

基于 GM(1,1)模型的城镇居民人均可支配收入预测*

——以重庆市城镇居民家庭为例

游中胜¹, 张 杓²

(1. 重庆师范大学 计算机与信息科学学院, 重庆 401331; 2. 西南大学 期刊社, 重庆 北碚 400715)

摘要:城镇居民的人均可支配收入情况直接反映了城镇居民的生活水平高低,而影响人均可支配收入的因素较多,用回归模型难以预测其走势。本文建立了人均可支配收入的 GM(1,1)预测模型 $\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}$,并对该模型的可用性进行了验证;利用该模型对重庆市 2013—2015 年的城镇居民家庭人均可支配收入进行了预测,分别为 2.741 6、3.149 9 和 3.619 万元。结果表明,该模型能够较好地预测城镇居民家庭人均可支配收入情况。

关键词:序列;GM(1,1);区间;预测

中图分类号:TP301.6;N941.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2013)05-0059-03

基于城镇居民收入抽样调查的居民可支配收入统计数据是中国国民经济核算体系中重要的基础数据之一,它不仅是衡量国家和各地区居民生活水平的基本指标,而且在宏观经济学理论及实证研究中有着非常重要的地位,对国家宏观经济政策的制定也有着重要的作用。因此对城镇居民人均家庭可支配收入进行预测有实际意义。

由于居民可支配收入受该地区经济发展状况等因素的影响,具有一定的不确定性,用时间序列法预测城镇居民家庭人均可支配收入缺乏科学性。1982年,著名学者邓聚龙教授提出灰色系统理论,目前该理论已经在经济、科教、工农业、气象、军事等众多领域得到了广泛应用,尤其是灰色预测理论^[1-9]。在建模时,不需要大量的时间序列数据就能够取得较好的预测效果,达到较高的精度。GM(1,1)模型是灰色预测的核心和基础,本文建立了基于 GM(1,1)的城镇居民人均可支配收入模型,以 2007—2012 年重庆市城镇居民人均可支配收入为建模数据对模型进行了验证,并对重庆市 2013—2015 年城镇居民家庭人均可支配收入进行了预测和分析。

1 模型建立

设 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列, $x^{(0)}(1)$ 表示 2007 年的城镇居民家庭人均可支配收入, $x^{(0)}(2)$ 表示 2008 年的城镇居民家庭人均可支配收入, $\dots, x^{(0)}(n)$ 表示第 2006 年 + n 年的城镇居民家庭人均可支配收入。为了降低系统的不确定性,用其 AGO 生成序列一次累加和,表示为 $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ 。其中, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$ 。 $X^{(1)}$ 的一阶微分方程为 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 。解此方程,并表示为离散型

$$x^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a} \tag{1}$$

其中, a, b 为待定系数,可用 $\hat{a} = [a, b]^T$ 表示,用最小二乘法求解 $\hat{a} = [a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 有

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n) + x^{(1)}(n)) & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{pmatrix} \tag{2}$$

* 收稿日期:2013-06-02 网络出版时间:2013-09-17 17:38

资助项目:重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ130602)

作者简介:游中胜,男,副教授,硕士,研究方向为灰色系统建模等,E-mail:yzs@cqnu.edu.cn

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.59_008.html

基于 GM(1,1)模型的城镇人均可支配收入模型如下:

$$\hat{x}^{(0)}(i) = \begin{cases} x^{(1)}(i) - x^{(1)}(i-1), i \geq 2 \\ x^{(0)}(1), i = 1 \end{cases} \quad (3)$$

2 模型验证

表 1 是 2007—2012 年重庆市城镇居民家庭人均可支配收入情况,由表 1 可知,城镇居民家庭人均可支配收入呈逐年增加趋势。人均可支配收入主要受时间这一变量影响,故可采用单变量的 GM(1,1)模型来预测 2013—2015 年的人均可支配收入。

从表 1 可得, $X^{(0)} = (1.259\ 1, 1.436\ 8, 1.574\ 9, 1.753\ 2, 2.025\ 0, 2.456\ 5)$, 步骤如下:

1) $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列为 $X^{(1)} = (1.259\ 1, 2.695\ 9, 4.270\ 8, 6.024\ 0, 8.049\ 0, 10.505\ 5)$ 。

2) 对 $X^{(0)}$ 作准光滑性检验。由 $\varphi(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$ 得 $\varphi(3) \approx 0.58, \varphi(4) \approx 0.41 < 0.5, \varphi(5) \approx 0.34 < 0.5, \varphi(6) \approx 0.31 < 0.5$ 。当 $k > 3$ 时,准光滑条件满足。

表 1 2007—2012 年重庆市城镇居民家庭人均可支配收入

年份	城镇居民家庭人均可支配收入/万元
2007	1.259 1
2008	1.436 8
2009	1.574 9
2010	1.753 2
2011	2.025 0
2012	2.456 5

注:数据来源:重庆统计年鉴 2007—2012 年

3) 检验 $X^{(1)}$ 是否具有准指数规律。由 $\delta^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$ 得 $\delta^{(1)}(3) \approx 1.58, \delta^{(1)}(4) \approx 1.41, \delta^{(1)}(5) \approx 1.34, \delta^{(1)}(6) \approx 1.31$ 。当 $k > 3$ 时, $\delta^{(1)}(k) \in [1, 1.5], \delta = 0.5$, 满足准指数规律,故可对 $X^{(1)}$ 建立 GM(1,1)模型。模型得以验证。

4) 对 $X^{(1)}$ 作紧邻均值生成。令 $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$ 得 $z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), z^{(1)}(4), z^{(1)}(5), z^{(1)}(6)) = (1.977\ 5, 3.483\ 4, 5.147\ 4, 7.036\ 5, 9.277\ 3)$ 。故

$$Y = \begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ x^{(0)}(4) \\ x^{(0)}(5) \\ x^{(0)}(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.436\ 8 \\ 1.574\ 9 \\ 1.753\ 2 \\ 2.025\ 0 \\ 2.456\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ -z^{(1)}(4) & 1 \\ -z^{(1)}(5) & 1 \\ -z^{(1)}(6) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.977\ 5 & 1 \\ -3.483\ 4 & 1 \\ -5.147\ 4 & 1 \\ -7.036\ 5 & 1 \\ -9.277\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5) 对参数列 $\hat{a} = [a, b]^T$ 进行最小二乘估计得发展系数和灰色作用量的值

$$\hat{a} = [a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y, a = \frac{\sum_{k=2}^6 z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^6 x^{(0)}(k) - (6-1) \sum_{k=2}^6 z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(6-1) \left[\sum_{k=2}^6 z^{(1)}(k) \right]^2 - \left[\sum_{k=2}^6 z^{(1)}(k) \right]^2} = -0.138\ 8$$

$$b = \frac{\sum_{k=2}^6 x^{(0)}(k) \sum_{k=2}^6 [z^{(1)}(k)]^2 - \sum_{k=2}^6 z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^6 z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(6-1) \left[\sum_{k=2}^6 z^{(1)}(k) \right]^2 - \left[\sum_{k=2}^6 z^{(1)}(k) \right]^2} = 1.101\ 8$$

6) 确定模型 $\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.138\ 8x^{(1)} = 1.101\ 8$, 及时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a} = 9.197\ 1 e^{0.138\ 8(k-1)} - 7.938 \quad (4)$$

7) 求 $X^{(1)}$ 的模拟值。 $\hat{X}^{(1)} = (\hat{x}^{(1)}(1), \hat{x}^{(1)}(2), \dots, \hat{x}^{(1)}(6)) = (1.259\ 1, 2.628\ 5, 4.201\ 8, 6.009\ 3, 8.086, 10.471\ 9)$

8) 计算 $X^{(0)}$ 的累减还原式(模拟值)

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) \quad (5)$$

得 $\hat{X}^{(0)} = (\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \dots, \hat{x}^{(0)}(6)) = (1.259\ 1, 1.369\ 4, 1.573\ 4, 1.807\ 7, 2.076\ 9, 2.386\ 2)$ 。

9) 计算残差=0.015 1,平均相对误差=2.695 4%。

10) 根据(4)、(5)式,预测 2013—2015 年的重庆城镇居民家庭人均可支配收入分别为 2.741 6、3.149 9、3.619 万元。

3 结束语

对重庆市城镇居民人均可支配收入进行预测,对了解城镇居民的生活水平,帮助重庆政府根据重庆的实际情况,制定切实可行的发展政策等方面都有重要作用。本文利用重庆统计年鉴 2007—2012 年提供的城镇居民人均可支配收入数据,并利用人均可支配收入受时间变量影响的特点,采用 GM(1,1)模型对重庆市 2013—2015 年的城镇居民人均可支配收入进行了预测,分别为 2.741 6、3.149 9、3.619 万元。当然,该预测结果仅为理论值,实际值与国家宏观经济政策和重庆市政府所采取的各项保增长措施有关。如果措施得当,城镇居民家庭人均可支配收入就可能高于预测值,反之,将低于预测值。

参考文献:

- [1] 曾波. 居民消费价格指数的 GM(1,1)模型预测[J]. 统计与决策, 2009, 29(13): 7-8.
Zeng B. The consumer price index prediction based on GM (1,1) model[J]. Statistics and Decision, 2009, 29(13): 7-8.
- [2] 曾波. 基于改进灰色预测模型的电力需求预测研究 [J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2012, 29(6): 99-104.
Zeng B. Research on electricity demand forecasting based on improved grey prediction model[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natual Science, 2012, 29(6): 99-104.
- [3] 熊和金, 徐华中. 灰色控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
Xiong H J, Xu H Z. Grey control[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2007.
- [4] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 3 版. 北京: 科学出版社, 2004.
Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey systems: theory and application[M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2004.
- [5] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
Xiao X P, Song Z M, Li F. Grey technology base and its application[M]. Beijing: Science Press, 2005.
- [6] Li G D, Dasatake N. A GM(1,1)-Markov chain combined model with an application to predict the number of Chinese international airlines[J]. Technological Forecasting and Social Change, 2007, 74(8): 1465-1481.
- [7] Li G D, Dasatake N, Masatake N. A grey-based decision-making approach to the supplier selection problem[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2007, 46(3): 573-581.
- [8] Deng J L. Proving GM(1,1) modeling via four data (at least)[J]. The Journal of Grey System, 2004, 16(1): 1-4.
- [9] Zhang Y G, Xu Y, Wang Z P. GM(1,1) grey prediction of Lorenz chaos system[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 42(2): 1003-1009.

Per Capita Disposable Income Prediction of Urban Residents Based on GM (1, 1) Model: Take Urban Residents Families in Chongqing as Examples

YOU Zhong-sheng¹, ZHANG Xun²

(1. College of Computer and Information Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. Periodical Press, Southwest University, Beibei Chongqing 400715, China)

Abstract: Urban residents' per capita disposable income level directly reflects the living standards of urban residents, and there are a lot of influencing factors of per capita disposable income, for which the regression model is difficult to predict its trend. This paper creates a GM (1, 1) prediction model of the per capita disposable income, and the availability of the model is verified. And then the model is applied in Chongqing to forecast the per capita disposable income of urban households from 2013 to 2015, the forecast results are 27 416, 31 499 and 36 190 yuan. The results show that the model can well predict the per capita disposable income of urban households.

Key words: serial; GM (1, 1); interval; forecast

(责任编辑 黄 颖)