DOI:10.11721/cqnuj20130515

一类广义的带参数的 Hilbert 型奇异积分算子的范数*

陈广生[1]，丁宣浩[2]，焦运秀[3]

(1.广西现代职业技术学院 计算机工程系，广西 河池 547000；2.重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067
3.新乡职业技术学院 公共课部，河南 新乡 453006)

摘要：Hilbert 型奇异积分算子在分析学中有重要的作用。本文通过引入参数 λ 和两个实数 A_1，A_2，在广义区间 $(0,b)$ 上定义了一个带参数的核为 $\frac{1}{x^\lambda+y^\lambda}$ 的 Hilbert 型奇异积分算子 T：$(Tf)(y)=\int_0^b \frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x$，利用权函数方法和算子理论，研究了 T 的有界性问题，在条件 $A_2p+A_1q=2-\lambda$ 下，得到了算子 T 的范数 $\|T\|=\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}$。作为应用，还考虑其涉及内积的等价形式 $(Tf,g)\leqslant\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}\|f\|_{p,\omega'}\|g\|_{q,\omega''}$。

关键词：Hilbert 型奇异积分算子；Hilbert 型不等式；算子范数；内积；Hölder 不等式

中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2013)05-0071-05

设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\lambda>2-\min\{p,q\}$，$f(x)$，$g(x)\geqslant 0$，使得 $0<\int_0^\infty x^{(p-1)(1-\lambda)}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty x^{(q-1)(1-\lambda)}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，文献[1]得到了如下等价的 Hilbert 型积分不等式：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}\left[\int_0^\infty x^{(p-1)(1-\lambda)}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^\infty x^{(q-1)(1-\lambda)}g^q(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

$$\int_0^\infty y^{\lambda-1}\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<\left[\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/p)}\right]^p\int_0^\infty x^{(p-1)(1-\lambda)}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

(1)和(2)式的常数因子都是最佳值。当 $\lambda=1$ 时，(1)与(2)式变为著名的 Hardy-Hilbert 积分不等式[2]。它们在数学分析的其他数学分支中有重要的应用[3]。近年来，Hilbert 算子及相关不等式的研究已取得许多有价值的成果[4-9,11-12]。

本文的目的是在区间 $(0,b)$ 上，引入一个 Hilbert 型奇异积分算子，并讨论其范数问题。作为应用，导出其等价式及一些相关不等式。

1 主要结果

定义如下的 Hilbert 型奇异积分算子

$$(Tf)(y)=\int_0^b \frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x,\ y\in(0,b) \tag{3}$$

对于非负可测函数 $\omega(x)$ 及 $p>1$，定义函数集

$$L_\omega^p(0,b)=\left\{f(x)\geqslant 0\ \middle|\ \|f\|_{p,\omega}=\left(\int_0^b f^p(x)\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\}$$

引理 1　设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$A_1$，$A_2\in\mathbf{R}$，$1-A_2p>0$，$1-A_1q>0$，$\lambda>\max\{1-A_1q,1-A_2p\}$，定义权函数

* 收稿日期：2012-11-11　　网络出版时间：2013-09-17　17:38
资助项目：国家自然科学基金(No. 11271388)；广西教育厅科研项目(No. 201204LX672)
作者简介：陈广生，男，副教授，硕士，研究方向为解析不等式、小波分析等，E-mail：cgswavelets@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.71_011.html

$$\omega_\lambda(x,A_2,p)=\int_0^b \frac{y^{-A_2 p}}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}y \tag{4}$$

$$\omega_\lambda(y,A_1,q)=\int_0^b \frac{x^{-A_1 q}}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x \tag{5}$$

则有

$$\omega_\lambda(x,A_2,p)\leqslant\frac{x^{1-\lambda-A_2 p}}{\lambda}B\left(\frac{1-A_2 p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2 p}{\lambda}\right) \tag{6}$$

$$\omega_\lambda(y,A_1,q)\leqslant\frac{y^{1-\lambda-A_1 q}}{\lambda}B\left(\frac{1-A_1 q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1 q}{\lambda}\right) \tag{7}$$

证明 令 $u=y^\lambda/x^\lambda$,则有

$$\omega_\lambda(x,A_2,p)=\int_0^b \frac{y^{-A_2 p}}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}y=\frac{x^{1-\lambda-A_2 p}}{\lambda}\int_0^{b^\lambda/x^\lambda}\frac{u^{\frac{1-A_2 p}{\lambda}-1}}{1+u}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{x^{1-\lambda-A_2 p}}{\lambda}\left[\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1-A_2 p}{\lambda}-1}}{1+u}\mathrm{d}u-\int_{b^\lambda/x^\lambda}^\infty \frac{u^{\frac{1-A_2 p}{\lambda}-1}}{1+u}\mathrm{d}u\right]\leqslant\frac{x^{1-\lambda-A_2 p}}{\lambda}B\left(\frac{1-A_2 p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2 p}{\lambda}\right)$$

因此有

$$\omega_\lambda(x,A_2,p)\leqslant\frac{x^{1-\lambda-A_2 p}}{\lambda}B\left(\frac{1-A_2 p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2 p}{\lambda}\right)$$

同理可证明

$$\omega_\lambda(y,A_1,q)\leqslant\frac{y^{1-\lambda-A_1 q}}{\lambda}B\left(\frac{1-A_1 q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1 q}{\lambda}\right)。$$

证毕

引理2 设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$\varepsilon$ 表示任意小的正数,$A_1,A_2\in\mathbf{R}$,$1-A_2 p>0$,$1-A_1 q>0$,$\lambda>\max\{1-A_1 q,1-A_2 p\}$,则有

$$\int_0^b \frac{x^{\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{p}}}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x=\frac{y^{1-\lambda+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{p}}}{\lambda}\left[B\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{\lambda p},1-\frac{1}{\lambda}+\frac{\varepsilon+A_1 pq}{\lambda p}\right)-O(1)\right],y\in(0,b) \tag{8}$$

证明 令 $u=x^\lambda/y^\lambda$,则有

$$\int_0^b \frac{x^{\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{p}}}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x=\frac{y^{1-\lambda+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{p}}}{\lambda}\int_0^{b^\lambda/y^\lambda}\frac{u^{\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{\lambda p}-1}}{1+u}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{y^{1-\lambda+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{p}}}{\lambda}[B(\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{\lambda p},1-\frac{1}{\lambda}+\frac{\varepsilon+A_1 pq}{\lambda p})-\int_{b^\lambda/y^\lambda}^\infty \frac{u^{\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{\lambda p}-1}}{1+u}\mathrm{d}u]=$$

$$\frac{y^{1-\lambda+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{p}}}{\lambda}\left[B\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1 pq}{\lambda p},1-\frac{1}{\lambda}+\frac{\varepsilon+A_1 pq}{\lambda p}\right)-O(1)\right]$$

故(8)式成立。 证毕

定理1 设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,$A_1,A_2\in\mathbf{R}$,$1-A_2 p>0$,$1-A_1 q>0$,$\lambda>\max\{1-A_1 q,1-A_2 p\}$,$\omega=x^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}$,$\omega'=x^{1-\lambda+p(A_1-A_2)}$,则 Hilbert 型奇异积分算子 T 是 $L_{\omega'}^p(0,b)$ 到 $L_\omega^p(0,b)$ 的有界线性算子,且

$$\|T\|=\sup_{f\in L_{\omega'}^p(0,b)}\frac{\|Tf\|_{p,\omega}}{\|f\|_{p,\omega'}}\leqslant\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2 p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2 p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1 q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1 q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{9}$$

若还满足 $A_2 p+A_1 q=2-\lambda$,则有

$$\|T\|=\frac{B\left(\frac{1-A_2 p}{\lambda},\frac{1-A_1 q}{\lambda}\right)}{\lambda} \tag{10}$$

证明 设 $g(y)=y^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}\left[\int_0^b \frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right]^{p-1}$,$y\in(0,b)$。由 Hölder 不等式[10]得

$$\|Tf\|_{p,\omega}^p=\int_0^b y^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}\left[\int_0^b \frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y=\int_0^b\int_0^b \frac{f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^b\int_0^b \frac{1}{x^\lambda+y^\lambda}\left[f(x)\frac{x^{A_1}}{y^{A_2}}\right]\left[g(y)\frac{y^{A_2}}{x^{A_1}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\left\{\int_0^b\int_0^b \frac{1}{x^\lambda+y^\lambda}\frac{x^{A_1 p}}{y^{A_2 p}}f^p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^b\int_0^b \frac{1}{x^\lambda+y^\lambda}\frac{y^{A_2 q}}{x^{A_1 q}}g^q(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$\left\{\int_0^b \omega_\lambda(x,A_2,p)x^{A_1p}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^b \omega_\lambda(y,A_1,q)y^{A_2q}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}$$

由引理 1 得

$$\|Tf\|_{p,\omega}^{p}\leqslant\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\times\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}\times$$

$$\|f\|_{p,\omega'}\left\{\int_0^b y^{1-\lambda+q(A_2-A_1)}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}\times\|f\|_{p,\omega'}\left\{\int_0^b y^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}\left[\int_0^b\frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}\|f\|_{p,\omega'}\|Tf\|_{p,\omega}^{\frac{p}{q}}$$

从而得到

$$\|Tf\|_{p,\omega}\leqslant\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}\|f\|_{p,\omega'}$$

因此(9)式成立。　　证毕

下面证明(10)式成立。

若 $A_2p+A_1q=2-\lambda$，则有 $(1-A_2p)(\lambda-1+A_2p)=(1-A_1q)(\lambda-1+A_1q)=(1-A_1q)(1-A_2p)$，于是有 $\|Tf\|_{p,\omega}\leqslant\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\|f\|_{p,\omega'}$，故 $\|T\|\leqslant\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}$。若(10)式不成立，则存在常数 $0<K<\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}$，使得 $\|T\|=K$，于是有

$$\int_0^b y^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}\left[\int_0^b\frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y\leqslant K^p\int_0^b x^{1-\lambda+p(A_1-A_2)}f^p(x)x$$

故有

$$\lim_{\delta\to0^+}\left[\int_\delta^b y^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}\left(\int_0^b\frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y-K^p\int_\delta^b x^{1-\lambda+p(A_1-A_2)}f^p(x)x\right]\leqslant0$$

设 ε 为任意小的正数，令 $f_\varepsilon(x)=x^{\frac{-\varepsilon-apq}{p}}$，$x\in(0,b)$，由 $A_2p+A_1q=2-\lambda$，得

$$\int_\delta^b x^{1-\lambda+p(A_1-A_2)}f_\varepsilon^p(x)\mathrm{d}x=\int_\delta^b x^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon}(\delta^{-\varepsilon}-b^{-\varepsilon})$$

再由引理 2 得

$$\int_\delta^b y^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}\left[\int_0^b\frac{f_\varepsilon(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y=$$

$$\int_\delta^b y^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}\left[\frac{B\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1pq}{\lambda p},1-\frac{1}{\lambda}+\frac{\varepsilon+A_1pq}{\lambda p}\right)}{\lambda}-O(1)\right]^p y^{p-\lambda p-\varepsilon-A_1pq}\mathrm{d}y=$$

$$\left[\frac{B\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1pq}{\lambda p},1-\frac{1}{\lambda}+\frac{\varepsilon+A_1pq}{\lambda p}\right)}{\lambda}-O(1)\right]^p\int_\delta^b y^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}y=$$

$$\left[\frac{B\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1pq}{\lambda p},1-\frac{1}{\lambda}+\frac{\varepsilon+A_1pq}{\lambda p}\right)}{\lambda}-O(1)\right]^p\frac{1}{\varepsilon}(\delta^{-\varepsilon}-b^{-\varepsilon})$$

因此有

$$\left[\frac{B\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{-\varepsilon-A_1pq}{\lambda p},1-\frac{1}{\lambda}+\frac{\varepsilon+A_1pq}{\lambda p}\right)}{\lambda}\right]^p-K^p\leqslant0。$$

令 $\varepsilon\to 0^+$，则有 $\dfrac{B\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{A_1pq}{\lambda p},1-\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{A_1pq}{\lambda p}\right)}{\lambda}\leqslant K$，即有 $\dfrac{B\left(\dfrac{1-A_2p}{\lambda},\dfrac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\leqslant K$，矛盾，所以 $\|T\|=\dfrac{B\left(\dfrac{1-A_2p}{\lambda},\dfrac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}$。

2 一些应用

设 $f(x)$，$g(x)$ 为 $(0,b)$ 上的非负可测函数，定义 f 与 g 的内积为

$$(f,g)=\int_0^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

推论1 设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$A_1,A_2\in\mathbf{R}$，$1-A_2p>0$，$1-A_1q>0$，$\lambda>\max\{1-A_1q,1-A_2p\}$，$\omega'=x^{1-\lambda+p(A_1-A_2)}$，$\omega''=x^{1-\lambda+q(A_2-A_1)}$，则 Hilbert 型奇异积分算子 T 满足

$$(Tf,g)\leqslant\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}\|f\|_{p,\omega'}\|g\|_{q,\omega''}\tag{11}$$

若还满足 $A_2p+A_1q=2-\lambda$，则有

$$(Tf,g)\leqslant\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\|f\|_{p,\omega'}\|g\|_{q,\omega''}\tag{12}$$

且常数因子 $\dfrac{B\left(\dfrac{1-A_2p}{\lambda},\dfrac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}$ 是最佳的。

证明 设 $\omega=x^{(p-1)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}$，由 Hölder 不等式及(9)式，有

$$(Tf,g)=\int_0^b\left(\int_0^b\frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right)g(y)\mathrm{d}y=\int_0^b y^{-(1-\lambda+(A_2-A_1)q)/q}\left[\int_0^b\frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right]y^{(1-\lambda+(A_2-A_1)q)/q}g(y)\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\left\{\int_0^b y^{(1-p)(\lambda-1)+p(A_1-A_2)}\left[\int_0^b\frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^b y^{1-\lambda+q(A_2-A_1)}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}=$$

$$\|Tf\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega''}\leqslant\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}\|f\|_{p,\omega'}\|g\|_{q,\omega''}$$

故(11)式成立。 证毕

由(11)式可导出(9)式，故(11)式与(9)式等价。若 $A_2p+A_1q=2-\lambda$，(12)与(10)式等价。因此(12)式成立，常数因子为最佳值。

推论2 设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$A\in\mathbf{R}$，$1-Ap>0$，$1-Aq>0$，$\lambda>\max\{1-Aq,1-Ap\}$，则有如下等价的 Hilbert 型不等式

$$\int_0^b\int_0^b\frac{f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C_\lambda(A,p,q)\left(\int_0^b x^{1-\lambda}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^b y^{1-\lambda}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\tag{13}$$

$$\int_0^b y^{(p-1)(\lambda-1)}\left(\int_0^b\frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y\leqslant[C_\lambda(A,p,q)]^p\int_0^b x^{1-\lambda}f^p(x)\mathrm{d}x\tag{14}$$

这里 $C_\lambda(A,p,q)=\left[\dfrac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\dfrac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}$。当 $p+q=\dfrac{1}{A}(2-\lambda)$ 时，(13)和(14)式的常数因子为最佳的。

证明 在定理1和推论1中，取 $A_1=A_2=A$，便可得到(13)和(14)式。 证毕

注 当 A_1，A_2 选取合适的值，可以得到一批新的不等式。

参考文献：

[1] 杨必成. 关于一个推广的 Hardy-Hilbert 不等式[J]. 数学年刊 A 辑，2002，23(2)：247-254.
Yang B C. On an extension of Hardy-Hilbert's inequality [J]. Chinese Annals of Mathematics, Series A, 2002, 23 (2): 247-254.

[2] Hardy G H. Littlewood J E, Polya G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge Urav Press, 1952.

[3] Mitrinovic D S, Pecaric J E, Fink A M. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, l991.

[4] Xie Z T, Zeng Z. A Hilbert—type integral inequality whose kernel is a homogeneous form of degree-3[J]. J Math Anal Appl, 2008, 339(1): 324-331.

[5] 杨必成. 关于一个推广的具有最佳常数因子的 Hilbert 类不等式及其应用[J]. 数学研究评论，2005，25(2)：341-346.
Yang B C. Generalization of Hilbert's type inequality with best constant factor and its applications [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2005, 25(2): 341-346.

[6] 洪勇. 一个新的 Hilbert 重积分不等式[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2005，30(4)：594-599.
Hong Y. On a new Hilbert's multiple integral inequality [J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science, 2005, 30(4): 594-599.

[7] Yang B C. On the norm of an integral operator and application[J]. J Math Anal Appl, 2006, 321(1): 182-192.

[8] 洪勇. 关于 Hardy-Hilbert 积分不等式的全方位推广[J]. 数学学报，2001，44(4)：619-626.
Hong Y. All-sided generalization about Hardy-Hilbert integralinequalities[J]. Acta Mathematica Sinica, 2001, 44(4): 619-626.

[9] 洪勇. 一类 Hilbert 型奇异积分算子的范数及其应用[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(5)：40-44.
Hong Y. On the norm of a Hilbert's type singular integral operator and its application[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science, 2010, 35(5): 40-44.

[10] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南：山东科学技术出版社，2004.
Kuang J C. Applied inequalities[M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, China, 2004.

[11] 陈广生，丁宣浩. 一个新的 Hilbert 型积分不等式[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2011，28(1)：37-39.
Chen G S, Ding X H. A new Hilbert's type integral inequality[J]. Journal of chongqing Normal University: Natural Science Edition, 2011, 28(1): 37-39.

[12]陈广生，丁宣浩. 一个多参数的逆向 Hilbert 型不等式[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(5)：32-39.
Chen G S, Ding X H. A reverse Hilbert-type inequality with several parameters[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science, 2010, 35(5): 32-39.

On the Norm of a General Hilbert's Type Singular Integral Operator with Some Parameters

CHEN Guang-sheng[1], DING Xuan-hao[2], JIAO Yun-xiu[3]

(1. Department of Computer Engineering, Guangxi Modern Vocational Technology College, Hechi Guangxi 547000;
2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chonqing 400067;
3. Department of Common Courses, Xinxiang Polytechnic College, Xinxiang Henan 453006, China)

Abstract: Hilbert's type singular integral operator plays an important role in analysis. In this paper, by introducing an independent parameter λ and two real numbers A_1, A_2, we define a Hilbert type singular multiple integral operator T in a general interval $(0, b)$ as follows: $(Tf)(y)=\int_0^b \frac{f(x)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x$, using the way of weight function and operator theory, the boundedness and norm of T are studied. Under condition of $A_2p+A_1q=2-\lambda$, we obtain the norm of Tas $\|T\|=\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{1-A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}$. As their applications, the equivalent forms with inner product are considered as follows: $(Tf,g)\leqslant\left[\frac{B\left(\frac{1-A_2p}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_2p}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{B\left(\frac{1-A_1q}{\lambda},\frac{\lambda-1+A_1q}{\lambda}\right)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{q}}\|f\|_{p,\omega'}\|g\|_{q,\omega''}$.

Key words: Hilbert's type singular integral operator; Hilbert's type inequality; norm of operator; inner product; Hölder's inequality

（责任编辑 游中胜）