,2,\cdots,n$；

步骤 3　按照引理 1 的方法对工件进行排序，定义最优排序为 $\sigma^*=(J_{(1)},J_{(2)},\cdots,J_{(n)})$；

步骤 4　通过(9)式计算最优资源分配；

步骤 5　通过式子 $p_{jr}(x)=\left(\frac{\bar{p}_j r^a}{x_j}\right)^k$ 计算最优加工时间；

步骤 6　置交货期的最优长度为 $D=\sum_{j=k+1}^{l} p_{(j)}$ 。

定理 2　算法 2 求得排序问题

$$1 \mid p_{jr}(x)=\left(\frac{\bar{p}_j r^a}{x_j}\right)^k \mid$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{(j)}+\beta T_{(j)}+\gamma d_{(j)}^{(1)}+\delta D_{(j)}+b_{(j)}x_{(j)})$$

的最优排序,计算复杂性是 $O(n\log n)$。

证明 由以上讨论可知,算法 2 的主要计算在于步骤 2,由于步骤 2 的计算复杂性为 $O(n\log n)$,因此算法 2 的计算复杂性是 $O(n\log n)$。 证毕

4 结论

本文讨论的是工件的加工时间是资源分配的线性函数的单机排序问题及与位置相关的加工时间可控问题。给出了最优排序的一些性质,及最优资源分配的求解方法、多项式算法,证明了这些问题在多项式时间内可以求得最优解。

参考文献:

[1] Vickson R G. Choosing the job sequence and processing times to minimize total processing plus flow cost on a single machine[J]. Operations Research,1980,28:1155-1167.

[2] Cheng T C E, Ouz C, Qi X D. Due-date assignment for scheduling on a single machine with compressible processing times[J]. International Journal of Production Economics,1996,43:29-35.

[3] 王方,赵传立. 一类带有可控加工时间的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2012,29(6):20-25.
Wang F, Zhao C L. Single machine scheduling problem with controllable processing times[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science,2012,29(6):20-25.

[4] Choia B C, Yoonb S H, Chunga S J. Single machine scheduling problem with controllable processing times and resource dependent release times[J]. European Journal of Operational Research,2007,181:645-653.

[5] Shabtay D, Steiner G. A survey of scheduling with controllable processing times[J]. Discrete Applied Mathematics,2007,155:1643-1666.

[6] Liman S D, Panwanlkar S S, Thongmee S. Common due window size and location determination in a single machine scheduling problem[J]. The Journal of the Operational Research Society,1998,49(9):1007-1010.

[7] 郭玲,赵传立. 带有公共交货期窗口和加工时间可控的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2012,29(6):9-14.
Guo L, Zhao C L. Single machine scheduling with common due-window assignment and controllable processing times [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science,2012,29(6):9-14.

[8] Wan G. Single machine common due window scheduling with controllable job processing times[J]. Lecture Notes in Computer Science,2007,4616:279-290.

[9] Mor B, Mosheiov G. Scheduling a maintenance activity and due-window assignment based on common flow allowance [J]. International Journal of Production Economics,2012,135(1):220-230.

[10] Mosheiov G, Sarig A. Minmax scheduling problems with a common due-window[J]. Computer & Operations Research,2009,36(6):1886-1892.

[11] Lu Y Y, Li G, Wu Y B, et al. Optimal due-date assignment problem with learning effect and resource-dependent processing times[J]. Optimization Letters,2012,DOI:10.1007/s11590-012-0467-7.

[12] Littlewood G H, Polya J E, Hardy G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press,1934.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling with Date of Delivery Assignment and Controllable Processing Times

FAN Yan-peng, ZHAO Chuan-li

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: We consider date of delivery assignment and single-machine scheduling problems in which the jobs have controllable processing times. We determine the optimal resource allocation by using the properties of the optimal sequence, and formulate problem as a set of assignment problem, provide a polynomial time algorithm. Then, we combine the effects of learning with controllable processing times, processing time is a linear resource function or convex resource function, we show that the problems can be solved in polynomial time. Finally, we consider a special case (learning factor is a constant, processing time is a convex resource function), we give an algorithm that the time complexity is $O(n\log n)$, we determine the optimal resource allocation and the optimal sequence by running the algorithm.

Key words: scheduling; single machine; date of delivery assignment; controllable processing times; resource allocation

(责任编辑 黄 颖)