

# Vague 集相似度量模型的研究\*

彭祖明<sup>1</sup>, 陈义华<sup>2</sup>

(1. 长江师范学院 数学与计算机学院, 重庆 408100; 2. 重庆大学 数理学院, 重庆 400044)

**摘要:** 鉴于 Vague 集的相似度量在模糊推理、模式识别、聚类分析、决策分析等领域的广泛运用, 本文首先对已有 Vague 值的相似度量模型进行了分析, 发现已有的模型在应用时所得的结果或者不符合人的直觉, 或者明显违背客观实际, 或者存在区分度不足。然后提出了一个新的 Vague 值相似度量模型  $m(x, y) = 1/2 + \psi(x, y)/2 - S(x, y)/4 - |t_x - t_y|/4$ , 并证明了该模型满足文献[1-4]相似度量的公理化定义。在提出的 Vague 值相似度量模型的基础上, 建立了 Vague 集的相似度量一个新模型  $M(A, B) = (\sum_{i=1}^n m(A(x_i), B(x_i))) / n$ 。最后, 通过数值实验, 新模型度量结果又较好符合人的直觉以及具有较好的区分度。

**关键词:** Vague 集; 相似度量; 模型; 直觉

**中图分类号:** O159

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2013)03-0085-04

鉴于 Vague 集的相似度量可运用于模糊推理、模式识别、聚类分析等领域, 众多学者对 Vague 集的相似度量模型进行了研究, 如文献[1-16]。但已有的 Vague 集相似度量模型在某些情形下还存在一些不足。例如, 文献[8]对文献[1]的模型  $M_c$ 、文献[2]的模型  $M_H$ 、文献[3]的模型  $M_L$ 、文献[4]的模型  $M_{DC}$ 、文献[5]的模型  $M_O$ 、文献[6]的模型  $M_{HB}$ 、文献[7]的模型  $M_p^e$ 、 $M_s^e$ 、 $M_h^e$  的不足进行了分析。文献[9]在参考已有文献的基础上, 提出了一个 Vague 集相似度量模型。但该模型在  $w_2 = 0, w_3 = 0, x = [0.3, 0.3], y = [0.1, 0.5]$  时, 相似度量值为 1。不符合投票模型的解释。文献[10]的 Vague 相似度量模型在  $\lambda_4 > 0, x = y = [0.2, 0.3]$  时, 相似度量值为  $1 - 0.2\lambda_4$ , 即所得的相似度量值不为 1。在  $\lambda_4 = 0.5, x = y = [0, 1]$  时, 相似度为 0, 这也不符合投票模型的解释。文献[11]的 Vague 相似度量模型对于  $A(x_i) = [0, 1], B(x_i) = [0, 0]$  时相似度为 -1, 这明显不符合人的直觉。文献[12]的 Vague 相似度量模型对于  $x = [0.3, 1 - f_x], y = [0.5, 1 - f_y]$  且  $f_x = f_y$  时, 相似度量值均为 0.911, 不符合投票模型的解释。文献[13]的 Vague 相似度量模型在  $x = [0.3, 0.4], y = [0.4, f_y]$  ( $0.2 \leq f_y \leq 0.4$ ) 时,  $f_y$  取  $[0.2, 0.4]$  内任意一值时, 相似度量均为 0.95, 显然不符合人的直觉。文献[14]的 Vague 相似度量模

型对于  $t_x = f_x, t_y = f_y$  时, 相似度量值为 1, 比如  $x = [0.5, 0.5]$  与  $y = [0.2, 0.8]$  的相似度为 1, 不符合投票模型的解释。文献[15]的 Vague 值相似度量模型对于  $\lambda_1 = 0.30, \lambda_2 = 0.25, \lambda_3 = 0.15, \lambda_4 = 0.21$  时,  $[0.2, 0.7]$  与  $[0.35, 0.85]$ 、 $[0.2, 0.7]$  与  $[0.35, 0.55]$  的相似度量值均为 0.819,  $[0.2, 0.7]$  与  $[0.3, 0.8]$ 、 $[0.2, 0.7]$  与  $[0.3, 0.6]$  的相似度量值均为 0.879, 不符合投票模型的解释。

## 1 预备知识

**定义 1<sup>[1]</sup>** 设  $U$  是论域,  $x$  是它的任意一个元素,  $U$  上的一个 Vague 集  $A$  用一个真隶属函数  $t_A$  和一个假隶属函数  $f_A$  表示。其中  $t_A: U \rightarrow [0, 1], f_A: U \rightarrow [0, 1], t_A(x)$  表示支持  $x$  的证据所导出的肯定隶属度的下界,  $f_A(x)$  表示反对  $x$  的证据所导出的否定隶属度的下界, 且  $t_A(x) + f_A(x) \leq 1$ , 当  $U$  为离散空间时, Vague 集  $A$  表示为  $A = \sum_{x \in U} [t_A(x), 1 - f_A(x)] / x$ , 当  $U$  为连续空间时, Vague  $A$  表示为  $A = \int_{x \in U} [t_A(x), 1 - f_A(x)] / x$ 。闭区间  $[t_A(x), 1 - f_A(x)]$  称为  $x$  对 Vague 集  $A$  的 Vague 值, 记作  $A(x)$ , 即  $A(x) =$

\* 收稿日期: 2012-06-08 网络出版时间: 2013-05-20 18:04

资助项目: 长江师范学院科研资助项目(No. 2010C3JSK-1082)

作者简介: 彭祖明, 男, 讲师, 硕士, 研究方向为 Fuzzy 优化与 Fuzzy 决策, E-mail: pengzuming@yahoo.com.cn; 通讯作者: 陈义华, E-mail: yhchen@cqu.edu.cn

网络出版地址: [http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130520.1804.201303.85\\_016.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130520.1804.201303.85_016.html)

$[t_A(x), 1-f_A(x)]$ , 如果没有指定某个 Vague 集, 记元素  $x$  的 Vague 值为  $x=[t_x, 1-f_x]$ 。本文  $U$  为离散空间。

**定义 2**<sup>[2-3]</sup>  $A, B$  是论域  $U$  上两个 Vague 集, 如果对任意的  $x \in U$ , 都有  $t_A(x) \leq t_B(x)$  且  $f_A(x) \geq f_B(x)$ , 则  $A \subseteq B$ 。如果  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$ , 则  $A = B$ 。

**定义 3**<sup>[1-4]</sup> 已知论域  $U$  上的元素  $x, y, z$  的 Vague 值分别为  $x=[t_x, 1-f_x], y=[t_y, 1-f_y], z=[t_z, 1-f_z]$ , 如果函数  $m(x, y)$  满足:

- 1)  $0 \leq m(x, y) \leq 1$ ;
- 2)  $m(x, y) = 1 \Leftrightarrow t_x = t_y$  且  $f_x = f_y$ ;
- 3)  $m(x, y) = m(y, x)$ ;
- 4)  $m(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = [1, 1]$  且  $y = [0, 0]$  或  $x = [0, 0]$  且  $y = [1, 1]$ ;
- 5)  $t_x \leq t_y \leq t_z, f_x \geq f_y \geq f_z \Rightarrow m(x, z) \leq m(x, y), m(x, z) \leq m(y, z)$ 。

则称  $m(x, y)$  是 Vague 值  $x$  和  $y$  之间的相似度量。

**定义 4**<sup>[1-5]</sup> 设论域  $U$  上的 Vague 集全体为  $V$ , 对于  $A, B, C \in V$ , 定义映射  $M: V \times V \rightarrow [0, 1]$ , 如果映射  $M$  满足:

- 1)  $0 \leq M(A, B) \leq 1$ ;
- 2)  $M(A, B) = 1 \Leftrightarrow A = B$ ;
- 3)  $M(A, B) = M(B, A)$ ;
- 4)  $M(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = \sum [a_i, a_i]/x_i$  且  $B = \sum [b_i, b_i]/x_i, a_i + b_i = 1, a_i, b_i \in \{0, 1\}$ ;
- 5)  $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow M(A, C) \leq M(A, B), M(A, C) \leq M(B, C)$ 。

则称映射  $M$  为 Vague 集  $A, B$  的相似度量。

## 2 建模须考虑的因素

两个 Vague 集(值)相似度量建模须考虑的因素:

- 1) 相似度量模型须满足定义 4, 即 Vague 值相似度量模型须满足定义 3。
- 2) 模型包含 Vague 值的信息多少, 原因在于 Vague 值的信息的多少影响模型的区分度。
- 3) 模型的结构。模型的结构影响模型区分度、是否符合直觉的另一因素, 如模型  $M_H$  与模型  $M_O$ 、模型  $M_T$  与模型  $M_{ZTZ}$  等。

## 3 模型的提出及试验

### 3.1 Vague 值相似度量

**定理 1** 设 Vague 值  $x = [t_x, 1-f_x], y = [t_y, 1-f_y]$ , 满足  $t_x + f_x \leq 1, t_y + f_y \leq 1$ , 则函数

$$m(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \phi(x, y) - \frac{S(x, y)}{4} - \frac{|t_x - t_y|}{4}$$

为 Vague 值  $x, y$  之间的相似度量。其中,  $\phi(x, y) = \frac{(t_x \wedge t_y) + (f_x \wedge f_y) + (\pi_x \wedge \pi_y) + (u(x) \wedge u(y))}{(t_x \vee t_y) + (f_x \vee f_y) + (\pi_x \vee \pi_y) + (u(x) \vee u(y))}$ ,

$$\pi_x = 1 - t_x - f_x, \pi_y = 1 - t_y - f_y, S(x, y) = |t_x - t_y - f_x + f_y|, u(x) = \frac{1}{2}(t_x + 1 - f_x), u(y) = \frac{1}{2}(t_y + 1 - f_y)。$$

**证明** 显然满足定义 3 的 1)、3)。

2)(充分性显然)必要性:

若  $m(x, y) = 1$ , 则

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \phi(x, y) - \frac{S(x, y)}{4} - \frac{|t_x - t_y|}{4} = 1$$

$$\therefore 0 \leq \frac{1}{2} \phi(x, y) \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \frac{1}{4} - \frac{S(x, y)}{4} \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{|t_x - t_y|}{4} \leq \frac{1}{4}, \therefore \phi(x, y) = 1, S(x, y) = 0, t_x = t_y。$$

由  $S(x, y) = 0$  得  $u(x) = u(y)$ 。由  $t_x = t_y$  得  $f_x = f_y$ , 从而有  $\pi_x = \pi_y$

$$\therefore \frac{(t_x \wedge t_y) + (f_x \wedge f_y) + (\pi_x \wedge \pi_y) + u(x)}{(t_x \vee t_y) + (f_x \vee f_y) + (\pi_x \vee \pi_y) + u(x)} = 1$$

从而  $t_x = t_y, f_x = f_y$  成立。

4)(充分性显然)必要性:

若  $m(x, y) = 0$ , 由于  $0 \leq \frac{1}{2} \phi(x, y) \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \frac{1}{4} - \frac{S(x, y)}{4} \leq \frac{1}{4}$ , 则

$$\frac{S(x, y)}{4} \leq \frac{1}{4}, 0 \leq \frac{1}{4} - \frac{|t_x - t_y|}{4} \leq \frac{1}{4}, \text{ 则}$$

$$\phi(x, y) = 0, S(x, y) = 1, t_x - t_y = \pm 1$$

$$\therefore (t_x \wedge t_y) + (f_x \wedge f_y) + (\pi_x \wedge \pi_y) + (u(x) \wedge u(y)) = 0,$$

$$t_x - t_y - f_x + f_y = \pm 1, t_x - t_y = \pm 1$$

$$\therefore t_x = 1, f_x = 0, t_y = 0, f_y = 1 \text{ 或 } t_x = 0, f_x = 1, t_y = 1, f_y = 0。$$

5)  $\therefore t_x \leq t_y \leq t_z, f_x \geq f_y \geq f_z, \therefore S(x, z) \geq S(x, y), u(x) \leq u(y) \leq u(z), |t_x - t_y| < |t_x - t_z|$

$$\therefore \frac{1}{4} - \frac{S(x, z)}{4} \leq \frac{1}{4} - \frac{S(x, y)}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{|t_x - t_y|}{4} \geq \frac{1}{4} - \frac{|t_x - t_z|}{4}$$

$$\text{又 } \phi(x, y) = \frac{t_x + f_y + (\pi_x \wedge \pi_y) + u(x)}{t_y + f_x + (\pi_x \vee \pi_y) + u(y)} =$$

$$\begin{cases} \frac{3+2f_y-3f_x+t_x}{3+2f_x-3f_y+t_y}, \pi_x \leq \pi_y \\ \frac{3+3t_x-2t_y-f_x}{3+3t_y-2t_x-f_y}, \pi_x > \pi_y \end{cases} \quad (1)$$

从(1)式易知, 函数  $F(t_y, f_y)$  关于  $t_y$  递减, 关于  $f_y$  递增, 则  $\phi(x, y) \geq \phi(x, z)$ , 从而  $m(x, y) \geq m(x, z)$ 。同理  $m(y, z) \geq m(x, z)$ 。证毕

### 3.2 Vague 集相似度量模型

**定理 2** 设  $A, B$  为论域  $U$  上的两个 Vague 集,  $A(x_i), B(x_i)$  为  $x_i \in U$  对 Vague 集  $A, B$  的 Vague 值,  $n$  为论域  $U$  中元素的个数, 则

$$M(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m(A(x_i), B(x_i))$$

为 Vague 集  $A, B$  的相似度量。证明略。

### 3.3 新模型试验

设论域  $U$  中的元素只有一个, 用  $u$  表示,  $A, B$  是论域  $U$  上的两个 Vague 集。选取模型  $M_H, M_O, M_{HB}, M_e^p, M_s^p, M_{syy}^{[14]}, M_{zzy}^{[16-17]}$ 。

试验 1: 已知 Vague 集  $A_1 = [0.3, 0.7]/u, B_1 = [0.4, 0.6]/u, A_2 = [0.3, 0.6]/u, B_2 = [0.4, 0.7]/u$ , 用模型  $M_H, M_O, M_{HB}, M_e^p, M_s^p$  去度量  $A_1$  与  $B_1, A_2$  与  $B_2$  的相似值均为 0.90, 而本文的模型度量的结果分别为 0.86、0.83。

试验 2: 已知 Vague 集  $A_1 = [1, 1]/u, B_1 = [0.5, 1]/u, A_2 = [0, 1]/u, B_2 = [0, 0]/u$ , 用  $M_{syy}$  度量  $A_1$  与  $B_1, A_2$  与  $B_2$  的相似值均为 0.67, 而本文的模型度量的结果分别为 0.50、0.25; 在  $A_1 = [0, 1]/u, B_1 = [0, 0]/u, A_2 = [0, 1]/u, B_2 = [1, 1]/u$  时, 用模型  $M_{zzy}$

去度量  $A_1$  与  $B_1, A_2$  与  $B_2$  的相似值均为 0.40。用本文的模型度量的结果分别为 0.25、0.08, 这表明本文提出的模型有较好的符合直觉的功能。

### 3.4 应用

选取文献[14]的“判别潜艇威胁等级”的例子。论域  $U = \{L, W_g, C, W_j, H_w, J_g, F\}$  为各种探测方法探测潜艇的特征值集合。其中  $L$  表示雷达探测技术的特征值;  $W_g$  表示微光夜视探测技术的特征值;  $C$  表示磁探测技术的特征值;  $W_j$  表示尾迹探测技术的特征值;  $H_w$  表示红外探测技术的特征值;  $J_g$  表示激光探测技术的特征值;  $F$  表示废气探测技术的特征值。选定以下几种模式作为标准模式:  $A_1$  表示极度危险;  $A_2$  表示很危险;  $A_3$  表示危险;  $A_4$  表示一般;  $A_5$  表示无危险。上述标准模式在各特征值下的相应 Vague 形式如表 1 所示。运用本文的模型有

$$M(A_1, A) = 0.817, M(A_2, A) = 0.777, M(A_3, A) = 0.682, M(A_4, A) = 0.619, M(A_5, A) = 0.574$$

这表明待识别模式应归于模式  $A_1$ , 即潜艇威胁等级为极度危险。此结论与文献[16]所给出的结论相同, 说明所建的模型保留了文献[14]模型的优点, 克服了其模型的不足。

表 1 潜艇威胁等级模式和待识别模式的 Vague 形式

模式	特征						
	$L$	$W_g$	$C$	$W_j$	$H_w$	$J_g$	$F$
$A_1$	[0.5, 0.5]	[0.4, 0.4]	[0.4, 0.4]	[0.5, 0.5]	[0.5, 0.6]	[0.4, 0.5]	[0.2, 0.3]
$A_2$	[0.3, 0.3]	[0.2, 0.3]	[0.2, 0.2]	[0.2, 0.2]	[0.1, 0.2]	[0.2, 0.3]	[0.2, 0.2]
$A_3$	[0.1, 0.2]	[0.1, 0.2]	[0.2, 0.2]	[0.1, 0.2]	[0.1, 0.2]	[0.1, 0.1]	[0.2, 0.2]
$A_4$	[0.0, 0.1]	[0.1, 0.1]	[0.1, 0.1]	[0.1, 0.1]	[0.1, 0.1]	[0.1, 0.1]	[0.2, 0.2]
$A_5$	[0.0, 0.0]	[0.1, 0.1]	[0.1, 0.1]	[0.0, 0.1]	[0.0, 0.1]	[0.1, 0.1]	[0.1, 0.2]
$A$	[0.4, 0.4]	[0.2, 0.2]	[0.3, 0.3]	[0.4, 0.4]	[0.4, 0.4]	[0.3, 0.4]	[0.2, 0.3]

## 4 结论

本文分析了已有的 Vague 集相似度量模型不足, 提出了一个 Vague 集相似度的新模型, 该模型与已有的模型相比, 有较好的区分度, 能克服已有的一些的模型的不足, 度量结果较符合人的直觉。但是 Vague 集的度量模型的好坏与模型的结构有关, 所以, 从模型的结构出发对 Vague 集的模型加以改进的研究是值得进一步研究的问题。

### 参考文献:

[1] Chen S M. Measures of similarity between Vague sets[J]. Fuzzy Sets SySt, 1995, 74(2): 217-223.

[2] Hong D H, Kim C. A note on similarity measures between Vague sets and between elements [J]. Inform Science, 1999, 115: 83-96.

[3] Fan L, Zhang Y X. Similarity measures between Vague sets [J]. Software, 2001, 12(6): 922-927.

[4] Deng F L, Chun T C. New similarity measure of intuitionistic Fuzzy sets and application to pattern recognitions [J]. Pattern Recognition Letter, 2002, 23: 221-225.

[5] 李艳红, 迟忠先, 阎德勤. Vague 相似度量与 Vague 熵 [J]. 计算机科学, 2002, 29(12): 129-132.

Li Y H, Chi Z X, Yan D Q. Similarity measures and entropy for Vague sets [J]. Computer Science, 2002, 29(12): 129-132.

[6] Mitchell H B. On the Dengfeng-Chuntian similarity measure and its application to pattern recognition [J]. Pattern

- Recognition Letter, 2003, 24: 3101-3104.
- [7] Zhi Z L, Peng F S. Similarity measures on intuitionistic Fuzzy sets[J]. Pattern Recognition Letter, 2003, 24: 2687-2693.
- [8] Li Y H, David L O, Zheng Q. Similarity measures between intuitionistic Fuzzy (Vague) sets; A comparative analysis [J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28: 278-285.
- [9] 赵亚娟, 王鸿绪. 关于 Vague 集间相似度量度的缺陷及修补 [J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(5): 49-51.  
Zhao Y Y, Wang H X. Faults and mends for similarity measure formulas between Vague sets[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(5): 49-51.
- [10] 王伟平, 吴祈宗, 李玉玲. Vague 集之间相似性度量的基本准则与一般方法[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(4): 73-76.  
Wang W P, Wu Q Z, Li Y L. Basic rules and general method on similarity measures between Vague sets[J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(4): 73-76.
- [11] 唐志刚. Vague 集之间的一种新的相似度量[J]. 南华大学学报: 自然科学版, 2008, 22(3): 44-48.  
Tang Z G. A new similarity measure for Vague sets[J]. Journal of University of South China: Science and Technology, 2008, 22(3): 44-48.
- [12] 孙义阳, 辛小龙. 一类新的 Vague 集间的相似度量方法及其应用[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(20): 70-72.  
Sun Y Y, Xin X L. New method of similarity measure between Vague sets and its applications[J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(20): 70-72.
- [13] 周晓光, 谭春桥, 张强. 基于 Vague 集的决策理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.  
Zhou X G, Tan C Q, Zhang Q. Decision theorem and method based on Vague sets[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [14] 张福金, 王鸿绪. Vague 集的相似度量及其应用[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(22): 47-51.  
Zhang F J, Wang H X. Similarity measures between Vague sets and its application[J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(22): 47-51.
- [15] 梁家荣, 彭芳艳, 伍华健. Vague 集之间的相似度量新方法 [J]. 计算机应用研究, 2010, 27(1): 83-85.  
Liang J R, Peng F Y, Wu H J. New method of similarity measure between Vague sets[J]. Application Research of Computers, 2010, 27(1): 83-85.
- [16] 朱振国, 王国胤. Vague 集相似度量 [J]. 计算机科学, 2008, 35(9): 220-225.  
Zhu Z G, Wang G Y. Similarity measure of Vague sets [J]. Computer Sciences, 2008, 35(9): 220-225.
- [17] 何卫民. L-fuzzy 拓扑空间的相对近似 PS 紧性 [J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2010, 27(3): 48-51.  
He W M. Relative near PS-Compact L-subsets[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2010, 27(3): 48-51.

## A New Similarity Measure Model between Vague Sets

PENG Zu-ming<sup>1</sup>, CHEN Yi-hua<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics & Computer Science, Yangtze Normal University, Chongqing 408100;

2. College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** The similarity measurement between vague sets is widely applied in fuzzy reasoning, pattern recognition, cluster analysis, decision analysis, et al. This need that the similarity measure model between vague sets has a good degree of discrimination, and the measurement results can accord with the intuition of human being. Based on this requirement, first, some analyzing was carried out on existing similarity measure models of Vague sets, from analyzing we found that some model have the shortcoming on discrimination, and some model's measurements can't accord with the intuition of human being, et al. Secondly, a new model ( $M(A, B) = (\sum_{i=1}^n m(A(x_i), B(x_i))) / n$ ) of similarity measure between Vague sets was established. To illustrate the proposed model's merit, two experimentations were carried out. The experimental results show that the proposed model had good discrimination, and can overcome the shortcoming of existing model.

**Key words:** Vague sets; similarity measure; model; intuition

(责任编辑 游中胜)