2013 年 9 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Sep. 2013
第 30 卷 第 5 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 30 No. 5

DOI:10.11721/cqnuj20130513

关于凸集平均曲率积分的注记*

曾春娜[1]，姜德烁[2]

(1. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；2. 商丘师范学院 数学与信息学院，河南 商丘 476000)

摘要:本文对欧氏空间 R^n 中凸集的平均曲率积分进行了研究。利用初等对称函数的性质和平均曲率积分的定义,得到了几个关于平均曲率积分的不等式,即文中的(1)、(2)和(6)式;并在此基础上利用经典的 Cauchy 公式,得到了 2 个新的关于凸集均质积分的不等式,即文中的(9)、(10)和(11)式。

关键词:凸集;平均曲率积分;均质积分;初等对称函数

中图分类号:O186.5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)05-0062-04

1 引言及预备知识

平均曲率积分是积分几何的核心概念之一。它与凸体的均质积分有着密切联系(即 Cauchy 公式),是研究凸体理论的重要工具。此外,平均曲率积分还联系着一些其他重要的几何量,如凸体的体积、表面积、Euler-Poincare 示性数、球面象的映射度等等。在立体度测学中,用已知形状的随机图形(如平面)去截割凸颗粒,来获得这些颗粒的截口在平面上分布的某些信息,在这一过程中平均曲率积分则是需要考察的一个重要几何不变量。因此,对平均曲率积分的研究将极大丰富积分几何理论及其运用。

在本文中,设 Σ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中 C^2 类超曲面,$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 表示 Σ 的 $n-1$ 个主曲率,记

$$R_+^{n-1}=\{k=(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1})\mid k_i>0,i=1,2,\cdots,n-1\}$$

则称

$$E_r(k)=E_r(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1})=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots i_r\leqslant n-1}\prod_{j=1}^{r}k_{i_j},r=1,2,\cdots,n-1$$

为关于主曲率 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 的 r 阶初等对称函数。另外,补充规定 $E_0(k)=1$。

超曲面 Σ 的第 r 阶平均曲率积分可以用初等对称函数来表示[1-2]

$$M_r(\Sigma)=\binom{n-1}{r}^{-1}\int_\Sigma E_r(k)\mathrm{d}\sigma,r=0,1,\cdots,n-1$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 表示 Σ 的面积元。为补充其完整性,规定 $M_0(\Sigma)=F$(即 Σ 的面积)。若 Σ 为紧的凸超曲面,则关于平均曲率积分有经典的 Minkowski 不等式

$$M_i^2(\Sigma)\geqslant M_{i-1}(\Sigma)M_{i+1}(\Sigma)$$

等号成立当且仅当 Σ 为标准球面。此外,Santalo 在[3]中研究了平坦凸体的平均曲率积分,并把该几何量用此凸体的平均曲率积分来表示;在此基础上,Li 和 Zhou[5]研究了几何体 $(K_\rho)'_{n-r}$,其中,(K_ρ) 为凸体 K 的外平行体,$(K_\rho)'_{n-r}$ 为外平行体 K_ρ 在 $n-1$ 维平面的正交投影,他们得到了 $(K_\rho)'_{n-r}$(作为 $n-r$ 维平面中的凸体)的平均曲率积分的平均值;在文[8]中,Zhao 得到了 R^n 中凸体和它往任意 $n-r$ 维平面投影体之间的均值积分关系;他们的结果推广了 Kubota 的结果;Zhou 和 Jiang[3]研究了 R^n 中外平行体的平坦凸体,并且得到了它的平均曲率积分的表达式;Jiang 和 Zeng 以前人的工作为基础,继续研究了外平行体的平坦凸体的平均曲率积分,他们得到

* 收稿日期:2012-10-17　　网络出版时间:2013-09-17 17:38
资助项目:重庆市教委项目(No. KJ130614);重庆师范大学基金项目资助(No. 12XLB026)
作者简介:曾春娜,女,讲师,博士,研究方向为积分几何、凸几何分析,E-mail: zengchn@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.62_009.html

的详细结果详见文[4]。

设 K^n 表示 $\mathbf{R}^n$ 中所有凸集。设 $K\in K^n$，O 为定点。$L_{n-r[o]}$ 表示过 O 点的任一 $(n-r)$ 维平面。过 K 的每点做垂直于 $L_{n-r[o]}$ 的 r 维平面，这些 r 维平面与 $L_{n-r[o]}$ 的交点构成凸集 K'_{n-r}。称 K'_{n-r} 为 K 到平面 $L_{n-r[o]}$ 上的正交投影，K'_{n-r} 的体积记为 $V(K'_{n-r})$。因过定点的所有 $(n-r)$ 维平面 $L_{n-r[o]}$ 构成 Grassmann 流形 $G_{n-r,r}$，所以很自然地引入如下的积分

$$I_r(K)=\int_{G_{n-r,r}}V(K'_{n-r})\mathrm{d}L_{n-r[O]}=\int_{G_{r,n-r}}V(K'_{n-r})\mathrm{d}L_{r[O]}$$

取 $I_r(K)$ 在 Grassmann 流形上的平均值

$$E(V(K'_{n-r}))=\frac{I_r(K)}{m(G_{n-r,r})}$$

由 Minkowski 首先引入的均质积分定义如下[1-2,6]

$$W_r(K)=\frac{(n-r)O_{n-1}}{nO_{n-r-1}}E(V(K'_{n-r}))=\frac{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}I_r(K)$$

特别地，$W_0(K)=I_0(K)=V(K)$，$W_n(K)=O_{n-1}/n$。均质积分描述了一个凸体的投影体积的平均值且是凸体理论中强有力的工具。Cauchy、Kubota、Steiner 等等得到了许多关于均质积分的公式(参见[2，6，9，10，11])。

若凸集 K 的边界 ∂K 为 C^2 类超凸曲面，则存在平均曲率积分和均质积分的关系式，即 Cauchy 公式[1-2,12-14]

$$M_j(\partial K)=nW_{j+1}(K),j=0,1,\cdots,n-1$$

值得注意的是：W_j 对任何凸集 K 都有定义，而 M_j 则要求 $\partial K\in C^2$。

本文在前人的基础上继续研究各阶平均曲率积分之间的关系。主要利用初等对称函数的性质和平均曲率积分的定义，得到了两个关于平均曲率积分的不等式。另外还建立了关于凸体均质积分的不等式。这种从定义出发研究平均曲率积分在积分几何中是最本质的也是较困难的。

2 主要结果及证明

定理 1　设 $K\in K^n$，$\partial K\in C^2$，若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\leqslant 1$ $\left(\text{即 } H_{n-1}\leqslant\dfrac{1}{n-1}\right)$则

$$\binom{n-1}{q}M_q(\partial K)\leqslant\binom{n-1}{q-1}M_{q-1}(\partial K)\tag{1}$$

$$\binom{n-1}{r}M_r(\partial K)\geqslant\binom{n-1}{r+p}M_{r+p}(\partial K)\tag{2}$$

其中，$1\leqslant q\leqslant n$，$0\leqslant r+p\leqslant n-1$，$q,r,p\in N_+$。

证明　(1)式等价于

$$\int_{\partial K}E_q(k)\mathrm{d}\sigma\leqslant\int_{\partial K}E_{q-1}(k)\mathrm{d}\sigma\tag{3}$$

当不等式

$$E_q(k_1,k_2,\cdots,k_n)=E_q(k)\leqslant E_{q-1}(k)=E_{q-1}(k_1,k_2,\cdots,k_n)\tag{4}$$

成立时，(3)式显然成立。

下面证明(4)式，对 n 施行数学归纳法。

当 $n=1$ 时，(4)式变形为 $E_1(k_1)\leqslant E_0(k_1)$，由 $E_1(k_1)=k_1\leqslant 1=E_0(k_1)$ 知该不等式成立。

假设 $n=m$ 时(4)式成立，即

$$E_q(k_1,\cdots,k_m)\leqslant E_{q-1}(k_1,\cdots,k_m),(k_1+k_2+\cdots+k_m\leqslant 1,k_i>0)$$

下面证明：当 $n=m+1(k_1+k_2+\cdots+k_{m+1}\leqslant 1,k_i>0)$ 时(4)式成立。

若 $q=1$ 时，则 $E_1(k_1,k_2,\cdots,k_{m+1})=k_1+k_2+\cdots+k_{m+1}\leqslant 1=E_0(k_1,k_2,\cdots,k_{m+1})$

若 $2\leqslant q\leqslant m+1$ 时，根据归纳假设得

$$E_{q-1}(k_2,k_3,\cdots,k_{m+1})\leqslant E_{q-2}(k_2,k_3,\cdots,k_{m+1})$$

$$E_q(k_2,k_3,\cdots,k_{m+1})\leqslant E_{q-1}(k_2,k_3,\cdots,k_{m+1})$$

于是

$$\begin{aligned}E_q(k_1,k_2,\cdots,k_{m+1})&=k_1E_{q-1}(k_2,k_3,\cdots,k_{m+1})+E_q(k_2,k_3,\cdots,k_{m+1})\\&\leqslant k_1E_{q-2}(k_2,k_3,\cdots,k_{m+1})+E_{q-1}(k_2,k_3,\cdots,k_{m+1})\\&=E_{q-1}(k_1,k_2,\cdots,k_{m+1})\end{aligned}$$

所以当 $n=m+1$ 时(4)式成立

因为 $1\leqslant r+p\leqslant n,r\geqslant 0,r\in N_+$,运用不等式(4)得[9]

$$E_{r+p}(k_1,k_2,\cdots,k_n)\leqslant E_{r+p-1}(k_1,k_2,\cdots,k_n)\leqslant\cdots\leqslant E_r(k_1,k_2,\cdots,k_n) \tag{5}$$

由(4)式和(5)式立即得到(1)式和(2)式。 证毕

定理2 设 $K\in K^n,\partial K\in C^2$,若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\leqslant\dfrac{(n-1)r}{n-r}$,则

$$\binom{n-1}{r-1}M_{r-1}(\partial K)\geqslant\binom{n-1}{r}M_r(\partial K) \tag{6}$$

其中 $1\leqslant r\leqslant n-1$。

证明 由 Marclaurin 不等式,有

$$\frac{E_{r-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})}{\binom{n-1}{r-1}}\geqslant\left[\frac{E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})}{\binom{n-1}{r}}\right]^{\frac{r-1}{r}} \tag{7}$$

$$\frac{E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})}{\binom{n-1}{1}}\geqslant\left[\frac{E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})}{\binom{n-1}{r}}\right]^{\frac{1}{r}} \tag{8}$$

两式对应相乘,得到

$$\frac{E_{r-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})}{\binom{n-1}{r-1}\binom{n-1}{1}}\geqslant\frac{E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})}{\binom{n-1}{r}}$$

即

$$E_{r-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\geqslant\frac{\binom{n-1}{r-1}\binom{n-1}{1}}{\binom{n-1}{r}E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})}E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})$$

注意到

$$E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})\leqslant\frac{(n-1)r}{n-r}$$

等价于

$$\frac{\binom{n-1}{r-1}\binom{n-1}{1}}{\binom{n-1}{r}E_1(k_1,\cdots,k_{n-1})}\geqslant 1$$

因此

$$E_{r-1}(k_1,\cdots,k_{n-1})\geqslant E_r(k_1,\cdots,k_{n-1})$$

故(6)式成立。 证毕

由 Cauchy 公式,得到

定理3 设 $K\in K^n,\partial K\in C^2$,若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\leqslant 1\left(即\ H_{n-1}\leqslant\dfrac{1}{n-1}\right)$,则

$$\binom{n-1}{q}W_{q+1}(K)\leqslant\binom{n-1}{q-1}W_q(K) \tag{9}$$

$$\binom{n-1}{r}W_r(K)\geqslant\binom{n-1}{r+p}W_{r+p}(K) \tag{10}$$

其中 $0\leqslant q\leqslant n-1, 0\leqslant r+p\leqslant n, q, r, p\in N_+$。

定理 4 设 $K\in K^n, \partial K\in C^2$，若 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}\leqslant\frac{(n-1)r}{n-r}$，则

$$\binom{n-1}{r-1}W_r(K)\geqslant\binom{n-1}{r}W_{r+1}(K) \tag{11}$$

其中 $0\leqslant r\leqslant n-1$。

参考文献：

[1] Ren D. Topics in integral geometry[M]. World Scientific, Sigapore, 1994.

[2] Santalo L. Integral geometry and geometric probability [M]. London: Addison-Wesley, 1976.

[3] Zhou J, Jiang D. On mean curvatures of a parallel convex body [J]. Acta Mathematica Science, 2008, 28B: 489-494.

[4] Jiang D, Zeng C. On mean values of mean curvature integrals of a flattened parallel body[J]. J of Math, 2012, 32: 429-438.

[5] Li Z, Zhou J. On mean values of the outer parallel body[J]. J of Math, 2007, 27: 391-396.

[6] Schneider R. Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[7] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. United Kingdoms: Cambridge Univ Press, 1952.

[8] Zhao X, Zhang J, Wang B. Notes on Kubota's formula[J]. J of Math, 2010, 30(4): 613-616.

[9] Santalo L. On the mean curvatures of a flattened convex body[J]. Rev Fac Sci Univ Istanbul, 1956, 21: 189-194.

[10] Xiao Y, Li S, Li M M. A new concept of convex set and its some charateristic properties[J]. J of Math, 2008, 28(2): 233-236.

[11] Zhou J, Jiang D, Li M, et al. On Ros theorem for hypersurfaces[J]. Acta Mathematica Sinica, 2009, 52(6): 1075-1084.

[12] Zhang G, Zhou J. Containment measures in integral geometry[A]//Integral Geometry and Convexity[M]. Singapore: World Scientific, 2005.

[13] Ros A. Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvature and a congruence theorem[J]. J Diff Geom, 1988, 27(2): 215-220.

[14] Ros A. Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures[J]. Revista Mathematica Ibroamericana, 1987, 3(3/4): 447-453.

Some Notes on Mean Curvature Integral of Convex Sets

ZENG Chun-na[1], JIANG De-shuo[2]

(1. College of Mathematics Science, ChongQing Normal University, ChongQing 401331, China;
2. School of Math. & Information Science, Shangqiu Normal University, Shangqiu Henan 476000, China)

Abstract: In this paper, we investigate the mean curvature integral of convex sets in the Euclidean space R^n. Then we obtain some inequalities for the mean curvature integral. Finally, we obtain two inequalities on the quermassintegral of convex sets.

Key words: convex set; mean curvature integral; quermassintegral; symmetric function

（责任编辑 欧红叶）