运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130401

广义凸函数的 Hadamard 不等式*

黄金莹，赵　宇

(佳木斯大学 理学院，黑龙江 佳木斯 154007)

摘要:讨论了广义凸函数的 Hadamard 不等式的统一推导方法。首先，给出 s-F 凸函数与 r-F 凸函数概念;其次，根据条件 P_1、P_2 及其所蕴含的等式关系，结合积分性质，分别给出了 s-F 凸函数与 r-F 凸函数的 Hadamard 不等式;最后，将结果应用于 5 类具体的广义凸函数，通过计算得到了 GA-凸函数、P-凸函数、s-凸函数、几何凸函数以及 r-预不变凸函数的 Hadamard 不等式。

关键词:Hadamard 不等式；s-F 凸函数；r-F 凸函数

中图分类号:O178　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)04-0001-05

Hadamard 不等式作为函数凸性与定积分结合所获得的结果被许多学者所关注，属于不等式理论研究范畴。对于经典的 Hadamard 不等式:若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数，则 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$，一方面可以就其本身加以改进和细化，另一方面，出于不等式研究和优化理论研究的需要，对凸函数通过弱化或变换，定义各类广义凸函数，从而获得相应的广义 Hadamard 不等式。

文献[1-3]指出了各类广义凸函数所具有的共同特征性质，因此对于广义凸函数来说，其 Hadamard 不等式的推导可以统一处理，这正是本文所做的工作。

1 概念与引理

定义 1[1-3]　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}$，称 K 是关于 F 的广义凸集，若存在函数 $F:K\times K\times[0,1]\rightarrow\mathbf{R}$，使得 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $F(x,y,\lambda)\in K$。

定义 2[1-3]　设 $K\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 F 的广义凸集，称 F 在 K 上满足条件 P_1、P_2，若 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$，且 $\alpha<\beta$，$\forall x,y\in K$，有 $P_1:F\left[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\alpha)$；$P_2:F\left[x,F(x,y,\alpha),\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F(x,y,\beta)$。

注 1　满足条件 P_1、P_2 的函数 F 包括

(F_1) $F(x,y,\lambda)=x^{\lambda}y^{1-\lambda}$，$\forall x,y\in[a,b]\subseteq(0,+\infty)$，$\lambda\in[0,1]$；

(F_2) $F(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$，$\forall x,y\in[a,b]$，$\lambda\in[0,1]$；

(F_3) $F(x,y,\lambda)=[\lambda x^{p}+(1-\lambda)y^{p}]^{\frac{1}{p}}$，$\forall x,y\in[a,b]\subseteq(0,+\infty)$，$\lambda\in[0,1]$，$p$ 为非零常数；

(F_4) $F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$，$\forall x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$，$K\subseteq\mathbf{R}$ 为关于 η 的不变凸集，η 在 K 上满足条件 C。

对于条件 P_1、P_2，有如下性质。

引理 1　若函数 F 在 $K\subseteq\mathbf{R}$ 上满足条件 P_1、P_2，则 $\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall u_1,u_2\in[0,1]$，$u_1\neq u_2$，$\forall x,y\in K$，有 $F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]$。

上述概念及引理参见文献[1-3]。

定义 3　设 $K\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 F 的广义凸集，F 在 K 上满足条件 P_1、P_2，$s\in(0,1]$。称函数 $f:K\rightarrow\mathbf{R}$ 在 K 上是 s-F 凸函数，若 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $f[F(x,y,\lambda)]\leqslant\lambda^{s}f(x)+(1-\lambda)^{s}f(y)$。特别地，当 $s=1$ 时，s-F 凸函数称为 F 凸函数。

* **收稿日期**:2011-10-24　**修回日期**:2013-05-23　**网络出版时间**:2013-07-20　19:23

资助项目:黑龙江省教育厅科学技术研究资助项目(No. 12531684)；佳木斯大学科学技术研究资助项目(No. L2012-038)

作者简介:黄金莹，男，副教授，硕士，研究方向为凸分析与凸规划，E-mail:hjyshuxue@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130720.1923.201304.1_031.html

定义4　设 $K\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 F 的广义凸集，$r\in\mathbf{R}$。称函数 $f:K\to\mathbf{R}^+$ 在 K 上是 r-F 凸函数，若

1) $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $f[F(x,y,\lambda)]\leqslant f^{\lambda}(x)f^{1-\lambda}(y)$，$r=0$；

2) $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $f[F(x,y,\lambda)]\leqslant[\lambda f^{r}(x)+(1-\lambda)f^{r}(y)]^{\frac{1}{r}}$，$r\neq0$。

特别地，当 $r=0$ 时，r-F 凸函数称为对数 F 凸函数。

2 s-F 凸函数的 Hadamard 不等式

定理1　(s-F 凸函数的 Hadamard 不等式) 若函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上的连续 s-F 凸函数。对于实数 $a,b\in K$，$F(b,a,0)<F(b,a,1)$，函数 $x=F(b,a,1-\lambda)$ 在 $[0,1]$ 严格减少且有连续导数，并且其反函数为 $\lambda=\lambda(x)$，$x\in[F(b,a,0),F(b,a,1)]$。则

$$\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)} f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(a)\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}\lambda^{s}(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}(1-\lambda(x))^{s}\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)} f(x)\lambda'(x)\mathrm{d}x\leqslant -2^{s-1}f\left[F\left(b,a,\frac{1}{2}\right)\right] \tag{2}$$

证明　因 $x=F(b,a,1-\lambda)$ 在 $[0,1]$ 严格减少，反函数为 $\lambda=\lambda(x)$，$x\in[F(b,a,0),F(b,a,1)]$，故 $\forall x\in[F(b,a,0),F(b,a,1)]$，有 $x=F(b,a,1-\lambda(x))$。于是

$$\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)} f(x)\mathrm{d}x=\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)} f(F(b,a,1-\lambda(x)))\mathrm{d}x\leqslant\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}[(1-\lambda(x))^{s}f(b)+\lambda^{s}(x)f(a)]\mathrm{d}x=$$
$$f(a)\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}\lambda^{s}(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}(1-\lambda(x))^{s}\mathrm{d}x$$

故(1)式成立。

对 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\lambda\neq\frac{1}{2}$，此时 $\lambda\neq1-\lambda$，根据引理1，有

$$F\left(b,a,\frac{1}{2}\right)=F\left[b,a,\frac{1}{2}\lambda+\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-\lambda)\right]=F\left[F(b,a,\lambda),F(b,a,1-\lambda),\frac{1}{2}\right]$$

补充定义 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$F\left(b,a,\frac{1}{2}\right)=F\left[F\left(b,a,\frac{1}{2}\right),F\left(b,a,\frac{1}{2}\right),\frac{1}{2}\right]$，于是

$$f\left[F\left(b,a,\frac{1}{2}\right)\right]=\int_0^1 f\left[F\left(b,a,\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}\lambda=\int_0^1 f\left[F\left[F(b,a,\lambda),F(b,a,1-\lambda),\frac{1}{2}\right]\right]\mathrm{d}\lambda\leqslant$$
$$\frac{1}{2^{s}}\int_0^1\{f[F(b,a,\lambda)]+f[F(b,a,1-\lambda)]\}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2^{s-1}}\int_0^1 f[F(b,a,1-\lambda)]\mathrm{d}\lambda\overset{\lambda=\lambda(x)}{=}$$
$$\frac{1}{2^{s-1}}\int_{F(b,a,1)}^{F(b,a,0)} f[F(b,a,1-\lambda(x))]\mathrm{d}\lambda(x)=-\frac{1}{2^{s-1}}\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)} f(x)\lambda'(x)\mathrm{d}x$$

故(2)式成立。　　证毕

推论1　(GA-凸函数的 Hadamard 不等式) 设 $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$，函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续的 GA-凸函数，即 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in[a,b]$，$f(x^{\lambda}y^{1-\lambda})\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，则

a)[4]
$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^{b}}{a^{a}}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}\right)f(a)+\left(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\right)f(b) \tag{3}$$

b)
$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\geqslant f(\sqrt{ab}) \tag{4}$$

证明　令 $F(x,y,\lambda)=x^{\lambda}y^{1-\lambda}$，$\forall x,y\in[a,b]$，$\lambda\in[0,1]$，则 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的 F 凸函数($s=1$)且满足定理1诸条件。$x=F(b,a,1-\lambda)=a^{\lambda}b^{1-\lambda}$ 在 $[0,1]$ 严格减少，容易计算它的反函数为 $\lambda(x)=\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}$。

a) 将 $F(b,a,0)=a$，$F(b,a,1)=b$，$\lambda(x)=\frac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}$，$s=1$ 代入到(1)式中计算整理得(3)式右端。再根据定积分的定义及 f 的 GA-凸性，就有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}f\left(\prod_{i=1}^{n}\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(a+\frac{i}{n}(b-a))}\right)=$$
$$f\left(\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(a+\frac{i}{n}(b-a))}\right)=f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x\mathrm{d}x}\right)=f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^{b}}{a^{a}}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right)$$

故(3)式左端不等式成立。

b) 将 $\lambda'(x)=\dfrac{-1}{x(\ln b-\ln a)}$,$F\left(b,a,\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{ab}$,$s=1$ 代入到(2)式中计算整理得到(4)式。　　证毕

推论 2 (P-凸函数的 Hadamard 不等式) 设$[a,b]\subseteq(0,+\infty)$,函数 $f(x)$为$[a,b]$上连续的 P-凸函数,即$\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in[a,b]$,$f\left([\lambda x^p+(1-\lambda)y^p]^{\frac{1}{p}}\right)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$,$p$ 为正常数,则

a) $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(a)\left(\frac{b^p}{b^p-a^p}-\frac{1}{(p+1)(b-a)}\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{b^p-a^p}\right)+\left(\frac{1}{(p+1)(b-a)}\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{b^p-a^p}-\frac{a^p}{b^p-a^p}\right)f(b)\tag{5}$$

b) $$\frac{1}{b^p-a^p}\int_a^b x^{p-1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{p}f\left(\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\tag{6}$$

证明 $F(x,y,\lambda)=[\lambda x^p+(1-\lambda)y^p]^{\frac{1}{p}}$,$\forall x,y\in[a,b]\subseteq(0,+\infty)$,$\lambda\in[0,1]$,则 $f(x)$为$[a,b]$上的 F 凸函数且满足定理 2 诸条件。$x=F(b,a,1-\lambda)=[\lambda a^p+(1-\lambda)b^p]^{\frac{1}{p}}$在$[0,1]$严格减少,容易计算它的反函数为 $\lambda(x)=\dfrac{b^p-x^p}{b^p-a^p}$。

将 $F(b,a,0)=a$,$F(b,a,1)=b$,$\lambda(x)=\dfrac{b^p-x^p}{b^p-a^p}$,$s=1$ 代入到(1)式中计算整理得(5)式。

将 $\lambda'(x)=\dfrac{-px^{p-1}}{b^p-a^p}$,$F\left(b,a,\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$,$s=1$ 代入到(2)式中计算整理得到(6)式。

注 2 p 为正常数,保证了 $T(\lambda)$在$[0,1]$严格减少。若 p 为负常数,则 $T(\lambda)$在$[0,1]$严格增加,这对(5)式无影响,对(6)式需稍作变化,这从(2)式的证明过程可以看出。

推论 3[5] (s-预不变凸函数的 Hadamard 不等式) 设 $K\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 η 的不变凸集,实数 $a,b\in K$,有 $\eta(b,a)>0$,η 在 K 上满足条件 C,$s\in(0,1]$。函数 $f(x)$为 K 上连续的 s-预不变凸函数,即

$$\forall\lambda\in[0,1],\ \forall x,y\in K,\ f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda^s f(x)+(1-\lambda)^s f(y)$$

则
$$2^{s-1}f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{s+1}\tag{7}$$

证明 令 $F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$,$\forall x,y\in K$,$\lambda\in[0,1]$,则 $f(x)$为 K 上的 s-F 凸函数且满足定理 1 诸条件。$x=F(b,a,1-\lambda)=a+(1-\lambda)\eta(b,a)$在$[0,1]$严格减少,容易计算它的反函数为 $\lambda(x)=\dfrac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}$,$F(b,a,0)=a$,$F(b,a,1)=a+\eta(b,a)$,代入到(1)式中计算整理得到(7)式右端。将 $\lambda'(x)=\dfrac{-1}{\eta(b,a)}$,$F\left(b,a,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2a+\eta(b,a)}{2}$代入到(2)式中计算整理得到(7)式左端。　　证毕

3 r-F 凸函数的 Hadamard 不等式

定理 2 (r-F 凸函数的 Hadamard 不等式) 若函数 $f:K\to\mathbf{R}^+$ 是 K 上的正值连续 r-F 凸函数。对于实数 $a,b\in K$,$F(b,a,0)<F(b,a,1)$,函数 $x=F(b,a,1-\lambda)$在$[0,1]$严格减少且有连续导数,其反函数为 $\lambda=\lambda(x)$,$x\in[F(b,a,0),F(b,a,1)]$。则

$$\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda(x)}\mathrm{d}x,\ r=0\tag{8}$$

$$\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}[\lambda(x)f^r(a)+(1-\lambda(x))f^r(b)]^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}x,\ r\neq0\tag{9}$$

证明 因 $x=F(b,a,1-\lambda)$在$[0,1]$严格减少,反函数为 $\lambda=\lambda(x)$,$x\in[F(b,a,0),F(b,a,1)]$,故$\forall x\in[F(b,a,0),F(b,a,1)]$,有 $x=F(b,a,1-\lambda(x))$。

当 $r=0$ 时,有
$$\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}f(x)\mathrm{d}x=\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}f(F(b,a,1-\lambda(x)))\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}[f(b)]^{1-\lambda(x)}\cdot[f(a)]^{\lambda(x)}\mathrm{d}x=f(b)\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda(x)}\mathrm{d}x$$

当 $r\neq0$ 时,有
$$\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}f(x)\mathrm{d}x=\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}f(F(b,a,1-\lambda(x)))\mathrm{d}x\leqslant\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}[\lambda(x)f^r(a)+(1-\lambda(x))f^r(b)]^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}x$$

故(8)、(9)式成立。 证毕

注 3 对于定理2,一般情况下,总是假定 $f(a)\neq f(b)$,这是因为当 $f(a)=f(b)$时,(8)、(9)两式都会退化为 $\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)} f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)[F(b,a,1)-f(b,a,0)]$。

推论 4 (几何凸函数的Hadamard不等式)设$[a,b]\subseteq(0,+\infty)$,函数 $f(x)$为$[a,b]$上正值连续的几何凸函数[6],即$\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall x,y\in[a,b]$,$f(x^{\lambda}y^{1-\lambda})\leqslant f^{\lambda}(x)f^{1-\lambda}(y)$,且 $bf(b)\neq af(a)$,则

$$\mathrm{e}^{\frac{\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x}{b-a}}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{[bf(b)-af(a)]}{\ln b\, f(b)-\ln a\, f(a)}\ \frac{\ln b-\ln a}{b-a}\tag{10}$$

证明 令 $F(x,y,\lambda)=x^{\lambda}y^{1-\lambda}$,$\forall x,y\in[a,b]$,$\lambda\in[0,1]$,则 $f(x)$为$[a,b]$上的对数 F 凸函数且满足定理2诸条件。将 $F(b,a,0)=a$,$F(b,a,1)=b$,$\lambda(x)=\dfrac{\ln b-\ln x}{\ln b-\ln a}$代入到(8)式中计算整理得到(10)式右端。其中

$$f(b)\int_a^b\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda(x)}\mathrm{d}x=f(b)\left[x\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda(x)}\Bigg|_a^b-\int_a^b x\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda(x)}\cdot\ln\frac{f(a)}{f(b)}\cdot\lambda'(x)\mathrm{d}x\right]=$$

$$bf(b)-af(a)+\frac{\ln f(a)-\ln f(b)}{\ln b-\ln a}f(b)\int_a^b\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda(x)}\mathrm{d}x$$

故 $f(b)\int_a^b\left[\dfrac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda(x)}\mathrm{d}x=\dfrac{[bf(b)-af(a)](\ln b-\ln a)}{\ln b\, f(b)-\ln a\, f(a)}$。

注意到 f 为正值函数,就有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\geqslant\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}f^{\frac{1}{n}}\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)}=\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)}=\mathrm{e}^{\frac{\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x}{b-a}}$$

故(10)式左端不等式成立。 证毕

注 4 文献[6]中定理1的(4)式实际上是GA-凸函数的Hadamard不等式,即本文的(3)式,这是因为几何凸函数是GA-凸函数。结合本文(3)、(10)两式及其证明过程,对于$[a,b]$上的连续几何凸函数,有如下Hadamard型不等式链

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x}{b-a}}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{[bf(b)-af(a)]}{\ln b\, f(b)-\ln a\, f(a)}\ \frac{\ln b-\ln a}{b-a}\leqslant$$

$$\left(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}\right)f(a)+\left(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\right)f(b)$$

注意到$\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}=a^{\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}}b^{\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}}$,则当 f 为$[a,b]$上的GA-凸函数时可推得

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right)\leqslant\left(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}\right)f(a)+\left(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\right)f(b)$$

因此,上述不等式链是当GA-凸函数加强为几何凸函数时的细化。

推论 5[7] (r-预不变凸函数的Hadamard不等式)设 $K\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 η 的不变凸集,对于两实数 $a,b\in K$,有 $\eta(b,a)>0$,η 在 K 上满足条件C。函数 $f(x)$为 K 上正值连续的 r-预不变凸函数,即

$$\forall\lambda\in[0,1],\forall x,y\in K,f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant f^{\lambda}(x)f^{1-\lambda}(y),r=0$$

$$\forall\lambda\in[0,1],\forall x,y\in K,f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant[\lambda f^{r}(x)+(1-\lambda)f^{r}(y)]^{\frac{1}{r}},r\neq0$$

且 $f(a)\neq f(b)$。则

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{\ln f(b)-\ln f(a)},r=0\tag{11}$$

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(a)f(b)\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{f(b)-f(a)},r=-1\tag{12}$$

$$\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{r}{r+1}\ \frac{f^{r+1}(b)-f^{r+1}(a)}{f^{r}(b)-f^{r}(a)},r\neq0,-1\tag{13}$$

证明 令 $F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$,$\forall x,y\in K$,$\lambda\in[0,1]$,$\lambda(x)=\dfrac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}$,$F(b,a,0)=a$, $F(b,a,1)=a+\eta(b,a)$,$\lambda(a)=1$,$\lambda(a+\eta(b,a))=0$,满足定理2诸条件。

当 $r=0$ 时，将上述数据代入到(8)式中计算整理得到(11)式。其中

$$f(b)\int_a^{a+\eta(b,a)}\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda(x)}\mathrm{d}x \overset{令\lambda(x)=\lambda}{=} \eta(b,a)f(b)\int_0^1\left[\frac{f(a)}{f(b)}\right]^{\lambda}\mathrm{d}\lambda=\eta(b,a)\frac{f(b)-f(a)}{\ln f(b)-\ln f(a)}$$

当 $r=-1$ 时，将上述数据代入到(9)式中计算整理得到(12)式。其中

$$\int_a^{a+\eta(b,a)}\left[\lambda(x)f^{-1}(a)+(1-\lambda(x))f^{-1}(b)\right]^{-1}\mathrm{d}x \overset{令\lambda(x)=\lambda}{=}$$

$$\eta(b,a)\int_0^1\left[\lambda f^{-1}(a)+(1-\lambda)f^{-1}(b)\right]^{-1}\mathrm{d}\lambda \overset{令t=\lambda f^{-1}(a)+(1-\lambda)f^{-1}(b)}{=}$$

$$\frac{\eta(b,a)}{f^{-1}(b)-f^{-1}(a)}\int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)}t^{-1}\mathrm{d}t=\eta(b,a)f(a)f(b)\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{f(b)-f(a)}$$

当 $r\neq 0,-1$ 时，将上述数据代入到(9)式中计算整理得到(13)式。其中

$$\int_a^{a+\eta(b,a)}\left[\lambda(x)f^r(a)+(1-\lambda(x))f^r(b)\right]^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}x \overset{令\lambda(x)=\lambda}{=} \eta(b,a)\int_0^1\left[\lambda f^r(a)+(1-\lambda)f^r(b)\right]^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}\lambda \overset{令t=\lambda f^r(a)+(1-\lambda)f^r(b)}{=}$$

$$\frac{\eta(b,a)}{f^r(b)-f^r(a)}\int_{f^r(a)}^{f^r(b)}t^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}t=\eta(b,a)\frac{r}{r+1}\ \frac{f^{r+1}(b)-f^{r+1}(a)}{f^r(b)-f^r(a)}$$

参考文献：

[1] 黄金莹，赵宇，方秀男. *F-G* 广义凸函数与 *F* 拟凸函数[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2011，28(4)：11-15.
Huang J Y, Zhao Y, Fang X L. The *F-G* generalized convex and *F* quasi convex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011, 28(4): 11-15.

[2] 赵宇，黄金莹. 半严格 *F-G* 广义凸函数[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2011，28(1)：7-12.
Zhao Y, Huang J Y. Semi-strictly *F-G* generalized convex functions[J]. Chongqing Normal University: Natural Science, 2011, 28(1): 7-12.

[3] 黄金莹，赵宇. 广义凸函数与弱近似凸集[J]. 黑龙江大学学报：自然科学版，2011，28(2)：200-205.
Huang J Y, Zhao Y. Generalized convex functions and weak nearly convex sets [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University: Natural Science, 2011, 28(2): 200-205.

[4] 华云. 关于 GA-凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 大学数学，2008，24(2)：147-149.
Hua Y. A Hamard type inequality of GA-convex function [J]. College Mathematics, 2008, 24(2): 147-149.

[5] 李觉友. 关于 *s*-预不变凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(4)：5-8.
Li J Y. On Hadamard-type inequalities for *s*-preinvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2010, 27(4): 5-8.

[6] 张小明. 关于几何凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 数学的实践与认识，2004，34(9)：171-176.
Zhang X M. An inequality of the Hadamard type for the geometric convex functions[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2004, 34(9): 171-176.

[7] 毕燕丽. 关于 *r*-预不变凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 数学的实践与认识，2009，39(2)：190-192.
Bi Y L. Hadamard type inequality of *r*-preinvex functions [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 32(9): 190-192.

Operations Research and Cybernetics

Hadamard Inequalities of Generalized Convex Functions

HUANG Jin-ying, ZHAO Yu

(Dept. of Mathematics, Jiamusi University, Jiamusi Heilongjiang 154007, China)

Abstract: The author gives Hadamard inequalities of generalized convex functions. The concept and Hadamard inequalities of *s-F* convex functions and *r-F* convex functions are established through use conditions P_1, P_2 and equality relation between them. At last, the author obtains Hadamard inequalities of GA-convex functions, P-convex functions, *s*-preinvex function, geometric convex functions and *r*- preinvex functions.

Key words: Hadamard inequality; *s-F* convex functions; *r-F* convex functions

(责任编辑　黄　颖)