DOI:10.11721/cqnuj20130417

度量空间上两个自映射公共不动点定理*

宋 明 亮
(江苏教育学院 数学与信息技术学院,南京 210013)

摘要:首先引入一类新的 A_φ 实函数类的概念,并给出一些例子,然后利用 A_φ 实函数类,在完备度量空间上建立了一些自映射对的公共不动点定理,如 f,g 为完备度量空间(X,d)上的两个自映射对,当 f,g 有一个连续并且存在 $F\in A_\varphi$ 使得 $d(f(x),g(y))\leqslant F(d(x,y),d(x,f(x)),d(y,g(y)))$对任意 $x,y\in X$ 成立,则 f,g 存在唯一的公共不动点。同时举例说明了本文的结论,统一并推广了文献[5-9]的 Reich 型压缩映射的不动点定理。

关键词:完备度量空间;A_φ 实函数类;公共不动点
中图分类号:O177.91　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)04-0085-05

1981 年,Fisher[1] 在度量空间上证明了一些复合映射的不动点定理。而后,Telci[2]、Aliouche 与 Fisher[3-4] 分别利用特殊的实函数类成功地推广了这些定理。2007 年,Xia D-F[5] 等受文献[1-2]的启发,利用二元或者三元实函数的性质,给出了完备度量空间上两个连续自映射存在唯一公共不动点定理,部分推广了文献[6]中压缩条件下的不动点定理。

Xia D-F[5] 中的公共不动点定理为如下形式。

设$\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$,函数 $G_1:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+$,$G_2:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}_+$,具有如下性质:

1) 如果 $w\leqslant G_1(u,v)$,则存在 $c\in(0,1)$,使得 $w\leqslant c\max\{u,v\}$;

2) 如果 $w\leqslant G_2(u,v,r)$,则存在 $c\in(0,1)$,使得 $w\leqslant c\max\{u,v,r\}$。

定理 A[5]　设(X,d)为完备度量空间,$f,g:X\to X$ 为两个连续映射,并且对任意 $x,y\in X$,有 $d(f(x),g(y))\leqslant G_1(d(x,f(x)),d(y,g(y)))$成立,或者有不等式 $d(f(x),g(y))\leqslant G_2(d(x,y),d(x,f(x)),d(y,g(y)))$成立,则 f,g 存在唯一公共不动点。

显然,令 $G_2(u,v,r)=G_1(u,v)+0\cdot r$,则 G_1 满足 G_2,故定理 A 的两个不等式就是一个。

本文将引入新的实函数类 A_φ,利用它在完备度量空间上建立两个自映射存在唯一公共不动点定理,然后指出定理 A 的部分条件是多余的,这样,不仅改进、推广了定理 A,而且统一、推广了文献[5-9]的有关结论。

1 满足实函数类 A_φ 的两个自映射的公共不动点定理

定义 1　设函数 $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$是不减的、右连续的。

1) 如果对每个 $t>0$,有 $\varphi(t)<t$,且 $\varphi(0)=0$,则称 $\varphi(t)$满足条件(Φ)。

2) 如果对每个 $t>0$,有 $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(t)<+\infty$,其中 $\varphi^n(t)$是 $\varphi(t)$的第 n 次迭代,则称 $\varphi(t)$满足条件(Φ_0)。

注 1　显然,当 $\varphi(t)$满足条件(Φ_0)时,有 $\varphi(t)<t\ (\forall t>0)$,且 $\varphi(0)=0$,即$(\Phi_0)\subset(\Phi)$,但$(\Phi)\not\subset(\Phi_0)$。事实上,取 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}$,则 $\varphi(t)\in(\Phi)$,而对每个 $t>0$,有 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{t}{1+nt}=+\infty$,即 $\varphi(t)\notin(\Phi_0)$。

定义 2　设 $\varphi\in(\Phi_0)$或(Φ),用 A_φ 表示满足关系(A-1)条件的实函数 $F:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}_+$的全体,其中(A-1)为

(A-1):对任意 $u,v\geqslant0$,如果 $u\leqslant F(v,v,u)$ 或 $u\leqslant F(v,u,v)$ 或 $u\leqslant F(u,v,v)$成立,则 $u\leqslant\varphi(v)$。

* **收稿日期**:2012-09-13　**网络出版时间**:2013-07-20 19:23
资助项目:江苏省高校"青蓝工程"基金资助;江苏教育学院科研项目(No. Jsie2011yb17)
作者简介:宋明亮,男,副教授,硕士,研究方向为泛函分析,E-mail:mlsong2004@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130720.1923.201304.85_014.html

例1　设 $\varphi\in(\Phi_0)$或(Φ),定义函数 $F_1,F_2:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}_+$如下:

$$F_1(t_1,t_2,t_3)=\varphi(\max\{t_1,t_2,t_3\}),F_2(t_1,t_2,t_3)=\max\{\varphi(t_1),\varphi(t_2),\varphi(t_3)\}$$

则 $F_1,F_2\in A_\varphi$。事实上,如果 $u\leqslant F_1(v,v,u)$ 或 $u\leqslant F_1(v,u,v)$或 $u\leqslant F_1(u,v,v)$成立,有 $u\leqslant\varphi(\max\{v,u\})<\max\{v,u\}\Rightarrow u<v$,于是有 $u\leqslant\varphi(\max\{v,u\})=\varphi(v)$,即 F_1 满足(A-1)。因此,$F_1\in A_\varphi$。类似可证 $F_2\in A_\varphi$。

例2　设 $\varphi\in(\Phi_0)$或(Φ),定义函数 $F_3,F_4:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}_+$如下:

$F_3(t_1,t_2,t_3)=\varphi(\lambda_1t_1+\lambda_2t_2+\lambda_3t_3)$,$F_4(t_1,t_2,t_3)=\varphi(\lambda_1t_1)+\varphi(\lambda_2t_2)+\varphi(\lambda_3t_3)$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geqslant0$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\leqslant1$,则 $F_3,F_4\in A_\varphi$。事实上,如果 $u\leqslant F_3(v,v,u)$ 或 $u\leqslant F_3(v,u,v)$ 或 $u\leqslant F_3(u,v,v)$成立,当 $u=0$ 时,有 $u\leqslant\varphi(v)$。如果 $u>0$ 时,有 $u\leqslant\varphi(\lambda_1v+\lambda_2v+\lambda_3u)$ 或 $u\leqslant\varphi(\lambda_1v+\lambda_2u+\lambda_3v)$ 或 $u\leqslant\varphi(\lambda_1u+\lambda_2v+\lambda_3v)$,这意味着 $u<\lambda_1v+\lambda_2v+\lambda_3u$ 或 $u<\lambda_1v+\lambda_2u+\lambda_3v$ 或 $u<\lambda_1u+\lambda_2v+\lambda_3v$,故 $u<v$,因此有 $u\leqslant\varphi(v)$,即 $F_3\in A_\varphi$。类似可证 F_3,$F_4\in A_\varphi$。

下面建立完备度量空间上满足实函数类 A_φ 的自映射的公共不动点定理。

定理1　设(X,d)为完备度量空间,$f,g:X\to X$ 为自映射,$\varphi\in(\Phi_0)$,如果满足:

(a)f,g 有一个连续;

(b)存在 $F\in A_\varphi$,对任意 $x,y\in X$,有

$$d(f(x),g(y))\leqslant F(d(x,y),d(x,f(x)),d(y,g(y)))\tag{1}$$

则 f,g 存在唯一的公共不动点。

证明　不妨设 g 连续。任取 $x_0\in X$,构造 X 中点列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$如下

$$x_n=(fg)^n(x_0)=fg(x_{n-1}),\ y_n=g\,(fg)^{n-1}(x_0),\ n=1,2,\cdots$$

显然,$y_n=g(x_{n-1}),f(y_n)=x_n,gf(y_n)=g(x_n)=y_{n+1},n=1,2,\cdots$。

对 y_{n+1}, x_{n+1}应用(1)式可得

$$d(x_{n+1},y_{n+1})=d(fg(x_n),g(x_n))\leqslant F(d(g(x_n),x_n),d(g(x_n),fg(x_n)),d(x_n,g(x_n)))$$

注意到 $F\in A_\varphi$,故有

$$d(x_{n+1},y_{n+1})\leqslant\varphi(d(g(x_n),x_n))\tag{2}$$

对 y_n, x_n 再应用(1)式可得

$$\begin{gathered}d(x_n,g(x_n))=d(f(y_n),g(x_n))=d(y_{n+1},x_n)\leqslant\\F(d(y_n,x_n),d(y_n,f(y_n)),d(x_n,g(x_n)))=\\F(d(y_n,f(y_n)),d(y_n,f(y_n)),d(x_n,g(x_n)))\end{gathered}$$

注意到 $F\in A_\varphi$,故有

$$d(x_n,g(x_n))=d(y_{n+1},x_n)\leqslant\varphi(d(y_n,f(y_n)))=\varphi(d(y_n,x_n))\tag{3}$$

利用(2),(3)式及 φ 的不减性,不难得到 $d(x_{n+1},y_{n+1})\leqslant\varphi^2(d(x_n,y_n))$。据归纳法可得,对任意 $n\in\mathbb{N}$有

$$d(x_{n+1},y_{n+1})\leqslant\varphi^{2n}(d(x_1,y_1))=\varphi^{2n}(d(x_1,g(x_0)))\tag{4}$$

同样的,再据归纳法及(3),(4)式可得,对任意 $n\in\mathbb{N}$有

$$d(y_{n+1},x_n)\leqslant\varphi^{2n-1}(d(x_1,y_1))=\varphi^{2n-1}(d(x_1,g(x_0)))\tag{5}$$

于是,据(4),(5)式及 φ 的不减性可知,当 $n\geqslant2$ 时,有

$$\begin{gathered}d(x_{n+1},x_n)\leqslant d(x_{n+1},y_{n+1})+d(y_{n+1},x_n)\leqslant\\\varphi^{2n}(d(x_1,g(x_0)))+\varphi^{2n-1}(d(x_1,g(x_0)))\leqslant\\2\varphi^{2n-1}(d(x_1,g(x_0)))\end{gathered}$$

又由于 $\varphi\in(\Phi_0)$,不难得到,对任意的 $n,m\in\mathbb{N}$有

$$\begin{gathered}d(x_n,x_{n+m})\leqslant d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+m-1},x_{n+m})\leqslant2\varphi^{2n-1}(d(x_1,g(x_0)))+\\2\varphi^{2(n+1)-1}(d(x_1,g(x_0)))+\cdots+2\varphi^{2(n+m-1)-1}(d(x_1,g(x_0)))\leqslant\\\sum_{i=2n-2}^{2(n+m-1)-1}\varphi^i(d(x_1,g(x_0)))\leqslant\sum_{i=2n-2}^{\infty}\varphi^i(d(x_1,g(x_0)))\to0\ (n\to\infty)\end{gathered}$$

即$\{x_n\}$是 X 中 Cauchy 列。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_*\in X$,而 $y_n=g(x_{n-1})$,据 g 的连续性,令 $n\to\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_*=g(x_*)$。

下面证明 $y_*=x_*$。据 $\varphi\in(\Phi_0)$，对(4)式，令 $n\to\infty$，则 $d(x_*,y_*)\leqslant 0$，即 $y_*=x_*$。故 x_* 是 g 的不动点。

再证 x_* 是 f 的不动点。据(1)式可得

$$d(f(x_*),g(x_*))=d(f(x_*),x_*)\leqslant$$
$$F(d(x_*,x_*),d(x_*,f(x_*)),d(x_*,g(x_*)))=$$
$$F(0,d(x_*,f(x_*)),0)$$

注意到 $F\in A_\varphi$，故有 $d(f(x_*),x_*)\leqslant\varphi(0)=0\Rightarrow f(x_*)=x_*$。因此，$x_*$ 是 f,g 的公共不动点。

最后证明公共不动点的唯一性。如果 x^* 是 f 的任一不动点，则据(1)式可得

$$d(x^*,x_*)=d(f(x^*),g(x_*))\leqslant F(d(x^*,x_*),d(x^*,f(x^*)),d(x_*,g(x_*)))=F(d(x^*,x_*),0,0)$$

注意到 $F\in A_\varphi$，故有 $d(x^*,x_*)\leqslant\varphi(0)=0\Rightarrow x^*=x_*$，即 x_* 是 f 的唯一不动点。同理可证 x_* 也是 g 的唯一不动点。因此，x_* 是 f,g 唯一公共不动点。

例 3　设 $X=[0,+\infty)$，取

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},x\in[0,2]\\ \dfrac{1}{x},x\in(2,+\infty)\end{cases},\ g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},x\in[0,3]\\ \dfrac{1}{x},x\in(3,+\infty)\end{cases}$$

再令 $\varphi(t)=\dfrac{t}{2}$，$F(t_1,t_2,t_3)=\varphi(\max\{t_1,t_2,t_3\})$。如果在 X 中取通常的度量，则定理中条件除(b)外都满足，下面只需验证定理的条件(b)成立。

事实上，可以分为 4 种情况讨论：

1) 当 $x\in[0,2]$，$y\in[0,3]$时，有 $d(f(x),g(y))=0$，不难验证条件(b)成立；

2) 当 $x\in[0,2]$，$y\in(3,+\infty)$时，有

$$d(f(x),g(y))=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right|<\frac{1}{2}<\frac{4}{3}<\frac{1}{2}\left|y-\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{2}d(y,g(y))\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,g(y))\};$$

3) 当 $x\in(2,+\infty)$，$y\in[0,3]$时，有

$$d(f(x),g(y))=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{2}d(x,f(x))\leqslant\frac{1}{2}\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,g(y))\};$$

4) 当 $x\in(2,+\infty)$，$y\in(3,+\infty)$时，有

$$d(f(x),g(y))=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<\frac{1}{2}<\frac{4}{3}<\frac{1}{2}\left|y-\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{2}d(y,g(y))\leqslant\frac{1}{2}\max\{d(x,y),d(x,f(x)),d(y,g(y))\}$$

因此，定理 1 的条件成立。另外，显然有唯一的 $x=\dfrac{1}{2}$，满足 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$。

注 2　在定理 1 中令 $\varphi(t)=ct\ (c\in(0,1))$，则定理 A 的函数 G_2 可以推出定理 1 的函数 F，但反之不成立。事实上，取

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & t=0\\ \vdots & \vdots\\ 1/(n+1)^2, & 1/n^2\leqslant t<1/(n-1)^2\\ \vdots & \vdots\\ 1/3^2, & 1/2^2\leqslant t<1\\ 1/2^2, & t\geqslant 1\end{cases}$$

不难证明 $\varphi(t)\in(\Phi_0)$，再取 $F(t_1,t_2,t_3)=\varphi(\max\{t_1,t_2,t_3\})$，据例 1 可知 $F\in A_\varphi$。然后，如果取 $w=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，$\dfrac{1}{n^2}=u=v=r$，显然有 $\dfrac{1}{(n+1)^2}=w\leqslant\varphi(\max\{u,v,r\})=\dfrac{1}{(n+1)^2}$，并且 $\dfrac{1}{(n+1)^2}=w<\max\{u,v,r\}=\dfrac{1}{n^2}$ 对任意的非零自然数成立，然而却不存在 $c\in(0,1)$，使得 $\dfrac{1}{(n+1)^2}\leqslant\dfrac{c}{n^2}$ 对任何非零自然数都成立，这说明定理 1 的函数类

得到扩展。另外,通过例3,可以看出定理1去掉了定理A中函数 f,g 都连续的要求,只需要其中一个连续即可。也就是说,定理1推广了定理A。

推论1　设 (X,d) 为完备度量空间,$f,g:X\to X$ 为自映射,$\varphi\in(\Phi_0)$,如果满足:

(a) f,g 有一个连续;

(b) 对任意 $x,y\in X$,有

$$d(f(x),g(y))\leqslant\varphi(d(x,y))\tag{6}$$

则 f,g 存在唯一的公共不动点。

证明　取例2中 F_3,且 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=0$,则 $F_3=\varphi(t)\in A_\varphi$,由定理1可知结论成立。　　证毕

注3　推论1中取 $\varphi(t)=ct\ (c\in(0,1))$,则是文献[5]中的定理2,且去掉了一个映射连续性要求。同时,如果在推论1中取 $f=g$,则是文献[8]中的主要结论;再取 $\varphi(t)=ct\ (c\in(0,1))$,则是经典的Banach压缩映射原理。

定理2　设 (X,d) 为完备度量空间,$f:X\to X$ 为连续映射,$a>0,b,c\geqslant0$,$a+b+c<1$,如果对任意 $x,y\in X$,有

$$d(f(x),f(y))\leqslant ad(x,y)+bd(x,f(x))+cd(y,f(y))\tag{7}$$

则 f 存在唯一不动点。

证明　令 $f=g$,$F(t_1,t_2,t_3)=at_1+bt_2+ct_3$,$\varphi(t)=kt\ (k=a+b+c\in(0,1))$,则 $F(t_1,t_2,t_3)=k\left(\frac{a}{k}t_1+\frac{b}{k}t_2+\frac{c}{k}t_3\right)$ 是例2的 F_3 的特殊情况。因此,由定理1可得定理2。　　证毕

注4　令 $b=c$,当 $a>0$ 时,由 $3a+2b\leqslant1$,可得 $a+2b<1$。所以定理2推广了文献[6]中Reich型压缩不动点定理。

定理3　设 (X,d) 为完备度量空间,$f,g:X\to X$ 为两个连续映射,$\varphi\in(\Phi)$,如果满足:

(a) 存在 $F\in A_\varphi$,对任意 $x,y\in X$,当 $x\neq y$ 或者 $f(x)\neq g(y)$ 时,有

$$d(f(x),g(y))\leqslant F(d(x,y),d(x,f(x)),d(y,g(y)))\tag{8}$$

(b) 存在 $x_0\in X$ 使 $\{(fg)^n(x_0)\}$ 有一个聚点。

则 f,g 存在唯一的公共不动点。

证明　首先,构造 X 中点列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 如下:

$$x_n=(fg)^n(x_0)=fg(x_{n-1}),\ y_n=g\,(fg)^{n-1}(x_0),\ n=1,2,\cdots$$

显然,$y_n=g(x_{n-1})$,$f(y_n)=x_n$,$gf(y_n)=g(x_n)=y_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$。不失一般性,可以假设对所有的 n,$x_n\neq y_n$,否则,不难证明定理中公共不动点是存在的。事实上,如果存在 n_0,$x_{n_0}=y_{n_0}$,于是由 $f(y_{n_0})=f(x_{n_0})=x_{n_0}$ 知 x_{n_0} 是 f 的不动点,如果 $x_{n_0}\neq g(x_{n_0})$,则据(8)式可得

$$d(x_{n_0},g(x_{n_0}))\leqslant F(d(x_{n_0},x_{n_0}),d(x_{n_0},f(x_{n_0})),d(x_{n_0},g(x_{n_0})))=F(0,0,d(x_{n_0},g(x_{n_0})))$$

由 $F\in A_\varphi$ 有 $d(x_{n_0},g(x_{n_0}))\leqslant\varphi(0)=0$,导致矛盾,即 x_{n_0} 是 g 的不动点。

于是,由条件(b)可设 x_* 为 $\{x_n\}$ 的一个聚点,则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_i}\}$ 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i}=x_*$。由 g 的连续性,令 $\lim\limits_{i\to\infty}g(x_{n_i})=\lim\limits_{i\to\infty}y_{n_i+1}=g(x_*)=y_*$,下证 y_* 为 g 的不动点。

假设 $y_*\neq x_*$,由(8)式得

$$d(f(y_*),g(x_*))=d(f(y_*),y_*)\leqslant F(d(y_*,x_*),d(y_*,f(y_*)),d(x_*,g(x_*)))=$$
$$F(d(y_*,x_*),d(y_*,f(y_*)),d(x_*,y_*))$$

注意到 $F\in A_\varphi$,故有

$$d(f(y_*),y_*)\leqslant\varphi(d(x_*,y_*))\Rightarrow d(f(y_*),y_*)<d(x_*,y_*)\tag{9}$$

另一方面,由(8)式不难证得,$\{d(x_{n+1},y_{n+1})\}$ 是递减的。事实上,由(8)式可知

$$d(x_{n+1},y_{n+1})=d(fg(x_n),g(x_n))\leqslant$$
$$F(d(g(x_n),x_n),d(g(x_n),fg(x_n)),d(x_n,g(x_n)))$$

注意到 $F\in A_\varphi$,故有 $d(x_{n+1},y_{n+1})\leqslant\varphi(d(x_n,g(x_n)))$。对 y_n,x_n 再应用(8)式可得

$$d(x_n,g(x_n))=d(f(y_n),g(x_n))=d(y_{n+1},x_n)\leqslant F(d(y_n,x_n),d(y_n,f(y_n)),d(x_n,g(x_n)))=$$

$$F(d(y_n,f(y_n)),d(y_n,f(y_n)),d(x_n,g(x_n)))$$

注意到 $F\in A_\varphi$，故有

$$d(x_n,g(x_n))=d(y_{n+1},x_n)\leqslant\varphi(d(y_n,f(y_n)))=\varphi(d(y_n,x_n))<d(y_n,x_n) \tag{10}$$

利用上述结果及 φ 的不减性，不难得到

$$d(x_{n+1},y_{n+1})\leqslant\varphi^2(d(x_n,y_n))<d(x_n,y_n) \tag{11}$$

所以 $\{d(x_{n+1},y_{n+1})\}$ 是非负递减序列。故可设 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_{n+1},y_{n+1})=\xi\geqslant0$ 。注意到(10)式，由 d 的连续性可得

$$\lim_{i\to\infty}d(y_{n_i+1},x_{n_i})=d(y_*,x_*)\leqslant\lim_{i\to\infty}d(y_{n_i},x_{n_i})=\xi \tag{12}$$

注意到 $\{d(x_{n_i+1},y_{n_i+1})\}$ 是 $\{d(x_{n+1},y_{n+1})\}$ 的子列及 f,d 的连续性，则有

$$d(f(y_*),y_*)=\lim_{i\to\infty}d(f(y_{n_i+1}),y_{n_i+1})=\lim_{i\to\infty}d(x_{n_i+1},y_{n_i+1})=\xi \tag{13}$$

由(12)和(13)式可知 $d(y_*,x_*)\leqslant d(f(y_*),y_*)$，这与(9)式矛盾。因此，$x_*=y_*$，且 y_* 为 g 的不动点。

y_* 也为 f 的不动点及 f,g 的公共不动点唯一性的证明，可以类似与定理 1 的证明，在此省略。

注 5 定理 3 的条件与文献[5]中的推论 2 比较，函数类条件加强了，但是去掉了空间的紧性，因此，是一个新的结论。

参考文献：

[1] Fisher B. Fixed point on two metric spaces[J]. Glasnik Matcmatcki, 1981, 16(36): 333-337.

[2] Telci M. Fixed points on two complete and compact metric spaces[J]. Appl Math Mech, 2001, 22(5): 564-568.

[3] Aliouche A, Fisher B. Fixed point theorems for mappings satisfying an implicit relation on two complete and compact metric spaces[J]. Appl Math Mech, 2006, 27(9): 1065-1070.

[4] Xu X L, Fang J X. A note on fixed point theorem of the complex mappings on compact metric spaces[J]. Journal of Nanjing Normal University: Natural Science, 2001, 3(2): 6-9.

[5] 夏大峰，符美芬，江波. 具有对称的集合和完备度量空间上两个自映射的公共不动点[J]. 数学进展，2007，36(4)：415-420.

Xia D F, Fu M F, Jiang B. Two self-mappings common fixed points for symmetric sets and complete metric space [J]. Advances in Mathematics, 2007, 36(4): 415-420.

[6] Saliga L M. Fixed points theorems for non-selfmaps in d-complete topological spaces[J]. Int J Math Math Sci, 1996, 19(1): 103-110.

[7] Reich S. Some remarks concerning contraction mappings [J]. Candd Bull, 1971, 14: 121-124.

[8] Bianchini R M, Grandolfi M. Transformazioni di tipo contracttivo generalizzato in uno spazio metrico[J]. Atti Accad Naz Lincei, VII Ser, Rend, CI Sci Fis Mat Natur, 1968, 45: 212-216.

[9] Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales[J]. Fund Math, 1922, 3: 133-181.

Common Fixed Point Theorem of Two Self-mappings on Metric Spaces

SONG Ming-liang

(Mathematics and Information Technology School, Jiangsu Institute of Education, Nanjing 210013, China)

Abstract: In this paper, first, the concept of a new class of A_φ-type real functions, and some examples are given. Next, by using A_φ-type real functions, some common fixed point theorems for two self-mappings on complete metric spaces are established. For example, assume (X, d) is a complete metric space, f and g are two self-mappings on X, f or g is continuous and there exists $F\in A_\varphi$ such that $d(f(x), g(y))\leqslant F(d(x, y), d(x, f(x)), d(y, g(y)))$ for all $x, y\in X$, then f and g have a unique common fixed point in X. Also, an example is given, which show that our results unify and generalize theorems.

Key words: complete metric space; A_φ-type real functions; common fixed point

(责任编辑 游中胜)