2013 年 9 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Sep. 2013
第 30 卷 第 5 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 30　No. 5

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130504

显拟凹函数的一个新性质*

颜 丽 佳
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:显拟凹函数在非线性规划问题中起着重要的作用。在已有文献基础上给出了显拟凹函数的一个新性质:设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集,$g:X\to\mathbf{R}$ 是显拟凹函数,如果对 $\forall y_1,y_2,\cdots,y_n\in X$,满足 $g(y_j)>\min\limits_{i\neq j}g(y_i)$,那么对 $\forall\lambda_i>0(i=1,\cdots,n)$,$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,有 $g\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right)>\min\limits_{i=1,\cdots,n}g(y_i)$。本文的结果推广了已有的结论。

关键词:拟凹函数;半严格拟凹函数;显拟凹函数
中图分类号:O221.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)05-0018-03

凸(凹)函数及广义凸(凹)函数在数理经济、工程和最优化理论等方面发挥着举足轻重的作用,因此对凸(凹)性及广义凸(凹)性的研究是数学规划中最重要的内容之一。1979 年,Bazaraa 和 Shetty 在文献[1]中介绍了一类重要的广义凸(凹)函数——拟凸(凹)函数,并在此基础上定义了半严格拟凸(凹)函数和严格拟凸(凹)函数,讨论了它们之间的关系。随后,不少学者对拟凸(凹)函数作了更深入的研究[2-7]。

显拟凹函数作为一类特殊的拟凹函数,是 1981 年由 Schaible 和 Ziemba 在文献[8]中提出来的。接着,文献[9-10]分别给出了刻划显拟凹函数特征的一些很好的性质;文献[11]考虑了目标函数为显拟凹函数时,多目标优化问题中弱有效解的一个特征;文献[12]提出了显拟凹函数的一个性质,并利用这个性质简化了文献[11]中关于弱有效解特征的证明过程。本文在文献[12]的基础上,给出了显拟凹函数的一个新性质,该性质是文献[12]中提出的显拟凹函数性质的推广。

1 基本概念

定义 1[1]　设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集,g 是定义在 X 上的实值函数,如果对 $\forall x,y\in X$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$g(\lambda y+(1-\lambda)x)\geqslant\min\{g(x),g(y)\}$$

则称函数 g 是 X 上的拟凹函数。

定义 2[1]　设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集,g 是定义在 X 上的实值函数,如果对 $\forall x,y\in X$,$g(x)\neq g(y)$,有

$$g(\lambda y+(1-\lambda)x)>\min\{g(x),g(y)\},\ \forall\lambda\in(0,1)$$

则称函数 g 是 X 上的半严格拟凹函数。

定义 3[8]　若 g 是 X 上的拟凹函数和半严格拟凹函数,则称 g 是 X 上的显拟凹函数。

2 主要结果

文献[12]给出了显拟凹函数的如下性质:设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集,$g:X\to\mathbf{R}$ 是显拟凹函数,如果对 $\forall y_1,y_2,\cdots,y_n\in X$,满足 $g(y_j)>\min\limits_{i\neq j}g(y_i)$,那么 $g\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)>\min\limits_{i=1,\cdots,n}g(y_i)$。

在上述性质中,$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ 是 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个特殊凸组合,下面证明对于一般的凸组合该结论仍成立。

---

* **收稿日期**:2012-06-26　**修回日期**:2013-04-09　**网络出版时间**:2013-09-17　17:38
资助项目:国家自然科学基金青年项目(No.11201511)
作者简介:颜丽佳,女,讲师,硕士,研究方向为最优化理论与应用,E-mail:qzj525@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.18_026.html

定理　设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是凸集,$g:X\rightarrow\mathbf{R}$ 是显拟凹函数,如果对 $\forall y_1,y_2,\cdots,y_n\in X$,满足 $g(y_j)>\min\limits_{i\neq j}g(y_i)$,那么对 $\forall\lambda_i>0(i=1,\cdots,n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,有

$$g\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right)>\min_{i=1,\cdots,n}g(y_i) \tag{1}$$

证明　令 $z_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i$, $z_{n-1}=\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_j}y_i$,1) 如果 $y_j=z_{n-1}$,则

$$z_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i=\sum_{i\neq j}\lambda_i y_i+\lambda_j y_j=\sum_{i\neq j}\lambda_i y_i+\lambda_j\sum_{i\neq j}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_j}y_i=\left(1+\frac{\lambda_j}{1-\lambda_j}\right)\sum_{i\neq j}\lambda_i y_i=\sum_{i\neq j}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_j}y_i=z_{n-1}=y_j$$

于是 $g(z_n)=g(y_j)>\sum\limits_{i\neq j}\min g(y_i)=\sum\limits_{i=1,\cdots,n}\min g(y_i)$,即(1)式成立。

2) 如果 $y_j\neq z_{n-1}$,则

$$z_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i=\sum_{i\neq j}\lambda_i y_i+\lambda_j y_j=(1-\lambda_j)\sum_{i\neq j}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_j}y_i+\lambda_j y_j=(1-\lambda_j)z_{n-1}+\lambda_j y_j$$

若 $g(y_j)>g(z_{n-1})$,由于 g 是 X 上显拟凹函数,故 g 既是 X 上的拟凹函数,也是半严格拟凹函数。

由 g 是 X 上半严格拟凹函数可知

$$g(z_n)>\min\{g(z_{n-1}),g(y_j)\}=g(z_{n-1}) \tag{2}$$

再由 g 是 X 上拟凹函数及条件 $g(y_j)>\min\limits_{i\neq j}g(y_i)$可知

$$g(z_{n-1})=g\left(\sum_{i\neq j}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_j}y_i\right)\geqslant\min_{i\neq j}g(y_i)=\min_{i=1,\cdots,n}g(y_i) \tag{3}$$

因此由(2)、(3)式可推出 $g(z_n)>\min\limits_{i=1,\cdots,n}g(y_i)$,即(1)式成立。

若 $g(y_j)\leqslant g(z_{n-1})$,由 $z_n=(1-\lambda_j)z_{n-1}+\lambda_j y_j$ 及 g 是 X 上拟凹函数可知 $g(z_n)\geqslant\min\{g(z_{n-1}),\ g(y_j)\}=g(y_j)$,再由 $g(y_j)>\min\limits_{i\neq j}g(y_i)$,可得 $g(z_n)>\min\limits_{i=1,\cdots,n}g(y_i)$,即(1)式成立。　证毕

注　定理中所刻划的显拟凹函数的性质对拟凹函数和半严格拟凹函数不一定成立。

例 1　函数 $g(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 0\\0,0<x<2\\-x+2,x\geqslant 2\end{cases}$ 显然是拟凹函数,由于它不是半严格拟凹函数,故不是显拟凹函数。取 $x_1=-\dfrac{1}{2},x_2=-\dfrac{1}{4},x_3=1,\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{1}{4},\lambda_3=\dfrac{1}{2}$,有 $g(x_1)>\min\{g(x_2),g(x_3)\}$,但是

$$g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)=g\left(\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\times 1\right)=g\left(\frac{5}{16}\right)=0=\min\{g(x_1),g(x_2),g(x_3)\}$$

故定理中的结论不成立。

例 2　函数 $g(x)=\begin{cases}1,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$显然是半严格拟凹函数,由于它不是拟凹函数,故不是显拟凹函数。取 $x_1=-\dfrac{1}{2},x_2=0,x_3=\dfrac{1}{2},\lambda_1=\lambda_3=\dfrac{1}{4},\lambda_0=\dfrac{1}{2}$,有 $g(x_1)>\min\{g(x_2),g(x_3)\}$,但是

$$g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)=g\left(\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)=g(0)=0=\min\{g(x_1),g(x_2),g(x_3)\}$$

故定理中的结论也不成立。

参考文献:

[1] Bazaraa M S,Sherali H D,Shetty C M. Nonlinear programming theory and algorithms[M]. New York: John Wiley and Sons Inc,1979.

[2] 王长钰,薛国良. 拟凸函数局部极小的整体性质[J]. 应用数学与计算数学学报,1991,5(1):28-32.
Wang C Y,Xue G L. Global properties of local minima of quasiconvex functions[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation,1991,5(1):28-32.

[3] 杨新民. 拟凸函数的某些性质[J]. 工程数学学报,1993,10(1):51-56.
Yang X M. Some properties of quasiconvex functions[J]. Journal of Engineering Mathematics,1993,10(1):51-56.

[4] 杜祖缔,张运杰. 函数拟凹性的研究[J]. 大连海事大学学报:自然科学版,1996,22(1):99-100.
Du Z D,Zhang Y J. On properties of quasiconcave functions [J]. Journal of Dalian Maritime University: Natural Science,1996,22(1):99-100.

[5] 杨新民. 拟凸函数判别准则的一个注记[J]. 运筹学学报,2001,5(2):55-56.
Yang X M. A note on criteria of quasiconvex functions[J]. OR Transactions,2001,5(2):55-56.

[6] 赵克全,陈哲,郭辉. 预不变拟凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2008,25(4):1-2.
Zhao K Q,Chen Z,Guo H. A sufficient condition of prequasi-invex function[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science,2008,25(4):1-2.

[7] 黄金莹,赵宇,方秀男. *F-G* 广义凸函数与 *F* 拟凸函数[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2011,28(4):1-5.
Huang J Y,Zhao Y,Fang X N. The *F-G* generalized convex and *F* quasi convex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science,2011,28(4):1-5.

[8] Schaible S,Ziemba W T. Generalized concavity in optimization and economics[M]. New York:Academic Press,1981.

[9] Danao K A. Some properties of explicitly quasiconcave functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1992,74(3):457-468.

[10] 薛声家. 显拟凹函数的若干新性质[J]. 运筹学学报,1997,1(1):65-71.
Xue S J. Some new properties of explicitly quasiconcave functions[J]. OR Transactions,1997,1(1):65-71.

[11] Rutz-canales P,Rufian-lizana A. A characterization of weakly efficient points[J]. Mathematical Programming,1995,68(1/2/3):205-212.

[12] Luc D T,Schaible S. Efficiency and generalized concavity [J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1997,94(1):147-153.

Operations Research and Cybernetics

A New Property of Explicitly Quasiconcave Functions

YAN Li-jia

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Explicitly quasiconcave functions play a dominant role in nonlinear programming problem. Based on the earlier works, the following result has been derived in this paper: Let $g: X\to \mathbf{R}$ be explicitly quasiconcave function, where $X\subseteq \mathbf{R}^n$ is convex, if for any $y_1, y_2, \cdots, y_n\in X$, $g(y_j) > \min_{i\neq j} g(y_i)$, then for any $\lambda_i > 0$ ($i=1,\cdots,n$), $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, we have $g\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right) > \min_{i=1,\cdots,n} g(y_i)$. This result generalizes the known result.

Key words: quasiconcave; semistrictly quasiconcave; explicitly quasiconcave

(责任编辑 黄 颖)

外刊摘要转载

Biosolids Management Strategies: an Evaluation of Energy Production as an Alternative to Land Application

Maureen EGAN

(University College, University of Denver, Denver, USA)

Abstract: Currently, more than half of the biosolids produced within the USA are land applied. Land application of biosolids introduces organic contaminants into the environment. There are potential ecological and human health risks associated with land application of biosolids. Biosolids may be used as a renewable energy source. Nutrients may be recovered from biosolids used for energy generation for use as fertilizer. The by-products of biosolids energy generation may be used beneficially in construction materials. It is recommended that energy generation replace land application as the leading biosolids management strategy.

Key words: biosolids; organic contaminants; land application; energy production; environmental fate and transport

(转载于 Environmental Science and Pollution Research,2013 年 20 卷 7 期)