DOI:10.11721/cqnuj20130415

关于单 K_3-群 $L_3(3)$ 和 $U_3(3)$*

何 立 官
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要：设 G 为有限群，$o_1(G)$ 表示 G 中最高阶元素的阶。用极少的数量刻画有限单群是单群刻画领域中一个有趣的课题。本文只用群的阶及最高阶元素的阶刻画了单 K_3-群 $L_3(3)$ 和 $U_3(3)$，即证明了：设 G 为有限群，M 为单 K_3-群 $L_3(3)$ 和 $U_3(3)$，则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$，且 $o_1(G)=o_1(M)$。

关键词：有限群；最高阶元素的阶；单 K_3-群；刻画
中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2013)04-0076-03

1 引言及符号说明

在过去 30 年里，用群的阶和元素阶的集合刻画有限单群一直是单群数量刻画领域中的一个重要的课题。课题的提出者施武杰教授及其学生对该课题做了大量工作，并证明了几乎所有有限单群都可以通过群的阶与元素阶之集合唯一刻画[1-7]。2009 年俄罗斯数学家 V. D. Mazurov 等人在施武杰教授工作的基础上最终完成课题的证明[8]。数量刻画的关键在于数量的多少，人们总是希望用越少的数量刻画越多的群的性质。于是笔者试图用更少的数量去刻画有限单群，并成功地用群的阶、最高阶元素的阶(极少数情况用到了次高阶元素的阶)刻画了单 K_3-群、单 K_4-群、散在单群、部分李型单群和部分对称群[9-12]。在文献[11]中，作者用群的阶和最高阶元素的阶刻画了 4 个单 K_3-群：A_5，A_6，$L_2(8)$，$L_2(17)$；而用群的阶、最高阶元的阶及次高阶元的阶刻画了余下的 4 个单 K_3-群：$L_2(7)$，$L_3(3)$，$U_3(3)$，$U_4(2)$。本文将证明单 K_3-群 $L_3(3)$ 和 $U_3(3)$ 也可以仅由其阶及最高阶元的阶唯一确定。

为了讨论方便，对本文出现的一些符号加以说明。本文所讨论的群均为有限群，$\pi_e(G)$ 表示群 G 的元素阶的集合，$o_1(G)$ 表示群 G 中最高阶元素的阶，$o_2(G)$ 表示群 G 中次高阶元素的阶。设 k 为一正整数，$\pi(k)$ 表示 k 的素因子之集，特别地 $\pi(G)=\pi(|G|)$。用 $\Gamma(G)$ 表示 G 的素图，$t(G)$ 表示 G 的素图连通分支数，$\pi_i(i=1,2,\cdots,t(G))$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支所含顶点之集。如果 $2\,|\,|G|$，则总设 $2\in\pi_1$[13]。其余符号及术语是标准的。

2 主要引理

引理 1[13]　设 G 的素图分支大于 1，则 G 的结构是如下之一：

1) G 是 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群；

2) G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $\left|G/K\right|\,\Big|\,\left|Out\left(K/H\right)\right|$。

引理 2[14]　设 G 是偶阶 Frobenius 群，K 是 Frobenius 核，H 是 Frobenius 补，则 $t(G)=2$ 且 $\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。

引理 3[14]　设 G 是偶阶 2-Frobenius 群，则 $t(G)=2$，且 G 有正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 $\pi\left(K/H\right)=\pi_2$，

* **收稿日期**：2012-10-07　　**网络出版时间**：2013-07-20　19:23
资助项目：国家自然科学基金（No. 11171364；No. 11271301）；重庆市自然科学基金（No. CSTC2011jjA00020）；重庆市教委科技项目（No. KJ110609；No. KJ110614）；重庆市教委教改项目（No. yjg123099）；重庆师范大学科研基金项目（No. 12XLB029；No. 10XLZ001）
作者简介：何立官，男，讲师，博士，研究方向为有限群，E-mail：guanlihe@126.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130720.1923.201304.76_012.html

$\pi(H)\cup\pi\left(G/K\right)=\pi_1$，$G/K$ 和 K/H 均为循环群且满足 $\left|G/K\right|\ \Big|\ \left|Aut\left(K/H\right)\right|$。特别地 $\left|G/K\right|<\left|K/H\right|$，$G$ 可解。

引理 4[15]　设 π' 群 H 作用在 π 群 G 上，且 G 和 H 中至少有一个可解。则对任意素数 $p\mid |G|$，G 中存在 H 不变的 p-*Sylow* 子群。

3 定理及其证明

定理 1　设 G 为有限群，M 为单 K_3-群 $L_3(3)$,$U_3(3)$,则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$，且 $o_1(G)=o_1(M)$。

证明　必要性显然，下证充分性。

1) 当 $m=L_3(3)$ 时，由文献[16]知 $|G|=2^4\cdot 3^3\cdot 13$，$o_1(G)=13$。因为 $o_1(G)=13$，所以 13 是素图 $\Gamma(G)$ 的孤立点，从而 $t(G)\geqslant 2$。由引理 1 知 G 是 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群，或者 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $\left|G/K\right|\ \Big|\ \left|Out\left(K/H\right)\right|$。

首先，如果 G 是 Frobenius 群，则由引理 2 知 $t(G)=2$ 且 $\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$，其中 K 是 Frobenius 核，H 是 Frobenius 补。于是 K 要么为$\{2,3\}$-Hall 子群，要么为 13-Sylow-子群。设 S 为 K 的一个 Sylow-子群。因为 K 幂零，所以 $|H|\mid(|S|-1)$。于是可以选择 K 的适当的 Sylow-子群 S，使得 $|H|$ 不整除 $|S|-1$，从而得出矛盾。因此 K 不能为 13-Sylow-子群，从而 K 为$\{2,3\}$-Hall 子群。考虑 K 的 2-Sylow-子群。则有 $13\mid 15$，矛盾。故 G 不是 Frobenius 群。

其次，如果 G 是 2-Frobenius 群，则由引理 3 知 $t(G)=2$，且 G 有正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 $\pi\left(K/H\right)=\pi_2$，$\pi(H)\cup\pi\left(G/K\right)=\pi_1$，$\left|G/K\right|\ \Big|\ \left|Aut\left(K/H\right)\right|$。因为 13 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，所以 $\pi_2=\{13\}$。因此 $\pi(H)\cup\pi\left(G/K\right)=\{2,3\}$ 且 $\left|K/H\right|=13$。又因为 $\left|G/K\right|\ \Big|\ \left|Aut\left(K/H\right)\right|=12$，所以由比较群 G 的阶得 $2\mid|H|$。用 G 中的一个 13 阶元 g 共轭作用在 H 上，由引理 4 知存在 H 的 2-Sylow 子群 L 在该作用下不变。考虑 $\Omega_1(Z(L))$，$\Omega_1(Z(L))$ 为初等交换 2-群，且 $|\Omega_1(Z(L))|\mid 2^4$。因为 $\Omega_1(Z(L))$ 为 L 的特征子群，所以 $\Omega_1(Z(L))$ 在 g 的共轭作用下也不变。又因为 13 不整除 $|Aut(\Omega_1(Z(L))|$，故 g 作用在 $\Omega_1(Z(L))$ 上只能是平凡作用，这说明 G 中有 26 阶元，矛盾。因此，G 不是 2-Frobenius 群。

于是 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1 群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $\left|G/K\right|\ \Big|\ \left|Out\left(K/H\right)\right|$。由 $|G|=2^4\cdot 3^3\cdot 13$ 知：K/H 只能同构于 $L_3(3)$。因此 $K=G$,$H=1$，即 $G\cong L_3(3)$。

2) 当 $M=U_3(3)$ 时，由文献[16]知 $|G|=2^5\cdot 3^3\cdot 7$，$o_1(G)=12$。因为 $o_1(G)=12$，所以 7 是素图 $\Gamma(G)$ 的孤立点，从而 $t(G)\geqslant 2$。类似情形 $M=L_3(3)$ 的讨论知：G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1 群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $\left|G/K\right|\ \Big|\ \left|Out\left(K/H\right)\right|$。由于 7 是 $\Gamma(G)$ 孤立点，故 $7\in\pi\left(K/H\right)$。由文献[16]知：K/H 同构于 $L_2(7)$,$L_2(8)$ 或 $U_3(3)$。

设 $K/H\cong L_2(7)$。因为 $|Out(L_2(7))|=2$,所以 $\left|K/H\right|\ \Big|\ 2$。比较 G 的阶知 $3\mid|H|$。设 L 为 H 的 3-Sylow 子群，则 $|L|=3^2$。因为 H 幂零，所以 L 为 H 的特征子群，从而 $L\lhd G$。用 G 的 7 阶元共轭作用在 L 上，该作用平凡，于是 G 中有 21 阶元，矛盾。设 $K/H\cong L_2(8)$。因为 $|Out(L_2(7))|=3$,所以 $\left|K/H\right|\ \Big|\ 3$。比较 G 的阶知 $2\mid|H|$。设 L 为 H 的 2-Sylow 子群，则 $|L|=2^2$，且 $L\lhd G$。用 G 的 7 阶元共轭作用在 L 上，该作用平凡，于是 G 中有 14 阶元，矛盾。于是 $K/H\cong U_3(3)$，因此 $K=G$,$H=1$,即 $G\cong U_3(3)$。　　证毕

结合文献[11]，对单 K_3-群，有定理 2。

定理 2　设 G 为有限群，M 为下列单 K_3-群：A_5,A_6,$L_2(8)$,$L_2(17)$,$L_3(3)$,$U_3(3)$。则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$，且 $o_1(G)=o_1(M)$。

定理 3 设 G 为有限群，M 为下列单 K_3-群：$L_2(7)$,$U_4(2)$。则 $G\cong M$ 当且仅当$|G|=|M|$,且 $o_i(G)=o_i(M)$,$i=1,2$。

参考文献：

[1] Shi W J. A new characterization of the sporadic simple groups[C]//Group theory-porc singapore group theory conf. Berlin-New York:Walter de Gruyter,1989:531-540.

[2] Shi W J,Bi J X,A characterization of the alternating groups [J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics,1992,16(1):81-90.

[3] Shi W J,Bi J X. A characterization of Suzuki-Reegroups [J]. Science in China(Ser A),1991,34(1):14-19.

[4] Shi W J,Bi J X. A characteristic property for each finite projective special linear group[J]. Lecture Notes in Math,1990,1456:171-180.

[5] Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups[J]. Progress in Nature Science,1994,4(3):316-326.

[6] Cao H P,Shi W J. Pure quantitative characterization of finite projective special unitary groups[J]. Science in China (Ser A),2002,45:761-772.

[7] Xu M C,Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd)[J]. Algebra Colloquium,2003,10:427-443.

[8] Vasil'ev A V,Grechkoseeva M A,Mazurov V D. Characterization of the finite simple groups by spectrum and order [J]. Algebra and Logic,2009,48(6):385-409.

[9] He L G,Chen G Y. A new characterization of $L_2(q)$ where $q\leqslant 125$[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,2011,28:127-136.

[10] 何立官,陈贵云. 关于 $L_3(q)(q\leqslant 8)$和 $U_3(q)(q\leqslant 11)$的新刻画[J]. 西南大学学报:自然科学版,2011,10:81-87.
He L G,Chen G Y. A new characterization of$L_3(q)(q\leqslant 8)$ and $U_3(q)(q\leqslant 11)$[J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition,2011,33(10):81-87.

[11] He L G,Chen G Y. A new characterization of simple K_3-groups[J]. Communications in Algebra,2012,40(10):3903-3911.

[12] 何立官. 群的阶及最高阶元素的阶与群结构[D]. 重庆:西南大学,2012.
He L G. The relationship between the structure of a Finite group and its order and largest element order[D]. Chongqing: Southwest University,2012.

[13] Williams J S. Prime graph components of Finite group [J]. J Alg,1981,69:487-513.

[14] 陈贵云. 关于 Frobenius 群和 2-Frobenius 群[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,1995,20(5):485-487.
Chen G Y. On structure of Frobenius group and 2-Frobenius group[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science Edition,1995,20(5):485-487.

[15] 徐明曜. 有限群导引(下册)[M]. 北京:科学出版社,1999.
Xu M Y. Introduction totheory of Finite groups 2[M]. Beijing:Science Press,1999.

[16] Conway J H,Curtis R T,Norton S P,et al. ATLAS of Finite groups[M]. Oxford:Clarendon Press,1985.

On Simple K_3-Groups $L_3(3)$ and $U_3(3)$

HE Li-guan

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Let G be a finite group, $o_1(G)$ denote the largest element order G. It is an interesting topic to characterize a finite simple group by using. In his paper, we characterizes simple K_3- groups $L_3(3)$ and $U_3(3)$ only by using $|G|$ and $o_1(G)$, that is to say, we prove that: Let G be a finite group M be simple K_3-group $L_3(3)$ and $U_3(3)$. Then $G\cong M$ if and only if $|G|=|M|$, and $o_1(G)=o_1(M)$.

Key words: finite group; the largest element order; simple K_3- groups; characterization

(责任编辑　游中胜)