DOI:10.11721/cqnuj20130312

时变时滞非自治神经网络的全局指数稳定性*

毛 凯[1],时 宝[2],周 刚[1]
(1. 海军航空工程学院 基础部系统科学与数学研究所;2. 海军航空工程学院 基础部,山东 烟台 264001)

摘要:在激励函数仅满足全局 Lipschitz 连续,时变时滞函数有界、连续可微且导数小于 1 的条件下,通过构造一个恰当的 Lyapunov 泛函并结合 Young 不等式,利用 Lyapunov 稳定性理论,首先研究了一类具有时变时滞的多轴突非自治神经网络系统的全局指数稳定性问题,得到一系列在实践中易于验证的、保证系统全局指数稳定的充分条件。作为特例,还得到了具有定常时滞的多轴突非自治系统以及一般的非自治系统的全局指数稳定性充分条件。其次,还得到了一类同时具有连续时变时滞和无穷分布时滞的多轴突非自治神经网络系统的全局指数稳定性充分条件。本文去掉了关于激励函数有界、可微等限制条件,推广并改进了相关文献的结果。本文的结果也适合自治神经网络系统。最后举例说明了本文方法的有效性。

关键词:非自治神经网络;全局指数稳定性;Lyapunov 泛函;Young 不等式

中图分类号:O175.13 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)03-0059-06

近年来关于各类自治时滞神经网络系统平衡点的全局稳定性得到了广泛深入的研究,已经获得许多重要结果[1-8]。对自治系统平衡点稳定性的研究,通常是在假设激励函数有界、连续可微且导数为正、有界或假定激励函数有界并满足 Lipschitz 条件的情形下通过构造恰当的 Lyapunov 泛函来进行。而鉴于构造 Lyapunov 泛函的困难,也有的作者借助微分不等式在不用构造 Lyapunov 泛函的情形下用纯分析的技巧研究平衡点的全局稳定性[9-11]。

然而对于非自治时滞神经网络系统来说,在激励函数仅满足全局 Lipschitz 连续的条件下,系统的平衡点却不一定存在,而且就作者所知,关于非自治时滞神经网络系统的研究文献并不多见。文献[9-11]基于微分不等式并结合均值不等式以及 Young 不等式在不构造 Lyapunov 泛函的情形下研究了如下形式的非自治时滞神经网络系统的全局指数稳定性

$$\dot{x}_i(t)=-c_i(t)x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)f_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)f_j(x_j(t-\tau_j(t)))+I_i(t)$$

对于一类更为广泛的具有时变时滞的多轴突非自治神经网络系统的研究则更加少见。本文去掉了激励函数的有界性或连续可微性假设,仅要求满足全局 Lipschitz 条件。笔者将基于 Young 不等式,并构造一个恰当的 Lyapunov 泛函研究如下形式的具有时变时滞的多轴突非自治神经网络模型[14-15]

$$\dot{x}_i(t)=-c_i(t)x_i(t)+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijl}(t)f_{ijl}(x_j(t-\tau_{ijl}(t)))+I_i(t),i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

本文构造的 Lyapunov 泛函,在形式上比文献[14-15]更具一般性,在应用 Young 不等式时,引入了可调参数,得到的结论具有更广泛的适用范围,推广并适当改进了相关文献的结论。

笔者也研究了作为系统(1)特例的如下系统(2)的全局稳定性。

$$\dot{x}_i(t)=-c_i(t)x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)f_{ij}(x_j(t-\tau_{ij}(t)))+I_i(t),i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

1 模型描述

在系统(1)中,n 表示网络中神经元的数量,m 表示神经元轴突的数量,$x_i(t)$表示时刻 t 第 i 个神经元

* **收稿日期**:2012-04-16 **修回日期**:2013-01-12 **网络出版时间**:2013-05-20 18:04
资助项目:光电控制技术国防科技重点实验室资助项目(No. 20120224006);海军航空工程学院名师工程项目
作者简介:毛凯,男,副教授,博士生,研究方向为神经网络动力学,E-mail:maokaif@hotmail.com;**通讯作者**:时宝,E-mail:baoshi781@sohu.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130520.1804.201303.59_011.html

的状态变量，$f_{ijl}(x_j(t))$则表示时刻t第j个神经元的激励函数，$a_{ijl}(t)$表示在时刻t第j个神经元对第i个神经元在时刻$t-\tau_{ijl}(t)$的权重大小，$\tau_{ijl}(t)$表示第i个神经元沿着第j个神经元的第l个轴突所发生的信号传输时滞，$I_i(t)$表示对第i个神经元在时刻t的外部输入，而$c_i(t)$表示第i个神经元在与网络的连接断开也没有外部输入的情形下其恢复静止状态的速率。对于系统(1),笔者作如下的假设

(H_1) $c_i(t),a_{ijl}(t),I_i(t)(i,j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,m)$都是定义在$[0,+\infty)$上的有界连续函数。

(H_2) 激励函数是全局Lipschitz连续的，即存在常数λ_{ijl}使得对任意的$i,j=1,2,\cdots,n$以及$l=1,2,\cdots,m$，u、$v\in\mathbf{R}$有$|f_{ijl}(u)-f_{ijl}(v)|\leqslant\lambda_{ijl}|u-v|$，$|g_{ijl}(u)-g_{ijl}(v)|\leqslant\mu_{ijl}|u-v|$。

(H_3) 时滞函数$\tau_{ijl}(t)$非负有界，即$0\leqslant\tau_{ijl}(t)\leqslant\tau$，连续可微且$\dot{\tau}_{ijl}(t)<1$。

在激励函数仅满足全局Lipschitz条件的情形下，一般来说非自治系统不一定再具有平衡点[13]，因此本文中并不要求系统具有平衡点。在这样的情形下，笔者对系统(1)的全局指数稳定性作如下的定义。

定义1[13,16] 若存在常数$\varepsilon>0,M\geqslant1$使得对于系统(1)任意两个具有初始条件$\phi(s),\tilde{\phi}(s),s\in[-\tau,0]$的解$x(t),\tilde{x}(t)$都有下式成立,则称系统(1)是全局指数稳定的

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\|_r\leqslant Me^{-\varepsilon t}\|\phi-\tilde{\phi}\|_r,t\geqslant0$$

其中 $\|x(t)\|_r=\left(\sum_{i=1}^n|x_i(t)|^r\right)^{1/r}$，$\|\phi\|_r=\left(\sum_{i=1}^n\sup_{s\in[-\tau,0]}|\phi_i(s)|^r\right)^{1/r}$

注1 由向量范数的等价性知对$r=+\infty$的特殊情形，上述定义仍然适用。

定义2[18] 连续函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$的上右Dini导数被定义为

$$D^+f(t)=\lim_{\delta\to0^+}\sup\frac{f(t+\delta)-f(t)}{\delta}$$

对于系统(1)的任意两个分别具有初始条件$\phi(s)$，$\tilde{\phi}(s),s\in[-\tau,0]$的解$x(t),\tilde{x}(t)$，令$y(t)=x(t)-\tilde{x}(t)$，则$y(t)$显然满足如下的方程

$$\dot{y}_i(t)=-c_i(t)y_i(t)+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ijl}(t)F_{ijl}(y_j(t-\tau_{ijl}(t))),i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

其中$F_{ijl}(y_j(t))=f_{ijl}(x_j(t))-f_{ijl}(\tilde{x}_j(t))$。

利用(H_2)容易得到

$$D^+|y_i(t)|\leqslant-c_i(t)|y_i(t)|+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ijl}(t)|\lambda_{ijl}|y_j(t-\tau_{ijl}(t))| \tag{4}$$

引理1[12] (Young不等式)设$a\geqslant0,b\geqslant0$，以及$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p>1$，则$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$。

2 主要结果

定理1 若存在常数$\alpha_{ijl},\beta_{ijl}(i,j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,m)$，$d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得对任意$i$都有

$$-rd_ic_i(t)+d_i(r-1)\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ijl}(t)|^{\frac{r\alpha_{ijl}}{r-1}}\lambda_{ijl}^{\frac{r\beta_{ijl}}{r-1}}+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n d_j\lambda_{jil}^{r(1-\beta_{jil})}\frac{|a_{jil}(\phi_{jil}^{-1}(t))|^{r(1-\alpha_{jil})}}{1-\dot{\tau}_{jil}(\phi_{jil}^{-1}(t))}<0 \tag{5}$$

则系统(1)全局指数稳定。其中$\phi_{ijl}^{-1}(t)$是$\phi_{ijl}(t)=t-\tau_{ijl}(t)$的反函数。

证明 由(5)式知，存在足够小的常数$\varepsilon>0$使得下式成立

$$-d_ir(c_i(t)-\varepsilon)+d_i(r-1)\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ijl}(t)|^{\frac{r\alpha_{ijl}}{r-1}}\lambda_{ijl}^{\frac{r\beta_{ijl}}{r-1}}+e^{\varepsilon r\tau}\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n d_j\lambda_{jil}^{r(1-\beta_{jil})}\frac{|a_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))|^{r(1-\alpha_{jil})}}{1-\dot{\tau}_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))}<0 \tag{6}$$

考虑如下形式的Lyapunov泛函

$$V(t)=\sum_{i=1}^n d_i\Big[|y_i(t)|^r e^{\varepsilon rt}+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}\cdot\int_{t-\tau_{ijl}(t)}^t\frac{|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))|^{r(1-\alpha_{ijl})}}{1-\dot{\tau}_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))}\cdot|y_j(s)|^r e^{\varepsilon r[s+\tau_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))]}ds\Big]$$

计算$V(t)$沿着系统(3)的Dini上右导数，由(4)式容易得到

$$\begin{aligned}D^+V(t)\leqslant&\sum_{i=1}^n d_i\{e^{\varepsilon rt}r|y_i(t)|^{r-1}[-c_i(t)|y_i(t)|+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ijl}(t)|\lambda_{ijl}|y_j(t-\tau_{ijl}(t))|]+|y_i(t)|^r\varepsilon re^{\varepsilon rt}+\\&\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}\frac{|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(t))|^{r(1-\alpha_{ijl})}}{1-\dot{\tau}_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(t))}\cdot|y_j(t)|^r e^{\varepsilon r(t+\tau_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(t)))}-\\&\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(t-\tau_{ijl}(t)))|^{r(1-\alpha_{ijl})}\cdot|y_j(t-\tau_{ijl}(t))|^r e^{\varepsilon rt}\}\end{aligned} \tag{7}$$

由引理1有

$$\begin{aligned}&|a_{ijl}(t)|\lambda_{ijl}|y_i(t)|^{r-1}|y_j(t-\tau_{ijl}(t))|=\\&(|a_{ijl}(t)|^{\alpha_{ijl}}\lambda_{ijl}^{\beta_{ijl}}|y_i(t)|^{r-1})\cdot\\&(|a_{ijl}(t)|^{1-\alpha_{ijl}}\lambda_{ijl}^{1-\beta_{ijl}}|y(t-\tau_{ijl}(t))|)\leqslant\\&\frac{1}{r}|a_{ijl}(t)|^{r(1-\alpha_{ijl})}\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}|y(t-\tau_{ijl}(t))|^r+\end{aligned}$$

$$\frac{r-1}{r}\left|a_{ijl}(t)\right|^{\frac{r\alpha_{ijl}}{r-1}}\lambda_{ijl}^{\frac{r\beta_{ijl}}{r-1}}\left|y_i(t)\right|^r$$

将上式代入(7)式得

$$\begin{aligned}D^+V(t)\leqslant&\sum_{i=1}^n d_i\mathrm{e}^{\varepsilon t}\{-r(c_i(t)-\varepsilon)\left|y_i(t)\right|^r+\\&\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\left|a_{ijl}(t)\right|^{r(1-\alpha_{ijl})}\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}\left|y_j(t-\tau_{ijl}(t))\right|^r+\\&(r-1)\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\left|a_{ijl}(t)\right|^{\frac{r\alpha_{ijl}}{r-1}}\lambda_{ijl}^{\frac{r\beta_{ijl}}{r-1}}\left|y_i(t)\right|^r+\\&\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}\frac{\left|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(t))\right|^{r(1-\alpha_{ijl})}}{1-\dot{\tau}_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(t))}\left|y_j(t)\right|^r\mathrm{e}^{\varepsilon r\tau_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(t))}-\\&\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}\left|a_{ijl}(t)\right|^{r(1-\alpha_{ijl})}\left|y_j(t-\tau_{ijl}(t))\right|^r\}=\\&\sum_{i=1}^n\mathrm{e}^{\varepsilon t}\{-rd_i(c_i(t)-\varepsilon)+(r-1)d_i\cdot\\&\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\left|a_{ijl}(t)\right|^{\frac{r\alpha_{ijl}}{r-1}}\lambda_{ijl}^{\frac{r\beta_{ijl}}{r-1}}+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n d_j\lambda_{jil}^{r(1-\beta_{jil})}\cdot\\&\frac{\left|a_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))\right|^{r(1-\alpha_{jil})}}{1-\dot{\tau}_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))}\mathrm{e}^{\varepsilon r\tau}\Big\}\left|y_i(t)\right|^r\end{aligned}$$

由(6)式知 $D^+V(t)\leqslant 0$，从而对于任意的 $t>0$，有 $V(t)\leqslant V(0)$。

这样一方面有 $V(t)\geqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}\sum\limits_{i=1}^n\left|y_i(t)\right|^r\mathrm{e}^{\varepsilon rt}$；另一方面还有

$$\begin{aligned}V(0)=&\sum_{i=1}^n d_i\Big[\left|y_i(0)\right|^r+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}\cdot\\&\int_{-\tau_{ijl}(0)}^0\frac{\left|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))\right|^{r(1-\alpha_{ijl})}}{1-\dot{\tau}_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))}\left|y_j(s)\right|^r\mathrm{e}^{\varepsilon r[s+\tau_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))]}\mathrm{d}s\Big]\leqslant\\&\sum_{i=1}^n d_i\big[\sup_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\tilde{\phi}_i(s)\right|^r+\\&\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}c\sup_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\tilde{\phi}_i(s)\right|^r\big]\leqslant\\&\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{i=1}^n d_i\Big[1+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}c\Big]\left\|\phi-\tilde{\phi}\right\|_r^r\end{aligned}$$

这里 $c=\sup\limits_{s\in[-\tau,0]}\Big\{\dfrac{\left|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))\right|^{r(1-\alpha_{ijl})}}{1-\dot{\tau}_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))}\cdot\mathrm{e}^{\varepsilon[s+\tau_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))]}\times\tau_{ijl}(0)\Big\}$

于是有

$$\begin{aligned}&\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}\sum_{i=1}^n\left|y_i(t)\right|^r\mathrm{e}^{\varepsilon rt}\leqslant\\&\sum_{i=1}^n d_i\Big[1+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}c\Big]\left\|\phi-\tilde{\phi}\right\|_r^r\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{i=1}^n\left|y_i(t)\right|^r\leqslant M\mathrm{e}^{-\varepsilon rt}\left\|\phi-\tilde{\phi}\right\|_r^r$，也就是 $\left\|x(t)-\tilde{x}(t)\right\|_r\leqslant M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\left\|\phi-\tilde{\phi}\right\|_r$ 即系统全局指数稳定。其中 $M^r=\dfrac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{d_i+\sum\limits_{l=1}^m\sum\limits_{j=1}^n\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}c\Big\}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}}\geqslant 1$。　　证毕

注 2　文献[14]通过构造 Lyapunov 泛函，并利用均值不等式，得到系统(1)全局指数稳定的充分条件，即定理 2。

定理 2　存在 $\sigma>0,\omega_i>0,q_{ijl},r_{ijl}\in\mathbf{R}$，使得下式成立

$$\begin{aligned}&\omega_i c_i(t)-\frac{1}{2}\omega_i\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\left|a_{ijl}(t)\right|^{2-r_{ijl}}\mu_{ijl}^{2-q_{ijl}}-\\&\frac{1}{2}\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\omega_j\mu_{jil}^{q_{jil}}\frac{\left|a_{jil}(\psi_{jil}^{-1}(t))\right|^{r_{jil}}}{1-\dot{\tau}_{jil}(\psi_{jil}^{-1}(t))}>\sigma\end{aligned}$$

通过比较易看出，这恰好是本文定理 1 当 $r=2,\alpha_{ijl}=1-\dfrac{r_{ijl}}{2},\beta_{ijl}=1-\dfrac{q_{ijl}}{2}$ 时的特例；而其 3 个推论恰好是本文定理 1 当 $r=2,\ \alpha_{ijl}=\beta_{ijl}=\dfrac{1}{2}$；$r=2,\alpha_{ijl}=-\dfrac{1}{2},\beta_{ijl}=0$ 以及 $r=2,\ \alpha_{ijl}=\dfrac{3}{2},\beta_{ijl}=0$ 时的特殊情形。这就是说，文献[14]的结果仅是本文定理 1 中 $r=2$ 的特例，且文献[14]的所有结论中都有一个更严格的要求，即正数 σ 的存在。本文去掉了这一要求，使结果具有更小的保守型，更广泛的适用范围。因此本文推广并适当改进了文献[14]的结果。

注 3　当 $r=1$ 时，(5)式显然无意义，此时可以构造如下形式的 Lyapunov 泛函

$$\begin{aligned}V(t)=&\sum_{i=1}^n d_i\Big[\left|y_i(t)\right|\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n\lambda_{ijl}\cdot\\&\int_{t-\tau_{ijl}(t)}^t\frac{\left|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))\right|}{1-\dot{\tau}_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))}\left|y_j(s)\right|\mathrm{e}^{\varepsilon[s+\tau_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))]}\mathrm{d}s\Big]\end{aligned}$$

利用(4)式直接估计 $V(t)$ 沿系统的 Dini 上右导数的上界，易得：只要存在常数 $d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\begin{aligned}&-d_ic_i(t)+\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n d_j\lambda_{jil}\frac{\left|a_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))\right|}{1-\dot{\tau}_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))}<0,\\&i=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{8}$$

则系统(1)全局指数稳定。文献[15]通过构造 Lyapunov 泛函，并直接计算其 Dini 上右导数，得到系统(1)的全局指数稳定条件，它也同文献[14]一样有一个更严格的要求，即存在正数 σ，使得下式成立

$$d_ic_i(t)-\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^n d_j\lambda_{jil}\frac{\left|a_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))\right|}{1-\dot{\tau}_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))}>\sigma,i=1,2,\cdots,n$$

显然，(8)式也去掉了这一要求，使结果具有更小的保守型，更广泛的适用范围。

为减少条件验证的繁琐，通过取特定的参数值，容易得到以下推论。

推论 1　若存在常数 $d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 使得以下的(9)或(10)任一式成立，则系统(1)全局指数稳定。

$$-2d_ic_i(t)+d_i\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ijl}(t)|\lambda_{ijl}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{jil}\frac{|a_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))}<0,\ i=1,\cdots,n \quad (9)$$

$$-2d_ic_i(t)+d_i\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ijl}(t)|^2\lambda_{ijl}^2+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\frac{1}{1-\dot{\tau}_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))}<0,\ i=1,\cdots,n \quad (10)$$

证明　只要在(5)式中分别取 $r=2$，$\alpha_{ijl}=\beta_{ijl}=\frac{1}{2}$；$r=2$，$\alpha_{ijl}=\beta_{ijl}=1$ 即得结论。　证毕

特别地，当 $\tau_{ijl}(t)=\tau_{ijl}$ 时，即对于定常时滞，有如下的推论。

推论2　若存在常数 $\alpha_{ijl},\beta_{ijl}(i,j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,m)$，$d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得对任意的 i，下式成立，则系统(1)全局指数稳定。

$$-rd_ic_i(t)+d_i(r-1)\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ijl}(t)|^{\frac{r\alpha_{ijl}}{r-1}}\lambda_{ijl}^{\frac{r\beta_{ijl}}{r-1}}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{jil}^{r(1-\beta_{jil})}|a_{jil}(t+\tau_{jil})|^{r(1-\alpha_{jil})}<0 \quad (11)$$

证明　事实上此时 $\varphi_{ijl}(t)=t-\tau_{ijl}$，则 $\varphi_{ijl}^{-1}(t)=t+\tau_{ijl}$。由(5)式即得结论。　证毕

推论3　若存在常数 $d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得下列2式中的任一式成立，则系统(1)全局指数稳定。

$$-2d_ic_i(t)+d_i\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ijl}(t)|^2\lambda_{ijl}^2+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j<0,\ i=1,\cdots,n$$

$$-2d_ic_i(t)+d_i\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ijl}(t)|\lambda_{ijl}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{jil}|a_{jil}(t+\tau_{jil})|<0,\ i=1,\cdots,n$$

证明　只要在(11)式中分别取 $r=2$，$\alpha_{ijl}=\beta_{ijl}=1$；$r=2$，$\alpha_{ijl}=\beta_{ijl}=\frac{1}{2}$ 即得结论。　证毕

下面考虑系统(1)的特例(2)。运用以上的定理1和推论1～3，相应地不难得到关于系统(2)全局指数稳定的如下推论。

推论4　若存在常数 $\alpha_{ij},\beta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，$d_i>0$，使得

$$-rd_ic_i(t)+d_i(r-1)\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|^{\frac{r\alpha_{ij}}{r-1}}\lambda_{ij}^{\frac{r\beta_{ij}}{r-1}}+\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{ji}^{r(1-\beta_{ji})}\frac{|a_{ji}(\varphi_{ji}^{-1}(t))|^{r(1-\alpha_{ji})}}{1-\dot{\tau}_{ji}(\varphi_{ji}^{-1}(t))}<0,\ i=1,\cdots,n$$

则系统(2)全局指数稳定，其中 $\phi_{ij}^{-1}(t)$ 是 $\varphi_{ij}(t)=t-\tau_{ij}(t)$ 的反函数。

推论5　若存在常数 $d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得以下2式中的任一式成立，则系统(2)全局指数稳定。

$$-2d_ic_i(t)+d_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|\lambda_{ij}+\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{ji}\frac{|a_{ji}(\varphi_{ji}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{ji}(\varphi_{ji}^{-1}(t))}<0,i=1,\cdots,n$$

$$-2d_ic_i(t)+d_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|^2\lambda_{ij}^2+\sum_{j=1}^{n}d_j\frac{1}{1-\dot{\tau}_{ji}(\varphi_{ji}^{-1}(t))}<0,\ i=1,\cdots,n$$

推论6　假设 $\tau_{ij}(t)=\tau_{ij}$，若以下3式中的任一式成立，则系统(2)全局指数稳定。

$$-rd_ic_i(t)+d_i(r-1)\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|^{\frac{r\alpha_{ij}}{r-1}}\lambda_{ij}^{\frac{r\beta_{ij}}{r-1}}+\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{ji}^{r(1-\beta_{ji})}|a_{ji}(t+\tau_{ji})|^{r(1-\alpha_{ji})}<0,i=1,\cdots,n$$

$$-2d_ic_i(t)+d_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|^2\lambda_{ij}^2+\sum_{j=1}^{n}d_j<0,i=1,\cdots,n$$

$$-2d_ic_i(t)+d_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|\lambda_{ij}+\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{ji}|a_{ji}(t+\tau_{ji})|<0,\ i=1,\cdots,n$$

事实上，对于如下更为一般的，同时具有连续时变时滞和无穷分布时滞的神经网络系统

$$\dot{x}_i(t)=-c_i(t)x_i(t)+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijl}(t)f_{ijl}(x_j(t-\tau_{ijl}(t)))+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ijl}(t)g_{ijl}\left(\int_{-\infty}^{t}k_{ijl}(t-s)x_j(s)\mathrm{d}s\right)+I_i(t) \quad (12)$$

利用上文的方法，不难得到以下结论。

定理3　若存在常数 $\alpha_{ijl},\beta_{ijl},p_{ijl},q_{ijl}(i,j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,m)$，以及 $d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得对任意 i 都有

$$-rd_ic_i(t)+d_i(r-1)\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ijl}(t)|^{\frac{r\alpha_{ijl}}{r-1}}\lambda_{ijl}^{\frac{r\beta_{ijl}}{r-1}}+d_i(r-1)\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ijl}(t)|^{\frac{rp_{ijl}}{r-1}}\mu_{ijl}^{\frac{rq_{ijl}}{r-1}}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{jil}^{r(1-\beta_{jil})}\frac{|a_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))|^{r(1-\alpha_{jil})}}{1-\dot{\tau}_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\mu_{jil}^{r(1-q_{jil})}\int_0^{+\infty}k_{jil}(\theta)|b_{jil}(t+\theta)|^{r(1-p_{jil})}<0$$

则系统(12)全局指数稳定。其中 $\phi_{ijl}^{-1}(t)$ 是 $\phi_{ijl}(t)=t-\tau_{ijl}(t)$ 的反函数，非负核函数 $k_{jil}(\theta)$ 满足 $\int_0^{+\infty}k_{jil}(\theta)\mathrm{d}\theta=1$，$\mu_{ijl}$ 为激励函数 g_{ijl} 的 Lipschitz 常数。

证明　作如下形式的 Lyapunov 泛函

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)$$

其中

$$V_1(t)=\sum_{i=1}^{n}d_i\,|y_i(t)|^r e^{\varepsilon rt}$$

$$V_2(t)=\sum_{i=1}^{n}d_i\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ijl}^{r(1-\beta_{ijl})}\int_{t-\tau_{ijl}(t)}^{t}\frac{|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))|^{r(1-\alpha_{ijl})}}{1-\dot{\tau}_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))}\cdot |y_j(s)|^r e^{\varepsilon r[s+\tau_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))]}ds$$

$$V_3(t)=\sum_{i=1}^{n}d_i\int_{-\infty}^{t}\int_{t-s}^{+\infty}k_{ijl}(\theta)\,|b_{ijl}(\theta+s)|^{r(1-p_{ijl})}\mu_{ijl}^{r(1-q_{ijl})}\cdot e^{r\varepsilon(\theta+s)}|y_j(s)|^r d\theta ds$$

采取类似定理 1 的证明思路即得，此处略去具体过程。　证毕

此外，定理 3 也有类似于定理 1 的相应推论，不再赘述。

注 4　若在(12)式中令 $a_{ijl}(t)=0$ 就得到文献[17]研究的仅有无穷分布时滞的系统,作者通过引入相空间，构造 Lyapunov 泛函的方法得到了(12)式全局指数稳定条件

$$rd_ic_i(t)-d_i(r-1)\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ijl}(t)|^{\frac{rp_{ijl}}{r-1}}\mu_{ijl}^{\frac{rq_{ijl}}{r-1}}-\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\mu_{jil}^{r(1-q_{jil})}\int_0^{+\infty}k_{jil}(\theta)\,|b_{jil}(t+\theta)|^{r(1-p_{jil})}>\sigma$$

类似于文献[14-15]，也要求正数 σ 的存在。本文定理 2 去掉了这一要求。

注 5　定理 3 也不包含 $r=1$ 的情形，此时可构造如下的 Lyapunov 泛函

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n}d_i[|y_i(t)|e^{\varepsilon t}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ijl}\int_{t-\tau_{ijl}(t)}^{t}\frac{|a_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))|}{1-\dot{\tau}_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))}|y_j(s)|\cdot e^{\varepsilon[s+\tau_{ijl}(\varphi_{ijl}^{-1}(s))]}ds+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}\int_{t-s}^{+\infty}k_{ijl}(\theta)\cdot|b_{ijl}(\theta+s)|\mu_{ijl}e^{r\varepsilon(\theta+s)}|y_j(s)|d\theta ds]$$

通过直接计算 $V(t)$ 沿系统的 Dini 上右导数，易得：只要存在常数 $d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$-d_ic_i(t)+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\lambda_{jil}\frac{|a_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))|}{1-\dot{\tau}_{jil}(\varphi_{jil}^{-1}(t))}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j\mu_{jil}\int_0^{+\infty}k_{jil}(\theta)\,|b_{jil}(\theta+t)|\,d\theta<0,\ i=1,2,\cdots,n$$

则系统(12)全局指数稳定。

3 举例

为简便，考虑如下系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-c_1x_1(t)+a_{11}(t)f_{11}(x_1(t-\tau_{11}(t)))+\\ \qquad a_{12}(t)f_{12}(x_2(t-\tau_{12}(t)))+I_1(t)\\ \dot{x}_2(t)=-c_2x_2(t)+a_{21}(t)f_{21}(x_1(t-\tau_{21}(t)))+\\ \qquad a_{22}(t)f_{22}(x_2(t-\tau_{22}(t)))+I_2(t)\end{cases}$$

其中

$$c_1(t)=5+2\cos^2t+\frac{1}{2}\sin^2t,a_{11}(t)=2\cos t,a_{12}(t)=\sin t$$

$$c_2(t)=4+\frac{9}{2}\cos^2t+\frac{9}{8}\sin^2t,a_{21}(t)=\frac{3}{2}\sin t,$$

$$a_{22}(t)=3\cos t,\tau_{11}(t)=\tau_{22}(t)=1+\frac{1}{4}\sin t,$$

$$\tau_{12}(t)=\tau_{21}(t)=1+\frac{1}{5}e^{-\cos t}$$

取 $r=2$，$d_i=1$，$f_{ij}(x)=\frac{1}{2}(|x+1|+|x-1|)$，则 $\lambda_{ij}=1$。

经过简单运算，不难发现

$$-2c_1(t)+\sum_{j=1}^{n}|a_{1j}(t)|^2\lambda_{1j}^2+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\dot{\tau}_{j1}(\varphi_{j1}^{-1}(t))}=-10+\frac{1}{1-0.25\cos(\varphi_{11}^{-1}(t))}+\frac{1}{1-0.2\sin(\varphi_{21}^{-1}(t))e^{-\cos(\varphi_{21}^{-1}(t))}}<0$$

$$-2c_2(t)+\sum_{j=1}^{n}|a_{2j}(t)|^2\lambda_{2j}^2+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-\dot{\tau}_{j2}(\varphi_{j2}^{-1}(t))}=-8+\frac{1}{1-0.25\cos(\varphi_{11}^{-1}(t))}+\frac{1}{1-0.2\sin(\varphi_{21}^{-1}(t))e^{-\cos(\varphi_{21}^{-1}(t))}}<0$$

则由推论 5 的第 2 式知，上述系统全局指数稳定。

4 结论

本文去掉了激励函数有界，可微等严格的限制条件，在激励函数满足全局 Lipschitz 条件的基础上，通过构造一个恰当的 Lyapunov 泛函并结合 Young 不等式研究了一类更为广泛的具有时变时滞的多轴突非自治神经网络系统及其特例的全局指数稳定性，给出了一系列保证系统全局指数稳定的充分条件。还将结论推广到同时具有时变时滞和无穷分布时滞的多轴突非自治神经网络系统。本文结果推广改进了相关文献的结果，并给出具体实例验证了本文方法的有效性。显然，本文的方法也适用于相应的自治系统。

参考文献：

[1] Arik S. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant tine delay[J]. Physics Letters A,2003,311(6):504-511.

[2] Sabri A,Vedat T. Global asymptotic stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with constant time delays[J]. Neurocomputing,2005(68):161-176.

[3] Huang Z T,Luo X S,Yang Q G. Global asymptotic stability analysis of bidirectional associative memory networks with

distributed delays and impulse[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 34(3): 878-885.

[4] Cao J D, Dong M F. Exponential stability of delayed bidirectional associative memory networks[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 135(1): 105-112.

[5] Cao J D, Wang J. Global exponential stability and periodicity of recurrent neural networks with time delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 2005, 52(5): 920-931.

[6] Chen A P, Cao J D, Huang L H. Exponential stability of BAM neural networks with transmission delays[J]. Neurocomputing, 2004, 57: 435-454.

[7] Zhao H Y, Cao J D. New conditions for global exponential stability of cellular neural networks with delays[J]. Neural Networks, 2005, 18(10): 1332- 1340.

[8] Li X M, Huang L H, Zhu H Y. Global stability of cellular neural networks with constant and variable delays[J]. Nonlinear Analysis, 2003, 53(3-4): 319-333.

[9] Zhang Q, Wei X P, Xu J. Delay-dependent exponential stability criteria for non-autonomous cellular neural networks with time-varying delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 36(4): 985-990.

[10] Zhang Q, Wei X P, Xu J. Exponential stability of nonautonomous neural networks with variable delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 39(3): 1152-1157.

[11] Zhang Q, Wei X P, Xu J. On global exponential stability of nonautonomous delayed neural networks[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26(3): 965-970.

[12] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[13] Zhang Q, Wei X P, Xu J. Global exponential stability for nonautonomous cellular neural networks with delays [J]. Physics Letters A, 2006, 351(3): 153-160.

[14] Jiang H J, Li Z M, Teng Z D. Boundedness and stability for nonautonomous cellular neural networks with delay [J]. Physics Letters A, 2003, 306(5-6): 313-325.

[15] Mehbuba R H, Jiang H J, Teng Z D. Boundedness and stability for nonautonomous cellular neural networks with delay[J]. Neural Networks, 2004, 17(7): 1017-1025.

[16] Zhang Q, Wei X P, Xu J. Global exponential stability for nonautonomous cellular neural networks with unbounded delays[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 39(3): 1144-1151.

[17] Jiang H J, Teng Z D. Boundedness, periodic solutions and global stability for cellular neural networks with variable coefficients and infinite delays[J]. Neurocomputing, 2009, 72(10-12): 2455-2463.

[18] 时宝，张得存，盖明久. 微分方程理论及其应用[M]. 北京：国防工业出版社，2005.
Shi B, Zhang D C, Gai M J. Differential equation theory and application[M]. Beijing: Defense Industry Press, 2005.

On the Globally Exponential Stability of Multi-axons Non-autonomous Neural Networks with Time-varying Delays

MAO Kai[1], SHI Bao[2], ZHOU Gang[1]

(1. Institute of Systems Science and Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautically University;
2. Department of Basic Science, Naval Aeronautical and Astronautically University, Yantai Shandong 264001, China)

Abstract: Under the circumstance when the activation functions meet global Lipschitz continuous only, the time-varying functions are bounded, continuously differential and its derivative is less than 1, by making use of Lyapunov stability theory, firstly, the multi-axons non-autonomous neural networks with time-varying delays is studied in this paper by employing a suitable Lyapunov functional and combining with Young inequality. A set of sufficient conditions, which are easy to be verified in practice, for guaranteeing the globally exponential stability are obtained. As special cases, the global exponentially stable sufficient conditions for the multi-axons non-autonomous neural networks with constant delays and the general non-autonomous neural networks system are also derived. And then, the multi-axons non-autonomous neural networks system with both the continuous time-varying delays and infinite distributed delay is studied. Some restrict condition imposed on the activation functions, such as boundedness or differentiallity is removed in this paper. The results of this paper extend and improve partly the previous ones and can be used in other autonomous neural networks. An example is also given to illustrate the effectiveness of the method in this paper.

Key words: non-autonomous neural networks; global exponential stability; Lyapunov functional; Young inequality

(责任编辑 游中胜)