DOI:10. 11721/cqnuj20130514

# 一类具有时滞和领导者的二阶多智能体系统的一致性*

孟亚伟, 杨志春
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

**摘要**:研究了一类具有时滞和领导者的二阶多智能体系统在静态和动态拓扑网络中的一致性。首先运用代数图论描述此类多智能体系统的数学模型,然后借助于图的连通性质和平衡图代数性质,并结合 Lyapunov 泛函方法和矩阵不等式,得到系统达到一致性的充分必要条件,即当系统的参数满足$\frac{\beta}{\alpha}>\frac{\overline{\gamma}\lambda}{2}+\frac{1}{\lambda}$,且时滞上界 $\tau$ 充分小时,在固定拓扑网络中领导者结点 $r$ 全局可达与系统一致是等价的。对于切换拓扑情形的多智能体系统一致性有类似结论。

**关键词**:时滞;Lyapunov-Razumikhin 定理;多智能体系统;一致性
**中图分类号**:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)05-0066-05

多智能体系统是由多个自主的智能体组成的集合,每个智能体为具有相似动力学行为的物理或者抽象的实体,智能体之间通过信息交换,相互配合共同完成系统目标。多智能体系统具有自主性、分布性、协调性等特征,拥有比单个智能体更高的智能性和更强的问题求解能力,因此它在无人机协调控制、多机器人编队控制、智能群体群集运动、分布式传感器网络、多卫星姿态调整及通信网络拥塞控制等领域有着广泛应用。

一致性或趋同(Consensus) 是多智能体系统研究的一个典型问题,也是一个基本性问题。所谓一致性是指各个体的状态通过一定规则并相互作用最终达到一致。1995 年,Vicsek 等[1]用一些非常简单的数学方程描述个体的动力学模型,用网络建立起个体之间的信息传递及一些简单的相互作用规则。通过计算机模拟仿真,发现了整个群体出现行为上的一致性。Jadbabaie 等[2]利用切换系统和随机矩阵理论进行了理论分析,研究了跟随一个实际领导者的一群自由移动的多智能体系统达到一致的判别准则。随后,多智能体系统的一致性问题得到广泛研究[3-6]。在实际应用中,信息之间的传递无法避免时延,在通信方面考虑时延效应是有必要的[7-10,13]。Olfati-Saber 等[7]考虑了定拓扑有向图、变拓扑有向图和具有通信时滞的定拓扑无向图 3 种情况,系统地提出并研究了一阶多智能体系统的一致性问题。文献[10]主要研究一类二阶多智能体动力系统在有向拓扑网络中不含时滞和带有时滞达到一致性的充要条件。另一方面,系统演化过程中,通常都具有一定目标或导航,即具有虚拟或实际的“领导者”,因而具有领导者的多智能系统的一致性也受到关注。Hong 等[11-12]首次给出动态领导者一致性跟踪算法,对一阶智能体系统设计了分布式控制器和分布式“观测器”。在文献[13]中,他们还得到具有常时滞和领导者的二阶智能系统达到一致的充要条件。

现有工作大多关注多智能体系统无领导者或没有考虑时滞因素,网络拓扑通常也假设是无向连通图,这种假设把研究问题简单化和特殊化的同时,也失去了问题研究的一般性。本文针对具有领导者的二阶多智能体系统,对网络为不变拓扑和变拓扑情形,通过设计新的控制增益使得系统达到一致,其中控制器允许智能体间通信时延是时变的,网络拓扑是有向非对称的加权图。

## 1 预备知识及模型描述

有向图 $G=(V,E,A)$由一个有限结点集合 $V=\{1,2,\cdots,n\}$,一个有向边的集合 $E\subseteq V\times V$ 和权重矩阵 $A$ 所构成。$e_{ij}=(i,j)\in E$ 叫做边,$i$ 称为边的起点,$j$ 称为边的终点,边的方向从 $i$ 指向 $j$,连接权值矩阵为 $A=[a_{ij}]$,

* **收稿日期**:2012-12-06 **网络出版时间**:2013-09-17 17:38
**资助项目**:国家自然科学基金(No. 10971240);教育部科学技术重点研究项目(No. 212138);重庆市自然科学基金(No. CSTC2011BB0117);重庆市教委科研项目(No. KJ120630)
**作者简介**:孟亚伟,男,硕士研究生,研究方向为系统分析与控制;**通讯作者**:杨志春,E-mail:yangzhch@126.com
**网络出版地址**:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.66_010.html

且对于 $\forall i\in I(I=1,2,\cdots,n)$ 有 $i\neq j$，$a_{ij}=\begin{cases}e_{ij}>0,(v_i,v_j)\in E\\0,\text{其他}\end{cases}$，对于 $\forall i\in I$，$a_{ii}=0$。类似定义无向图，无向图是由一个有限结点集合、一个无向边集合和权重矩阵构成的。无向边集合中，结点没有起点和终点之分，就是说，$(i,j)=(j,i)$。因此，无向图是有向图的一种特殊情况。

一个结点 $i$ 的入度和出度分别用 $deg_{\mathrm{in}}(i)$ 和 $deg_{\mathrm{out}}(i)$ 来表示，且 $deg_{\mathrm{in}}(i)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}$，$deg_{\mathrm{out}}(i)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$。$D=diag\{deg(1),deg(2),\cdots,deg(n)\}$，$D$ 称为 $G$ 的度矩阵。图 $G$ 中的结点 $i$ 是平衡的当且仅当该结点的入度等于出度，$deg_{\mathrm{in}}(i)=deg_{\mathrm{out}}(i)$。图 $G$ 是平衡图的充分必要条件是这个图中所有结点都是平衡的，即有 $deg_{\mathrm{in}}(i)=deg_{\mathrm{out}}(i)$，$i\in I$。一个有向图 $G$ 是强连通的当且仅当图 $G$ 的任意的两个不同结点之间有一条有向路径。一个有向图包含生成树，当且仅当它有一个根结点，从任意的其余结点出发，都存在路径可以到达这个根结点。权重图的 Laplacian 矩阵定义为 $L=[l_{ij}]$，$\begin{cases}l_{ii}=\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij},i=j\\ l_{ij}=-a_{ij},i\neq j\end{cases}$。对于无向图，拉普拉斯矩阵是对称半正定的；而对于有向图，该矩阵不具备这样的性质。

考虑 $n+1$ 个智能体，其中假定智能体 $r$ 被称之为领导者，其余的智能体作为跟随者跟随领导者运动即每个跟随者的行为都受领导者的行为影响，智能体可以描述为 $1,2,\cdots,n$。领导者是独立的，其他的智能体之间有一定的联系，位置和速度的变换相互影响。假设每个智能体都是有向图 $G$ 的一个节点。因此可以用图 $G$ 来描述智能体之间的信息交互关系。研究领导者的以下问题，还需关注领导者 $r$ 和跟随者组成的系统与关联图 $\overline{G}$。定义一个对角线的矩阵 $C\in\mathbf{R}_{n\times n}$ 是 $\overline{G}$ 的对角线元素相关联的领导者邻接矩阵 $c_i$，其中 $c_i=a_{ir}(i\in I)$。

当网络拓扑为动态式，令 $\sigma:[0,\infty)\rightarrow\Re_{\Gamma}=\{1,\cdots,N_1\}$，$N_1$ 表示所有可能有向图的总数。令 $\Gamma=\{G_1,\cdots,G_{N_1}\}$ 是有限集合的图的一个常见的节点集合 $V$。如果 $\sigma$ 是一个恒定的函数，则对应的拓扑被固定。$n$ 个智能体在领导者 $r$ 带领下连续时间 $t$ 内的运动系统类似于静态拓扑网络。

对于拓扑网络 $n$ 个智能体在领导者 $r$ 带领下连续时间 $t$ 内的运动模型可以描述为

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=v_i\\ \dot{v}_i(t)=u_i,i=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x_i,v_i,u_i\in\mathbf{R}^m$ 分别表示智能体 $i$ 的位移、速度和输入控制，假设领导者的动力系统描述为

$$\begin{cases}\dot{x}_r(t)=v_r\\ \dot{v}_r(t)=u_r=0\end{cases}\tag{2}$$

设计智能体 $i$ 的输入控制为接受其相邻智能体和领导者节点的位移和速度反馈为(参见文献[10])

$$u_i(t)=\alpha\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}(x_j(t)-x_i(t))+\beta\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}(v_j(t)-v_i(t))+c_i(x_r(t)-x_i(t))+d_i(v_r(t)-v_i(t))\tag{3}$$

其中，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}$，$d_i=\gamma c_i$。

由于耦合智能体之间不能立刻得到来自其他相邻智能体和领导者传递的信息、处理信息，因此产生时滞效应，本文进一步假设智能体之间的系统控制为

$$\begin{aligned}u_i(t)=&\alpha\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}(x_j(t-\tau(t))-x_i(t-\tau(t)))+\beta\sum_{j=1,j\neq i}^{n}a_{ij}(v_j(t-\tau(t))-v_i(t-\tau(t)))+\\&c_i(x_r(t-\tau(t))-x_i(t-\tau(t)))+d_i(v_r(t)-v_i(t))\end{aligned}\tag{4}$$

其中时变时滞 $\tau(t)$ 是连续可微的函数且 $0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau$，且 $\tau$ 是一个正的常数。当跟随者智能体的状态满足：$\lim\limits_{t\to+\infty}(x_i(t)-x_r(t))=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}(v_i(t)-v_r(t))=0$。称带有领导者的多智能体系统(1)，(2)，(4)式达到一致。

## 2 主要结论

本节将给出固定拓扑和切换拓扑网络的系统(1)的一致性充要条件，首先研究固定拓扑网络情形。

不失一般性，取 $m=1$，令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$，$U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$，系统(1)可被重新

写为
$$\begin{cases}\dot{X}(t)=V\\ \dot{V}(t)=U\end{cases} \tag{5}$$

令 $X_r(t)=(x_r(t)^{\mathrm{T}},x_r(t)^{\mathrm{T}},\cdots,x_r(t)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,$V_r(t)=(v_r(t)^{\mathrm{T}},v_r(t)^{\mathrm{T}},\cdots,v_r(t)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,在控制系统(4)下的多智能体系统(1)可改写为

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=V\\ \dot{V}(t)=-\alpha LX(t-\tau(t))-\beta LV(t-\tau(t))+CX_r(t-\tau(t))-CX(t-\tau(t)))+\gamma C(V_r(t)-V(t))\end{cases} \tag{6}$$

其中 $L$ 为跟随多智能体的邻接矩阵为 $G$,$L=D-G$,$C=diag(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,将(6)式整理得

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=V\\ \dot{V}(t)=-(\alpha L+C)X(t-\tau(t))-\beta LV(t-\tau(t))+CX_r(t-\tau(t))+\gamma C(V_r(t)-V(t))\end{cases} \tag{7}$$

令 $\hat{x}_i(t)=x_i(t)-x_r(t)$,$\hat{v}_i(t)=v_i(t)-v_r(t)$,即 $\hat{X}(t)=X(t)-X_r(t)$,$\hat{V}(t)=V(t)-V_r(t)$。根据 Laplacian 矩阵性质,有 $(\alpha L+C)X(t-\tau(t))+CX_r(t-\tau(t))=(\alpha L+C)\hat{X}(t-\tau(t))$,$LV(t-\tau(t)=L\hat{V}(t-\tau(t)$,(7)式可写成

$$\begin{cases}\dot{\hat{X}}(t)=\hat{V}\\ \dot{\hat{V}}(t)=-(\alpha L+C)\hat{X}(t-\tau(t))-\beta \hat{L}V(t-\tau(t))-\gamma \hat{C}V(t)\end{cases} \tag{8}$$

令
$$y(t)=(\hat{X}(t)^{\mathrm{T}},\hat{V}(t)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

根据(8),(9)式,可重写成
$$\dot{y}(t)=My(t)+Ny(t-\tau(t)) \tag{10}$$

其中 $M=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ 0 & -\gamma C\end{pmatrix}$,$N=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -H & -\beta L\end{pmatrix}$,$H=\alpha L+C$。

为了获得系统一致性,需要下面的基本引理(矩阵 $L$,$H$ 如上定义)。

**引理** 1(Schur 补) 对下面的对称矩阵不等式 $\begin{pmatrix}Q & S\\ S^{\mathrm{T}} & R\end{pmatrix}>0$,其中 $Q$ 是 $r\times r$ 维的,$Q=Q^{\mathrm{T}}$,$R=R^{\mathrm{T}}$ 和下面的条件是等价的:1) $Q>0$,$R\text{-}S^{\mathrm{T}}Q^{-1}S>0$;2) $R>0$,$Q\text{-}S^{\mathrm{T}}R^{-1}S>0$。

**引理** 2 [13] 矩阵 $H=\alpha L+C$ 是正定的当且仅当领导者节点 $r$ 在图 $\overline{G}$ 全局到达。

**注** 1 如果领导者节点 $r$ 全局可达,$H$ 矩阵是正定的,存在一个正定矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 使得 $PH+H^{\mathrm{T}}P=I_n$,$H=\alpha L+C$,$\overline{\gamma}$ 表示 $P$ 的最大特征值。

**定理** 1 对于在控制(4)下的系统(1),如果
$$\frac{\beta}{\alpha}>\frac{\overline{\gamma}\lambda}{2}+\frac{1}{\lambda} \tag{11}$$
且时滞上界 $\tau$ 充分小时,系统(1)达到一致即 $\lim\limits_{t\to\infty}y_i(t)=0$ 当且仅当领导者结点在图 $\overline{G}$ 中全局可达。

**证明**(必要性) 由于领导者结点 $r$ 在图 $\overline{G}$ 全局可达,则矩阵 $\alpha L+C$ 是正定的。构造 Lyapunov-Razumikhin 泛函 $V(y(t))=y(t)^{\mathrm{T}}\Omega y(t)$,其中 $\Omega=\begin{pmatrix}\lambda P & P\\ P & kP\end{pmatrix}$ 是正定矩阵,其中 $\lambda>0$,$k\lambda>1$。

由牛顿莱布尼兹公式得 $y(t-\tau(t))=y(t)-\int_{-\tau(t)}^{0}\dot{y}(t+s)\mathrm{d}s=y(t)-\int_{-\tau(t)}^{0}(My(t+s)+Ny(t+s-\tau(t)))\mathrm{d}s=y(t)-M\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s)\mathrm{d}s-N\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s-\tau(t))\mathrm{d}s$。因此时滞微分方程可以被重写为 $\dot{y}(t)=Fy(t)-NM\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s)\mathrm{d}s-N^2\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s-\tau(t))\mathrm{d}s$,其中 $F=M+N=\begin{pmatrix}0 & I\\ -H & -kH\end{pmatrix}$,$H=\alpha L+C$,$k=\frac{\beta}{\alpha}$。$\dot{V}=y^{\mathrm{T}}(M^{\mathrm{T}}\Omega+\Omega M)y+2y^{\mathrm{T}}\Omega Ny(t-\tau(t))=y^{\mathrm{T}}(F^{\mathrm{T}}\Omega+\Omega F)y-2y^{\mathrm{T}}\Omega NM\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s)\mathrm{d}s-2y^{\mathrm{T}}\Omega N^2\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s-\tau(t))\mathrm{d}s$。存在适当的正定矩阵 $\Lambda$ 使不等式 $2a^{\mathrm{T}}b\leqslant a^{\mathrm{T}}\Lambda a+b^{\mathrm{T}}\Lambda^{-1}b$ 成立。令 $a=-M^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}\Omega y$,$b=y(t+s)$,$\Lambda=\Omega^{-1}$,有 $-2y^{\mathrm{T}}\Omega NM\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s)\mathrm{d}s\leqslant\tau y^{\mathrm{T}}\Omega NM\Omega^{-1}M^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}\Omega y+\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s)^{\mathrm{T}}\Omega y(t+s)\mathrm{d}s$。当 $a=-M^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\Omega y$,

$b=y(t+s-\tau(t))$，$\Lambda=\Omega^{-1}$，$-2y^{\mathrm{T}}\Omega N^2\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s)\mathrm{d}s\leqslant\tau y^{\mathrm{T}}\Omega N^2\Omega^{-1}N^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}\Omega y+\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s-\tau(t))^{\mathrm{T}}\Omega y(t+s-\tau(t))\mathrm{d}s$。取 $\varphi(s)=qs$，常数 $q>1$，使得 $V(y(t+\theta)<qV(y(t)$，$-2\tau\leqslant\theta\leqslant0$ 有 $\dot{V}\leqslant-y(t)^{\mathrm{T}}Wy(t)+by(t)^{\mathrm{T}}(\Omega NM\Omega^{-1}+\Omega N^2\Omega^{-1}N^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}\Omega+2q\Omega)y(t)$。其中，$W=-(F^{\mathrm{T}}\Omega+\Omega F)=\begin{pmatrix}I & kI-\lambda P\\ kI-\lambda P & k^2I-2P\end{pmatrix}$。

如果 $k$ 满足(11)式，根据引理 1，$W$ 是正定的。令 $\gamma_1$ 是 $W$ 的最小特征值，$\gamma_2$ 是正定阵 $\Omega NM\Omega^{-1}M^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}\Omega+\Omega N^2\Omega^{-1}N^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}\Omega+2q\Omega$ 的最大特征值，则存在充分小 $\tau$ 使得 $\tau<\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$。那么存在 $\mu>0$，使得 $\dot{V}(y(t))\leqslant-\mu y^{\mathrm{T}}(t)y(t)$，故 $\dot{V}(y(t))$是负定的。根据 Lyapunov-Razumikhin 泛函定理系统(1)达到一致。

(充分性)　当 $\tau$ 充分小时，如果系统(1)是渐近稳定的，等价于(10)式是渐近稳定的，则矩阵 $F$ 的特征值具有非负实部，蕴含矩阵 $H$ 是正定的。根据引理 2，得到领导者节点 $r$ 在图$\overline{G}$是全局可达节点。　证毕

**注 2**　在(11)式中，选取 $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\gamma}}$，则其右端取得最小值。因此，条件(11)式减弱为 $\frac{\beta}{\alpha}>\sqrt{2\gamma}$，定理 1 仍然成立。当多智能体系统是切换拓扑时，类似于固定拓扑网络，获得其等价的切换拓扑系统

$$\dot{y}(t)=M_\sigma y(t)+N_\sigma y(t-\tau(t)) \tag{12}$$

其中 $M=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ 0 & -\gamma C_\sigma\end{pmatrix}$，$N=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -H_\sigma & -\beta L_\sigma\end{pmatrix}$，$H_\sigma=\alpha L_\sigma+C_\sigma$。

**引理 3**[13]　变换拓扑图为平衡图，矩阵 $H_\sigma+H_\sigma^{\mathrm{T}}(H_\sigma=\alpha L_\sigma+C_\sigma)$是正定的当且仅当节点 $r$ 在图$\overline{G}_\sigma$ 全局到达。

**注 3**　变换拓扑图为平衡图，$\Re_\Gamma$ 是有限的，如果领导者节点 $r$ 全局可达，$H_\sigma+H_\sigma^{\mathrm{T}}$ 矩阵是正定的，$H_\sigma+H_\sigma^{\mathrm{T}}$ 的逆矩阵也是正定的，$\gamma*$ 表示所有可能 $\Pi_\sigma^{-1}$ 的最大特征值，$\Pi_\sigma=H_\sigma+H_\sigma^{\mathrm{T}}$。

**定理 2**　对于在控制(4)下的系统(1)，当变换拓扑图为平衡图时，如果

$$\frac{\beta}{\alpha}>\frac{\gamma*\lambda}{2}+\frac{1}{\lambda} \tag{13}$$

且 $\tau$ 充分小，领导者结点 $r$ 在图$\overline{G}_\sigma$ 中全局可达，那么$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$，系统(1)一致。

**证明**　由于领导者结点 $r$ 在图$\overline{G}_\sigma$ 中全局可达，矩阵 $\alpha L_\sigma+C_\sigma$ 是正定的。构造一个 Lyapunov-Razumikhin 泛函 $V(y(t))=y(t)^{\mathrm{T}}\Omega_1y(t)$，其中 $\Omega_1=\begin{pmatrix}\lambda I & I\\ I & kI\end{pmatrix}$是正定矩阵，$\lambda>0$，$k\lambda>1$。

与定理 1 证明类似有 $\dot{V}=y^{\mathrm{T}}(M_\sigma{}^{\mathrm{T}}\Omega_1+\Omega_1M_\sigma y+2y^{\mathrm{T}}\Omega_1Ny(t-\tau(t))=y^{\mathrm{T}}(F_\sigma{}^{\mathrm{T}}\Omega_1+\Omega_1F_\sigma)y-2y^{\mathrm{T}}\Omega_1N_\sigma M_\sigma\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s)\mathrm{d}s-2y^{\mathrm{T}}\Omega_1N_\sigma{}^2\int_{-\tau(t)}^{0}y(t+s-\tau(t))\mathrm{d}s$。

取 $\varphi(s)=qs$，常数 $q>1$，使得 $V(y(t+\theta))<qV(y(t))$，$-2\tau\leqslant\theta\leqslant0$。有 $\dot{V}\leqslant-y(t)^{\mathrm{T}}W_\sigma y(t)+\tau y(t)^{\mathrm{T}}(\Omega_1N_\sigma M_\sigma\Omega_1{}^{-1}\cdot M_\sigma{}^{\mathrm{T}}N_\sigma{}^{\mathrm{T}}\Omega_1+\Omega_1N_\sigma{}^2\Omega_1{}^{-1}N_\sigma{}^{\mathrm{T}}N_\sigma{}^{\mathrm{T}}\Omega_1+2q\Omega_1)y(t)$。其中 $W_\sigma=-(F_\sigma{}^{\mathrm{T}}\Omega_1+\Omega_1F_\sigma)=\begin{pmatrix}\Pi_\sigma & k\Pi_\sigma-\lambda I_n\\ k\Pi_\sigma-\lambda I_n & k^2\Pi_\sigma-2I_n\end{pmatrix}$，$\Pi_\sigma=H_\sigma+H_\sigma^{\mathrm{T}}$。

由引理 3 得 $\Pi_\sigma=H_\sigma+H_\sigma^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵。如果 $k$ 满足(13)式，根据引理 1，那么 $W_\sigma$ 是正定的。$\gamma_{\min}$表示所有可能 $W_\sigma$ 的最小特征值，$\gamma_3$ 表示所有可能 $\|\Omega_1N_\sigma M_\sigma\Omega_1{}^{-1}M_\sigma{}^{\mathrm{T}}N_\sigma{}^{\mathrm{T}}\Omega_1\|+\|\Omega_1N_\sigma{}^2\Omega_1{}^{-1}N_\sigma{}^{\mathrm{T}}N_\sigma{}^{\mathrm{T}}\Omega_1\|+2q\|\Omega_1\|$ 的最大值。则存在充分小的 $\tau$ 使得 $\tau<\tau^*=\frac{\gamma_{\min}}{\gamma_3}$则存在 $\mu>0$ 使得 $\dot{V}(y(t))\leqslant-\mu y^{\mathrm{T}}(t)y(t)$，因此 $\dot{V}(y(t))$是负定的，根据 Lyapunov-Razumikhin 泛函定理系统(1)达到一致。

## 3 结束语

本文主要研究了对于一类具有时滞和领导者的多智能体系统的一致性，给出了系统达到一致性的条件。这里给出固定或切换交互拓扑图是平衡的，本文只研究了时变时滞是相同的，如何考虑切换拓扑图不是平衡时和不同的时滞需要进一步研究。

**参考文献：**

[1] Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letter, 1995, 75(6): 1226-1229.

[2] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. IEEE Trans Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.

[3] Lin J, Morse A S, Anderson B D O. The multi-agent rendezvous problem[J]. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003: 1508-1513.

[4] Lin Z, Francis B, Maggiore M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(1): 121-127.

[5] Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control: collective group behavior through local interaction[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.

[6] Ma C Q, Zhang J F. Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(10): 1263-1268.

[7] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

[8] Sun Y G, Wang L, Xie G M. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays[J]. Systems and Control, 2008, 57(2): 175-183.

[9] Tian Y, Liu C. Consensus of multi-agent system with diverse input and communication delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 9: 2122-2128.

[10] Yu W, Chen G, Cao M, et al. Second-order consensus for multi-agent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. IEEE Trans Syst Man Cybern, Part B, 2010, 40(3): 881-891.

[11] Hong Y, Hu J, Gao L. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology[J]. Automatics, 2006, 42(7): 1177-1182.

[12] Hong Y, Chen G, Bushnell L. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks[J]. Automatica, 2008, 44: 846-850.

[13] Hu J P, Hong Y G. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling timedelays[J]. Physica A, 2007, 374: 853-863.

## Consensus of a Class of Second Multi-agent Systems with Active Leader and Time Delay

MENG Ya-wei, YANG Zhi-chun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract:**: In this paper, we consider consensus problem of a class of second multi-agent systems with active leader and time delay in static and dynamic topology network. We first describe the mathematical model of the systems in term of algebraic graph theory. Using Lyapunov function method and the matrix inequality, we give the sufficient and necessary conditions ensuring that the system is consensus. That is, when system parameters satisfies $\frac{\beta}{\alpha}>\frac{\overline{\gamma}\lambda}{2}+\frac{1}{\lambda}$ and $\tau$ is sufficiently small, then the system is consensus if only leader node $r$ is globally reachable in $\overline{G}$ in a static fixed-topology network. For the case of the switching topology network, we have similar results.

**Key words**: time delay; Lyapunov-Razumikhin theorem; multi-agent systems; consensus

(责任编辑　游中胜)