2013 年 7 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jul. 2013
第 30 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 4

DOI:10.11721/cqnuj20130414

关于 $f^m(f^{(k)})^n-\varphi(z)$ 的零点*

李国望[1], 苏先锋[2], 许道军[1]

(1. 陆军军官学院 基础部, 合肥 230031; 2. 淮北师范大学 数学系, 安徽 淮北 235000)

摘要:利用亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论方法,讨论了 $f^m(f^{(k)})^n-\varphi(z)$ 关于值分布的一个结果,得到了更为一般的结论。设 f 是复平面上的超越亚纯函数,$\varphi(z)$ 是 f 的一个不恒等于零的小函数,m,k,n 都为正整数。当 $k\geqslant1,n,m\geqslant2$ 时,$f^m(f^{(k)})^n-\varphi(z)$ 有无穷多个零点。推广并改进了已有文献中的有关定理。

关键词:亚纯函数;零点;值分布

中图分类号:O174.52 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)04-0072-04

1 引言及主要结果

1959 年,Hayman[1] 首先提出并考虑了 $f'f^n$ 的值分布问题:设 f 是复平面上的超越亚纯函数,则 $f'f^n$ 取每个有限复数无穷多次。上述问题直到最近才被陈怀惠[2]等应用 W. Bergweiler 和 A. Eremenko[3] 的结果而完全解决。1989 年,仪洪勋[4]部分地解决了 $n=1$ 的情形,并对 $f'f-a$ 的零点个数给出了一定量估计,其中 a 是异于零的有穷复数。在此期间及其后,Hayman 问题被进行了较广泛的推广,其中之一是用 $(f^{(k)})^n$ 代替 f',讨论 $f(f^{(k)})^n$ 的值分布问题。比较好的结果如下。

定理 A[5] 设 f 是一超越整函数,n,k 是 2 个正整数,则当 $n\geqslant2$ 时,$f(f^{(k)})^n$ 取任意非零有限复数无穷多次。

张中发[6]等进一步证明了当用小函数代替有限值时结论仍成立。本文在此基础上,研究了更为一般形式的 $f^m(f^{(k)})^n-\varphi(z)$ 的值分布问题[7],推广并改进了上述定理,得到定理 1。

定理 1 设 f 是一超越亚纯函数,m,k,n 是 3 个正整数,当 $k\geqslant1,n,m\geqslant2$ 时,$f^m(f^{(k)})^n-\varphi$ 有无穷多个零点。这里 $\varphi\not\equiv0$ 是 f 的一个小函数。

不失一般性,当 $\varphi(z)$ 等于非零常数时,有如下推论。

推论 设 f 是一超越亚纯函数,m,k,n 是 3 个正整数,当 $k\geqslant1,n,m\geqslant2$ 时,$f^m(f^{(k)})^n$ 取任意非零有限复数无穷多次。

本文采用亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的标准记号[8]。

2 若干引理

引理 1[9] 设 f 亚纯且 $f^{(k)}\not\equiv0$,则 $N\left(r,\dfrac{1}{f^{(k)}}\right)\leqslant N\left(r,\dfrac{1}{f}\right)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f)$。

引理 2[10] 设 f_1,f_2 是两个亚纯函数,则 $N(r,f_1f_2)-N\left(r,\dfrac{1}{f_1f_2}\right)=N(r,f_1)+N(r,f_2)-N\left(r,\dfrac{1}{f_1}\right)-N\left(r,\dfrac{1}{f_2}\right)$。

现在来证明一个主要引理,它对本文定理的证明起着主要的作用。

引理 3 令 $\psi=f^m(f^{(k)})^n-\varphi$,这里 m,k,n 如定理 1 中所述。在定理 1 的条件下,则有

$$nT(r,f^{(k)})\leqslant(k+3)N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\left(2-\frac{3}{2k+2}\right)N(r,f^{(k)})+S(r,f)$$

证明 令 $\psi_1=\dfrac{\psi}{\varphi}$ 并求导,有

$$\psi_1'=\left(\frac{\Psi}{\varphi}\right)'=(f^{(k)})^{n-1}\left\{\left(\frac{1}{\varphi}\right)'f^mf^{(k)}+\frac{m}{\varphi}f^{m-1}f'f^{(k)}+\frac{n}{\varphi}f^mf^{(k+1)}\right\}\tag{1}$$

* 收稿日期:2012-07-19 修回日期:2012-09-02 网络出版时间:2013-07-20 19:23

资助项目:安徽省高校优秀青年人才基金(No. 2011SQRL172)

作者简介:李国望,男,讲师,硕士,研究方向为复分析与微分方程,E-mail: leeguowang@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130720.1923.201304.72_011.html

从(1)式可以看出，除了 φ 的极点和零点外，$f^{(k)}$ 的零点都是 ψ_1' 的零点，因此

$$(n-1)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\psi_1'}\right)+N(r,\varphi)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\overline{N}(r,\psi)+S(r,f)\leqslant$$
$$N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\tag{2}$$

从(1)式知
$$mf'+(n\alpha-\beta)f=F\tag{3}$$
这里 $\alpha=\dfrac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}$，$\beta=\dfrac{\varphi'}{\varphi}$，$F=\dfrac{\varphi\psi_1'}{f^{m-1}(f^{(k)})^n}$。

将 F 的零点分为 2 类：F 的第一类零点不是 $\varphi(z)$ 的零点或极点，这类零点的密指量记为 $N^*\left(r,\dfrac{1}{F}\right)$；$F$ 的其它零点的密指量记为 $N_\varphi\left(r,\dfrac{1}{F}\right)$。显然有 $N_\varphi\left(r,\dfrac{1}{F}\right)=S(r,f)$。

设 z_0 是 F 的一个第一类零点，则 z_0 必不是 f 的极点，从而不是 $f^{(k)}$ 的极点。于是有
$$N^*\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}F}\right)\tag{4}$$

按 F 的定义有 $\varphi\psi_1'=f^{m-1}(f^{(k)})^{n-1}(f^{(k)}F)$，从(3)式可以看出，$f^{(k)}$ 的任一零点至多是 F 的一个简单极点，从而不是 $f^{(k)}F$ 的极点。另一方面，除了可能的 φ 的零点和极点外，$f^{(k)}F$ 的任一零点都不是 f 的极点，从而不是 $f^{m-1}(f^{(k)})^{n-1}$ 的极点。于是由上述式子有
$$(n-1)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}F}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\varphi\psi'}\right)+N(r,\varphi)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)$$

结合(4)式，有
$$N^*\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\varphi\psi'}\right)-(n-1)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+N(r,\varphi)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)\leqslant$$
$$N\left(r,\frac{1}{\psi'}\right)-(n-1)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f)$$

因此
$$N\left(r,\frac{1}{F}\right)=N^*\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_\varphi\left(r,\frac{1}{F}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\psi'}\right)-(n-1)N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f)\tag{5}$$

对(3)式两边求导，可得 $mf''+(n\alpha'-\beta')f+(n\alpha-\beta)f'=F'$。再结合(3)式给出 $mf''+C_2(\alpha)f=D_2(F)$，其中 $C_2(\alpha)=(n\alpha'-\beta')-\dfrac{1}{m}(n\alpha-\beta)^2$，$D_2(F)=F'-\dfrac{1}{m}(n\alpha-\beta)F$。

继续上述步骤，有
$$mf^{(k)}+C(\alpha)f=D(F)\tag{6}$$
其中 $D(F)=F^{(k-1)}+C_1(\alpha)F^{(k-2)}+\cdots+C_{k-1}(\alpha)F$，$C_i(\alpha)(i=1,2,\cdots,k-1)$ 是各极点的级不超过 i 的 α 的拟微分多项式。对(6)式两边求导，并应用(3)式，有
$$mf^{(k+1)}+\left[C'(\alpha)-\frac{1}{m}(n\alpha-\beta)C(\alpha)\right]f=D'(F)-\frac{1}{m}C(\alpha)F\tag{7}$$
联立(6)、(7)式，整理得
$$f=\frac{D'(F)-\frac{1}{m}C(\alpha)F-\alpha D(F)}{C'(\alpha)-\left[\frac{1}{m}(n\alpha-\beta)-\alpha\right]C(\alpha)}\tag{8}$$

将 f 的零点分为 3 类：第 1 类零点不是 $f^{(k)}$ 的零点和 φ 零点与极点，第 2 类零点同时也是 $f^{(k)}$ 的零点；f 的其它零点归于第 3 类。相应的精简密指量记为 $\overline{N}_i\left(r,\dfrac{1}{f}\right)(i=1,2,3)$。

显然有 $\overline{N}_3\left(r,\dfrac{1}{f}\right)\leqslant N(r,\varphi)+N\left(r,\dfrac{1}{\varphi}\right)=S(r,f)$。

从(1)式可以看出，f 的第 2 类零点至少是 ψ_1' 的 n 级零点，因此 $\overline{N}_2\left(r,\dfrac{1}{f}\right)\leqslant\dfrac{1}{n}N\left(r,\dfrac{1}{\psi_1'}\right)+S(r,f)$。设 z_1 是 f 的一个第 1 类零点，则 z_1 不是(8)式中分母的极点，而是它的分子的零点，所以 $\overline{N}_1\left(r,\dfrac{1}{f}\right)\leqslant N\left(r,\dfrac{1}{D'(F)-\frac{1}{m}C(\alpha)F-\alpha D(F)}\right)$。

从 $D(F)$ 的表达式知 $D'(F)-\frac{1}{m}C(\alpha)F-\alpha D(F)=F^{(k)}+B_1(\alpha)F^{(k-1)}+\cdots+B_k(\alpha)F$，这里 $B_i(\alpha)(i=1,2,\cdots,k)$ 是 α 的拟微分多项式，其每一极点的级不超过 i。

记 $F^*=\frac{F^{(k)}}{F}+B_1(\alpha)\frac{F^{(k-1)}}{F}+\cdots+B_k(\alpha)$，则 F^* 的极点来自于 $F,f^{(k)},\varphi$ 的零点，或 f 和 φ 的极点。且 F^* 的每一极点的级不超过 k，所以

$$N(r,F^*)\leqslant N\left(\frac{1}{F}\right)+k\,\overline{N}(r,f)+k\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+k\,\overline{N}(r,\varphi)+k\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)\leqslant$$
$$N\left(r,\frac{1}{F}\right)+k\,\overline{N}(r,f)+k\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f)$$

考虑到 $m(r,F^*)=S(r,f)$，故有

$$T(r,F^*)\leqslant N\left(r,\frac{1}{F}\right)+k\,\overline{N}(r,f)+k\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f)\tag{9}$$

于是

$$\overline{N}_1\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{D'(F)-\frac{1}{m}C(\alpha)F-\alpha D(F)}\right)=N\left(r,\frac{1}{FF^*}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{F}\right)+N\left(r,\frac{1}{F^*}\right)\leqslant$$
$$2N\left(r,\frac{1}{F}\right)+k\,\overline{N}(r,f)+k\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f)$$

上式结合(5)式，有

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)=\overline{N}_1\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}_3\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant$$
$$2N\left(r,\frac{1}{F}\right)+k\,\overline{N}(r,f)+k\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\frac{1}{n}N\left(r,\frac{1}{\psi_1'}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$\left(2+\frac{1}{n}\right)N\left(r,\frac{1}{\psi'}\right)+k\,\overline{N}(r,f)+(k+3-2n)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f)\tag{10}$$

另一方面，(1)式还蕴涵着

$$f^{m+1}G=\frac{\psi_1'}{\psi_1}\tag{11}$$

这里 $G=\frac{\psi_1'}{\psi_1}\frac{(f^{(k)})^n}{f\varphi}-\left(\frac{1}{\varphi}\right)'\frac{(f^{(k)})^n}{f}-\frac{m}{\varphi}\frac{f'(f^{(k)})^n}{f^2}-\frac{n}{\varphi}\frac{(f^{(k)})^{n-1}f^{(k+1)}}{f}$。

由 G 表达式易知，$m(r,G)=S(r,f)$。由(11)式和引理2，得

$$(m+1)m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m(r,G)+m\left(r,\frac{\psi_1}{\psi_1'}\right)\leqslant m(r,G)+m\left(r,\frac{\psi_1}{\psi_1'}\right)+N\left(r,\frac{\psi_1'}{\psi_1}\right)-N\left(r,\frac{\psi_1'}{\psi_1}\right)+O(1)\leqslant$$
$$\overline{N}(r,\psi_1)+N\left(r,\frac{1}{\psi_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{\psi_1'}\right)+S(r,f)\leqslant\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)-N\left(r,\frac{1}{\psi_1'}\right)+S(r,f)\tag{12}$$

从(11)式还可推得

$$f^m\,(f^{(k)})^nH=\frac{\psi_1'}{\psi_1}\tag{13}$$

其中 $H=\frac{1}{\varphi}\frac{\psi_1'}{\psi_1}-\left(\frac{1}{\varphi}\right)'-\frac{m}{\varphi}\frac{f'}{f}-\frac{n}{\varphi}\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}$，且有 $m(r,H)=S(r,f)$。

由(13)式有

$$n\cdot m(r,f^{(k)})\leqslant m\cdot m\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{1}{H}\right)+m(r,\psi_1'/\psi_1)\leqslant$$
$$m\cdot m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,H)-N\left(r,\frac{1}{H}\right)+S(r,f)\tag{14}$$

下面估计 $N(r,H)$。观察到 H 的极点来自于 ψ_1,f 和 $f^{(k)}$ 的零点，或者 φ 的零点和极点。且 f 的极点不再是 H 的极点，而是 H 的零点。故有

$$N(r,H)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+N(r,\varphi)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f)\tag{15}$$

另一方面，由(13)式还可推得

$$N\left(r,\frac{1}{H}\right)\geqslant nN(r,f^{(k)})+mN(r,f)-\overline{N}(r,f)+S(r,f)\geqslant nN(r,f^{(k)})+(m-1)\overline{N}(r,f)+S(r,f) \quad (16)$$

综合(12)、(14)～(16)式，得

$$n\cdot m(r,f^{(k)})\leqslant\left(\frac{m}{m+1}+1-m\right)\overline{N}(r,f)+\left(\frac{m}{m+1}+1\right)N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)-\frac{m}{m+1}N\left(r,\frac{1}{\psi_1'}\right)+$$
$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)-nN(r,f^{(k)})+S(r,f)$$

上式合并(10)式，并应用(2)式和引理1，有

$$nT(r,f^{(k)})\leqslant\left(3+k-m+\frac{1}{n}\right)\overline{N}(r,f)+\left(3+\frac{1}{n}\right)N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+(k+3-2n)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$(k+3)N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\left(2-\frac{3}{2k+2}\right)N(r,f^{(k)})+S(r,f) \quad (17)$$

于是引理3得证。 证毕

3 定理1的证明

假设 $\psi=f^m(f^{(k)})^n-\varphi$ 只有有限多个零点，则 $N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)=O(\log r)$，对(17)式应用引理3，有

$$\left(n-2+\frac{3}{2k+2}\right)T(r,f^{(k)})\leqslant(k+3)N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+S(r,f)=O(\log r)+S(r,f)$$

因为 $n\geqslant2$，由此可得 $T(r,f^{(k)})=O(\log r)+S(r,f)$，则可推得 $f^{(k)}$ 是有理函数，从而可知 f 也是有理函数。这与题设 f 是超越亚纯函数矛盾。故定理1得证。

参考文献：

[1] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives[J]. Ann of Math, 1959, 70(1): 9-42.

[2] 陈怀惠，方明亮. 关于 f^nf' 的值分布[J]. 中国科学，1995，38A(2)：789-798.
Chen H H, Fang M L. On the valur distribution of f^nf' [J]. Science in China, 1995, 38A(2): 789-798.

[3] Bergweiler W, Eremenko A. On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order[J]. Revista Mathematical Iberoamericana, 1995, 11(2): 355-374.

[4] 仪洪勋. 关于 $f'f$ 的值分布[J]. 科学通报，1989，34(10)：727-730.
Yi H X. On the value distributions of $f'f$[J]. Chinese Science Bulltin, 1989, 34(10): 727-730.

[5] 杨重骏，杨乐，王跃飞. 关于 $(f^{(k)})^nf-a$ 的零点[J]. 科学通报，1993，38(24)：2215-2218.
Yang CJ, Yang L, Wang Y F. On the zeros of $(f^{(k)})^nf-a$ [J]. Chin Sci Bull, 1993, 38(24): 2215-2218.

[6] 张中发，宋国栋. 关于 $f(f^{(k)})^n-a(z)$ 的零点[J]. 数学年刊，1998，19(2)：275-282.
Zhang Z F, Song G D. On the zeros of $f(f^{(k)})^n-a(z)$[J]. Chin Ann Math, 1998, 19(2): 275-282.

[7] 李国望，高凌云. 关于 $f^m(f^{(k)})^n-\varphi$ 的值分布[J]. 暨南大学学报：自然科学版，2008，29(5)：424-426.
Li G W, Gao L Y. On the value distributions of $f^m(f^{(k)})^n-\varphi$[J]. Journal of Jinan University: Natural Science, 2008, 29(5): 424-426.

[8] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Oxford University Press, 1964.

[9] Hua X H, Chuang C T. On a conjecture of Hayman[J]. Acta Math Sinica, New series, 1991, 7(2): 119-126.

[10] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京：科学出版社，1982.
Yang L. Value distribution theory and its new development [M]. Beijing: Science Press, 1982.

On the Zeros of $f^m(f^{(k)})^n-\varphi(z)$

LI Guo-wang[1], SU Xian-feng[2], XU Dao-jun[1]

(1. Dept. of Basic Courses, Army Officer Academy, Hefei 230031;
2. Dept. of Mathematics, Huaibei Normal University, Huaibei Anhui 235000, China)

Abstract: Using the Nevanlinna value distribution theory of meromorphic function, we consider the problem of value distribution of $f^m(f^{(k)})^n-\varphi(z)$. We obtain a more general result. Let f be a transcendental meromorphic function on the complex plane. Suppose that $\varphi(z)$ is not identically zero and a small function of f, m, k, n are three positive integers. If $k\geqslant1$, n, $m\geqslant2$, then $f^m(f^{(k)})^n-\varphi$ has infinitely many zeros. This paper also extends the relative theorems of Zhang Zhonghua and other people.

Key words: meromorphic function; zeros; value distribution

(责任编辑 黄 颖)