DOI:10.11721/cqnuj20130516

复模糊值函数的积分及其性质*

殷　凤，王鹏飞
(忻州师范学院 数学系，山西 忻州 034000)

摘要:复模糊值函数理论在模糊控制中是广泛存在的,讨论复模糊值函数积分的性质有重要的理论和实际意义。本文首先介绍了模糊数的概念、运算规则及复模糊值函数的表达式$\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$,在新的序关系的意义下给出复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$Riemann 积分的定义。在此基础上给出了复模糊值函数的 r-截集的概念,利用 r-截集把复模糊值函数转化为区间值函数,用扩张原理给出了复模糊值函数积分表达式,并讨论了复模糊值函数积分的性质,得出了复模糊值函数积分具有区间可加性、不等式性、对实系数和复系数具有线性性质等结论。

关键词:复模糊值函数;复模糊值函数的 r-截集;积分;区间值函数
中图分类号:O159　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)05-0076-04

模糊概念广泛地应用于社会各个层面。模糊系统理论应用最有效、最广泛的领域就是模糊控制,模糊控制在各种领域出人意料地解决了传统控制理论无法解决的或难以解决的问题,并取得了一些令人信服的成效。模糊分析的研究是模糊控制研究的主要工具,毕淑娟在文献[1]中讨论了模糊值函数 $\tilde{f}(x)$的 Riemann 积分;Wang Haihua 在文献[2]中讨论了模糊值函数 $\tilde{f}(x)$的线积分;吉承儒等在文献[3]中讨论了复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=\tilde{f}_1(x)+\mathrm{i}\,\tilde{f}_2(x)$的 Choquet 积分,是在复模糊测度的基础上,利用复数域上的复模糊测度及复模糊可测函数,给出的复模糊值函数在模糊集合 A 的 Choquet 积分,其积分变量取自于模糊集合 A;吴建春等在文献[4]中讨论了复模糊值函数 $f(x)=\tilde{f}_1(x)+\mathrm{i}\,\tilde{f}_2(x)$的 Henstock-stieltjes 积分,是在复模糊值函数在$[a,b]$上满足 H 差且α-可导的基础上,利用复区间值函数的 Henstock-Stieltjes 积分,当复模糊值函数的任一λ水平复区间值函数关于实值增函数α 在$[a,b]$上 Choquet 可积,给出的复模糊值函数在$[a,b]$的 Choquet 积分,其积分变量为实值增函数α取自于$[a,b]$;汪彬在文献[5]中讨论了模糊值函数的 Mcshane 积分,在多数情况下,上面几种情形都很难满足,当复模糊值函数的实部和虚部在$[a,b]$上为闭有界模糊值函数时,利用区间值函数的 Riemann 积分的性质,当复模糊值函数的实部和虚部任一λ水平区间值函数在$[a,b]$上 Riemann 可积时,本文给出复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=\tilde{f}_1(x)\wedge\tilde{f}_2(x)$在$[a,b]$的新积分—Riemann 积分,其积分变量取自于$[a,b]$。

复模糊值函数 Riemann 积分理论在综合评价、聚类分析、信息系统识别、优化理论、模糊规划、模糊决策、经济模型分析等模糊系统理论中有很好的应用,尤其是在模糊动力系统理论中将有广泛的应用,并在工业控制、工业产品市场需求、图像处理、模糊控制、模糊模式识别等计算机智能化领域中同样有广泛的应用前景。

1 复模糊值函数的积分定义

定义 1[6]　称 $\tilde{u}:\mathbf{R}\to[0,1]$模糊数是指$\forall r\in[0,1]$,$[\tilde{u}]^r$ 为非空有界闭区间$[\tilde{u}_r^-,\tilde{u}_r^+]$,其中$[\tilde{u}]^r=\{x\in\mathbf{R}:\tilde{u}(x)\geqslant r\}$,$r\in(0,1]$,$[\tilde{u}]^0=\{x\in\mathbf{R}:\tilde{u}(x)>0\}$,所有模糊数的集记做 E^1。

引理 1　对$\forall\tilde{u},\tilde{v}\in E^1$ 和$\forall k\in\mathbf{R}$ 有以下运算法则 C:a) $([\tilde{u}+\tilde{v}]^r=[\tilde{u}_r^-+\tilde{v}_r^-,\tilde{u}_r^++\tilde{v}_r^+]$,$r\in[0,1]$[6-7];b) $[\tilde{u}-\tilde{v}]^r=[\tilde{u}_r^--\tilde{v}_r^+,\tilde{u}_r^+-\tilde{v}_r^-]$,$r\in[0,1]$[6-7];c) $[\tilde{u}\tilde{v}]^r=[\min\{\tilde{u}_r^-\tilde{v}_r^-,\tilde{u}_r^-\tilde{v}_r^+,\tilde{u}_r^+\tilde{v}_r^-,\tilde{u}_r^+\tilde{v}_r^+\}$,

* 收稿日期:2012-10-15　修回日期:2013-01-12　网络出版时间:2013-09-17 17:38
资助项目:山西省教育科技开发项目(No.20121111);忻州师范学院自然科学基金项目(No.201205)
作者简介:殷凤,女,讲师,硕士,研究方向为数学分析,E-mail:wangpfyf88@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.76_012.html

$\max\{\tilde{u}_r^-\tilde{v}_r^-,\tilde{u}_r^-\tilde{v}_r^+,\tilde{u}_r^+\tilde{v}_r^-,\tilde{u}_r^+\tilde{v}_r^+\}]$，$r\in[0,1]$；d) $k[\tilde{u}]^r=k[\tilde{u}_r^-,\tilde{u}_r^+]=\begin{cases}[k\tilde{u}_r^-,k\tilde{u}_r^+],k\geqslant 0\\ [k\tilde{u}_r^+,k\tilde{u}_r^-],k<0\end{cases}$，$r\in[0,1]$[6-7]。

E^1 赋之如上的加法和乘法运算将成为一个凸锥，该凸锥可等距同构地嵌入到一个 Banach 空间中去。

定义 2[6]　对 $\forall\tilde{u},\tilde{v}\in E^1\tilde{u}\leqslant\tilde{v}$ 当且仅当 $\tilde{u}_r^-+\tilde{u}_r^+\leqslant\tilde{v}_r^-+\tilde{v}_r^+$（$\forall r\in[0,1]$）称 $\tilde{u}=\tilde{v}$ 当且仅当 $\tilde{u}\leqslant\tilde{v}$，$\tilde{v}\leqslant\tilde{u}$ 同时成立。

定义 3[6-9]　设 $\tilde{a}(x),\tilde{b}(x)\in E^1$，$\mathbf{C}$ 是复数集，称$(\tilde{a}(x),\tilde{b}(y)):\mathbf{C}\to[0,1]$，$z=x+\mathrm{i}y\to\tilde{a}(x)\wedge\tilde{b}(y)$，$x,y\in\mathbf{R}$ 为 $\mathbf{C}$ 上的复模糊数，$\tilde{a}(x),\tilde{b}(y)$ 分别为$(\tilde{a}(x),\tilde{b}(y))$的实部和虚部，记$\tilde{\tilde{c}}=(\tilde{a}(x),\tilde{b}(y))$，$\tilde{a}(x)=\mathrm{Re}\,\tilde{\tilde{c}}$，$\tilde{b}(y)=\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{c}}$，所有复模糊数的集合记为 $F(C)$。

定义 4　复模糊数空间中的加减于数乘定义：$\forall\tilde{\tilde{c}}_1,\tilde{\tilde{c}}_2\in F(C)$，$c=a+\mathrm{i}b\in\mathbf{C}$，$\tilde{\tilde{c}}_1+\tilde{\tilde{c}}_2=(\mathrm{Re}\,\tilde{\tilde{c}}_1+\mathrm{Re}\,\tilde{\tilde{c}}_2,\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{c}}_1+\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{c}}_2)\in F(C)$，$c\,\tilde{\tilde{c}}=(a\,\mathrm{Re}\,\tilde{\tilde{c}},b\,\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{c}})\in F(C)$。

定义 5　对任意的复模糊数$\tilde{\tilde{c}}\in F(C)$，及复数 $c\in\mathbf{C}$，其数积定义为 $c\,\tilde{\tilde{c}}=(a\,\mathrm{Re}\,\tilde{\tilde{c}},b\,\mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{c}})\in F(C)$，其中$(\widetilde{ac})_r=[\widetilde{ac}_r^-,\widetilde{ac}_r^+]$。

定义 6　设有模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，任给$[a,b]$的一个分发 T 和一组 $\xi=\{\xi_k\}$，有积分和 $\tilde{\tilde{\sigma}}(T,\xi)=\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{\tilde{f}}(\xi_k)\Delta x_k$，若当 $L(T)\to 0$ 时，积分和 $\tilde{\sigma}(T,\xi)$存在极限，设 $\lim\limits_{L(T)\to 0}\tilde{\tilde{\sigma}}(T,\xi)=\lim\limits_{L(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{\tilde{f}}(\xi_k)\Delta x_k=\tilde{\tilde{I}}$，且$\tilde{\tilde{I}}\in E^1$ 与分法 T 无关，也与 ξ_k 的取法无关，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$。$\forall T:L(T)<\delta$，$\forall\xi=\{\xi_k\}$，有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{\tilde{f}}(\xi_k)\Delta x_k-\tilde{\tilde{I}}\right|<\varepsilon$，称模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)$在闭区间$[a,b]$上可积，$\tilde{\tilde{I}}$为模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)$在闭区间$[a,b]$上积分，记为 $\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{L(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{\tilde{f}}(\xi_k)\Delta x_k=\tilde{\tilde{I}}$。

定义 7　设复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$，对于 $\forall r\in(0,1]$，复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)$的 r-截集为$\tilde{\tilde{f}}(x)_r=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))_r=(\tilde{f}_1(x)_r,\tilde{f}_2(x)_r)$，在复模糊值函数 r-截集的意义下，复模糊值函数的积分定义为 $\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x=\bigcup\limits_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]$。

2 复模糊值函数积分的性质

定理 1　设复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$在区间$[a,b]$上可积，$\forall r\in[0,1]$，有 $\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x\right]_r=\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]$。

证明
$$\lim_{x\to a}\tilde{\tilde{f}}(x)=\tilde{\tilde{b}}(\tilde{\tilde{b}}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2))\Leftrightarrow\lim_{x\to a}\tilde{f}_1(x)=\tilde{b}_1,\lim_{x\to a}\tilde{f}_2(x)=\tilde{b}_2$$

对 $\forall r\in[0,1]$，有
$$\lim_{x\to a}[\tilde{f}_1^-(x)_r+\tilde{f}_1^+(x)_r]=\tilde{b}_{2r}^-+\tilde{b}_{2r}^+,\lim_{x\to a}[\tilde{f}_2^-(x)_r+\tilde{f}_2^+(x)_r]=\tilde{b}_{2r}^-+\tilde{b}_{2r}^+$$

$$\left(\int_a^b\tilde{f}_1(x)\mathrm{d}x\right)_r^-+\left(\int_a^b\tilde{f}_1(x)\mathrm{d}x\right)_r^+=\left(\lim_{L(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}_1(\xi_k)\Delta x_k\right)_r^-+\left(\lim_{L(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}_1(\xi_k)\Delta x_k\right)_r^+=$$
$$\lim_{L(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}[\tilde{f}_1^-(\xi_k)_r+\tilde{f}_1^+(\xi_k)_r]\Delta x_k=\left[\int_a^b\tilde{f}_1^-(x)_r+\tilde{f}_1^+(x)_r\mathrm{d}x\right]$$

即 $\left[\int_a^b\tilde{f}_1(x)\mathrm{d}x\right]_r=\left[\int_a^b\tilde{f}_1(x)_r^-\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{f}_1(x)_r^+\mathrm{d}x\right]$，同理有 $\left[\int_a^b\tilde{f}_2(x)\mathrm{d}x\right]_r=\left[\int_a^b\tilde{f}_2(x)_r^-\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{f}_2(x)_r^+\mathrm{d}x\right]$，又
$$\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x\right]_r=\left[\int_a^b(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))\mathrm{d}x\right]_r=\left[\int_a^b(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))_r^-\mathrm{d}x,\int_a^b(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))_r^+\mathrm{d}x\right]$$

所以 $\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x\right]_r=\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]$。

定理 2 设复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$、$\tilde{\tilde{g}}(x)=(\tilde{g}_1(x),\tilde{g}_2(x))$在区间$[a,b]$上可积,$\forall k,l\in\mathbf{R}$,有$\int_a^b(k\tilde{\tilde{f}}(x)+l\tilde{\tilde{g}}(x))\mathrm{d}x=k\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x+l\int_a^b\tilde{\tilde{g}}(x)\mathrm{d}x$。

证明
$$\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}(x)+\tilde{\tilde{g}}(x))\mathrm{d}x=\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}(x)+\tilde{\tilde{g}}(x))_r^-\mathrm{d}x,\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}(x)+\tilde{\tilde{g}}(x))_r^+\mathrm{d}x\right]=$$
$$\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)+\tilde{\tilde{g}}_r^-(x))\mathrm{d}x,\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)+\tilde{\tilde{g}}_r^+(x))\mathrm{d}x\right]=$$
$$\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]+\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b\tilde{\tilde{g}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{g}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]=\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x+\int_a^b\tilde{\tilde{g}}(x)\mathrm{d}x$$
则当$k\geqslant 0$时,有
$$\int_a^b k\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x=\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b k\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b k\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]=\bigcup_{r\in(0,1]}rk\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]=$$
$$k\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]=k\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x$$
当$k\leqslant 0$时,同理能证明上式成立,得证。 证毕

推论 1 若n个复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}_1(x),\tilde{\tilde{f}}_2(x),\cdots,\tilde{\tilde{f}}_n(x)$在区间$[a,b]$上可积,则其线性组合$k_1\tilde{\tilde{f}}_1(x)+\cdots+k_n\tilde{\tilde{f}}_n(x)$在区间$[a,b]$上可积,且$\int_a^b(k_1\tilde{\tilde{f}}_1(x)+k_2\tilde{\tilde{f}}_2(x)+\cdots+k_n\tilde{\tilde{f}}_n(x))\mathrm{d}x=k_1\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_2(x)\mathrm{d}x+\cdots+k_n\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_n(x)\mathrm{d}x$,其中$k_n$为实数。

定理 3 设复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$在区间$[a,b]$上可积,$\forall c\in(a,b)$,有$\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x=\int_a^c\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x+\int_c^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x$。

推论 2 若复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)$在区间$[a,b]$上可积,且$a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b$,有$\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x=\int_a^{c_1}\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{c_2}\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{c_{n-1}}^{c_n}\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x+\int_{c_n}^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x$。

定理 4 设复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$,$\tilde{\tilde{g}}(x)=(\tilde{g}_1(x),\tilde{g}_2(x))$在区间$[a,b]$上可积,且$\tilde{\tilde{f}}(x)\geqslant\tilde{\tilde{g}}(x)$,有$\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b\tilde{\tilde{g}}(x)\mathrm{d}x$。

证明 由$\tilde{\tilde{f}}(x)\geqslant\tilde{\tilde{g}}(x)$,得$\tilde{f}_1(x)\geqslant\tilde{g}_1(x)$,$\tilde{f}_2(x)\geqslant\tilde{g}_2(x)$,所以
$$\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x=\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]\geqslant\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b\tilde{\tilde{g}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{g}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]=\int_a^b\tilde{\tilde{g}}(x)\mathrm{d}x$$
证毕

定理 5 设复模糊值函数$\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$,$\tilde{\tilde{g}}(x)=(\tilde{g}_1(x),\tilde{g}_2(x))$在区间$[a,b]$上可积,$\forall k,l\in\mathbf{C}$,有$\int_a^b(k\tilde{\tilde{f}}(x)+l\tilde{\tilde{g}}(x))\mathrm{d}x=k\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x+l\int_a^b\tilde{\tilde{g}}(x)\mathrm{d}x$。

证明
$$\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}(x)+\tilde{\tilde{g}}(x))\mathrm{d}x=\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}(x)+\tilde{\tilde{g}}(x))_r^-\mathrm{d}x,\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}(x)+\tilde{\tilde{g}}(x))_r^+\mathrm{d}x\right]=$$
$$\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)+\tilde{\tilde{g}}_r^-(x))\mathrm{d}x,\int_a^b(\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)+\tilde{\tilde{g}}_r^+(x))\mathrm{d}x\right]=$$
$$\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]+\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b\tilde{\tilde{g}}_r^-(x)\mathrm{d}x,\int_a^b\tilde{\tilde{g}}_r^+(x)\mathrm{d}x\right]=\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x+\int_a^b\tilde{\tilde{g}}(x)\mathrm{d}x$$
当$k=k_1+\mathrm{i}k_2\in\mathbf{C}$时,因为$\forall\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))\in F(C)$,$c=c_1+\mathrm{i}c_2\in\mathbf{C}$,有$c\tilde{\tilde{f}}(x)=(c_1\tilde{f}_1(x),c_2\tilde{f}_2(x))$,所以
$$\int_a^b k\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x=\bigcup_{r\in(0,1]}r\left[\int_a^b(k_1\tilde{f}_1(x),k_2\tilde{f}_2(x))_r^-\mathrm{d}x,\int_a^b(k_1\tilde{f}_1(x),k_2\tilde{f}_2(x))_r^+\mathrm{d}x\right]=$$
$$\bigcup_{r\in(0,1]}r\left(k_1\int_a^b(\tilde{f}_1(x))_r\mathrm{d}x,k_2\int_a^b(\tilde{f}_2(x))_r\mathrm{d}x\right)=\left(k_1\int_a^b\tilde{f}_1(x)\mathrm{d}x,k_2\int_a^b\tilde{f}_2(x)\mathrm{d}x\right)=$$

$$k\int_a^b(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))\mathrm{d}x=k\int_a^b\tilde{\tilde{f}}(x)\mathrm{d}x$$ 证毕

推论 3 若 n 个复模糊值函数 $\tilde{\tilde{f}}_1(x),\tilde{\tilde{f}}_2(x),\cdots,\tilde{\tilde{f}}_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则其线性组合 $k_1\tilde{\tilde{f}}_1(x)+\cdots+k_n\tilde{\tilde{f}}_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b(k_1\tilde{\tilde{f}}_1(x)+k_2\tilde{\tilde{f}}_2(x)+\cdots+k_n\tilde{\tilde{f}}_n(x))\,\mathrm{d}x=k_1\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_2(x)\mathrm{d}x+\cdots+k_n\int_a^b\tilde{\tilde{f}}_n(x)\mathrm{d}x$$

其中 k_n 为复数。

参考文献：

[1] 毕淑娟. 模糊值函数的积分及其性质[J]. 黑龙江大学学报：自然科学版，2003，20(3)：46-49.
Bi S J. Integral and its properties of fuzzy-valued function [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University: Natural Science，2003，20(3)：46-49.

[2] Wang H H，Liu Y Q. Existence results for fuzzy integral equations of fractional order [J]. Int J Math Anal，2011，17(5)：811-828.

[3] 吉承儒，李卫霞，马生全. 复模糊值 Choquet 模糊积分[J]. 海南师范大学学报：自然科学版，2011，24(3)：253-256.
Ji C R，Li W X，Ma Q S. Complex fuzzy-valued Choquet fuzzy integrals[J]. Journal of Hainan Normal University: Natural Science，2011，24(3)：253-256.

[4] 吴建春，闫彦宗. 复模糊值函数的 Henstock-stieltjes 积分[J]. 数学的实践与认识，2012，42(12)：123-128.
Wu J C，Yan Y Z. Henstock-stieltjes integral of complex fuzzy valued function[J]. Mathematics in Practice and Theory，2012，42(12)：123-128.

[5] 汪彬. 双枝模糊值函数的 Mcshane 积分及其推广[D]. 天津：天津师范大学，2010.
Wang B. The Mcshane integral and deduction of both-branch-fuzzy-number-valued functions[D]. Tianjin: Tianjin Normal University，2010.

[6] 吴从炘，马明. 模糊分析学基础[M]. 北京：国防工业出版社，1991.
Wu C X，Ma M. Fundamentals of fuzzy analysis [M]. Beijing: National Defence industry press，1991.

[7] Mazandarani M，Kamyad A V. Modified fractional euler method for solving fuzzy fractional initial value problem [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2013，18(1)：12-21.

[8] 郭嗣琮. 模糊值函数分析学的结构元方法简介(II)——模糊值函数及微积分的结构元表述[J]. 数学的实践与认识，2008，38(3)：73-79.
Guo S Z. Briefintroduction of fuzzy-valued function analytics base on fuzzy structured element method (Ⅱ)[J]. Mathematics in Practice and Theory，2008，38(3)：73-79.

[9] 王鹏飞，殷凤，蔺小林. 复模糊值函数的导数及性质[J]. 黑龙江大学学报：自然科学版，2009，26(4)：486-489.
Wang P F，Yin F，Lin X L. Differential coefficient and its properties of complex fuzzy valued function[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University: Natural Science，2009，26(4)：486-489.

Differential Coefficient and Properties of Complex Fuzzy-valued Function

YIN Feng，WANG Peng-fei

(Department of Mathematics，Xinzhou Teacher's University，Xinzhou Shanxi 034000，China)

Abstract: The value function of complex fuzzy is widespread in fuzzy control; discussions of complex fuzzy value function integral properties have important theoretical and practical significance. In this paper，firstly，the concept and the operation rules of fuzzy number and the expression of complex fuzzy value function $\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$ are introduced，and the Riemann integral definition of the complex fuzzy value function $\tilde{\tilde{f}}(x)=(\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))$ is given under the new order relation of meaning. Based on the definition of r-cut set is given，the value function of complex fuzzy is turned to interval valued function using r-cut set，then complex fuzzy value function integral expression is given with extension principle. In addition，the properties of integral fuzzy-valued function are discussed，and interval additivity，inequality sex and linearity on the real coefficient and complex coefficient of the complex fuzzy value function integral are obtained.

Key words: complex fuzzy-valued function; cut sets of complex fuzzy-valued function; differential coefficient; integral

(责任编辑 黄 颖)