DOI:10.11721/cqnuj20130519

# 基于比率的 3 种群扩散捕食-食饵系统的非常数正解*

周红玲, 沈　林

(黄淮学院 数学科学系, 河南 驻马店 463000)

**摘要**:讨论了基于比率的 3 种群扩散捕食-食饵系统非常数正解的存在性。首先分析了正常数解的渐近稳定性并利用 Harnack 不等式和极大值原理给出了正解的估计;其次,利用能量方法讨论了非常数正解的不存在性,得到了非常数正解不存在的充分条件;最后,以种群 $v$ 的扩散率 $d_2$ 作为分歧参数,利用度理论,得到了非常数正解存在的充分条件为:假设 $a>d,c>m,r+\frac{d}{a}+\frac{m}{c}>2$ 和 $r+\left(\frac{d}{a}\right)^2+\frac{m}{c}<2$ 成立,且存在某个 $n\geqslant 1$ 使得 $\tilde{\mu}\in(\mu_n,\mu_{n+1})$, $\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\dim E(\mu_i)$ 是奇数,则存在一个正常数 $\rho$,当 $d_2\geqslant\rho$ 时,捕食-食饵系统至少存在一个非常数正解。

**关键词**:捕食-食饵;扩散;比率

**中图分类号**:O175.26　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)05-0089-07

近年来,人们对 3 种群捕食系统进行了大量研究,文献[1-2]研究了具有时滞和基于比率的 3 种群捕食系统,证明了系统在一定条件下是持续生存的。文献[3]研究了具有交叉-扩散的 3 种群捕食系统非常数正解的存在性及全局分歧,文献[4-6]讨论了具有扩散的 3 种群捕食系统非常数正解的存在性。

本文在文献[2]的基础上进一步研究在齐次 Neumann 边界条件下基于比率依赖的 3 种群扩散捕食系统

$$\begin{cases}-d_1\Delta u=ru\left(1-\frac{u}{k}\right)-\frac{uv}{u+v}-\frac{uw}{u+w}=G_1(u,v,w),x\in\Omega\\ -d_2\Delta v=v\left(-d+\frac{au}{u+v}\right)=G_2(u,v,w),\ x\in\Omega\\ -d_3\Delta w=w\left(-m+\frac{cu}{u+v}\right)=G_3(u,v,w),\ x\in\Omega\\ \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial n}=0,\ x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\Omega\in\mathbf{R}^n$ 是有界光滑区域,$n$ 是$\partial\Omega$ 上的单位外法向量,$d_1,d_2,d_3,r,k,d,a,m,c$ 均为正常数。$u$ 为食饵种群,$v,w$ 为捕食种群,3 种群的扩散率分别为 $d_1,d_2,d_3$。更详细的生物意义见文献[2]。

本文主要研究系统(1)非常数正解的存在性与不存在性。第 1 节证明了正常数解的稳定性,第 2 节给出了正解的先验估计,第 3 节证明了非常数正解不存在性,第 4 节给出了非常数正解的存在的条件。

## 1 正常数解的稳定性

本节讨论系统(1)正常数解的局部稳定性,给出了一些充分条件。记 $U=(u,v,w)$,$G(U)=(G_1(U),G_2(U),G_3(U))$。易见,系统(1)有唯一正常数解 $\tilde{U}=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$,其中

$$\tilde{u}=\frac{k}{r}\left(r+\frac{d}{a}+\frac{m}{c}-2\right),\tilde{v}=\frac{a-d}{d}\tilde{u},\tilde{w}=\frac{c-m}{m}\tilde{u}$$

当且仅当系统参数满足条件

$$a>d,c>m,r+\frac{d}{a}+\frac{m}{c}>2\tag{2}$$

* 收稿日期:2012-07-05　　网络出版时间:2013-09-17　17:38

资助项目:河南省科技计划项目(No.132300410250);河南省高校科技创新人才计划项目(No.2010HASTIT043)

作者简介:周红玲,女,讲师,研究方向为偏微分方程及其可视化,E-mail:8810s@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.89_015.html

令 $0=\mu_0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_i<\cdots$ 是齐次 Neumann 边界条件下算子 $-\Delta$ 在 $\Omega$ 上的特征值,$E(\mu_i)$ 是关于 $\mu_i$ 在 $C^1(\overline{\Omega})$ 中的特征子空间。$\{\varphi_{ij}:j=1,2,\cdots,\dim E(\mu_i)\}$ 是 $E(\mu_i)$ 的一组正交基,$X=\{U\in C^1(\overline{\Omega})\times C^1(\overline{\Omega})\times C^1(\overline{\Omega})\mid \frac{\partial U}{\partial n}=0,x\in\partial\Omega\}$,$X_{ij}=\{c\varphi_{ij}\mid c\in\mathbf{R}^3\}$,则 $X_i=\bigoplus_{j=1}^{\dim E(\mu_i)}X_{ij}$,$X=\bigoplus_{i=1}^{\infty}X_i$。

**定理 1** 若(2)式和 $r+\left(\frac{d}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{c}\right)^2>2$ 成立,则系统(1)的正常数解是渐近稳定的。

证明 $G_U(\widetilde{U})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$,其中 $a_{11}=2-r-\left(\frac{d}{a}\right)^2-\left(\frac{m}{c}\right)^2$,$a_{12}=-\left(\frac{d}{a}\right)^2$,$a_{13}=-\left(\frac{m}{c}\right)^2$,$a_{21}=\left(\frac{a-d}{a}\right)^2$,$a_{22}=\frac{d(d-a)}{a}$,$a_{23}=0$,$a_{31}=\left(\frac{c-m}{c}\right)^2$,$a_{32}=0$,$a_{33}=\frac{m(m-c)}{c}$。记 $D=diag(d_1,d_2,d_3)$,$L=D\Delta+G_U(\widetilde{U})$,则系统(1)在 $\widetilde{U}$ 处的线性化方程为 $LU=0$。对任意的 $i\geqslant1$,$X_i$ 是算子 $L$ 的不变子空间,$\lambda$ 是算子 $L$ 在 $X_i$ 上的特征值当且仅当 $\lambda$ 是 $-\mu_iD+G_U(\widetilde{U})$ 的特征值。而 $-\mu_iD+G_U(\widetilde{U})$ 的特征多项式

$$\psi_i(\lambda)=\lambda^3+A_{1i}\lambda^2+A_{2i}\lambda+A_{3i}$$

其中

$$A_{1i}=(d_1+d_2+d_3)\mu_i-(a_{11}+a_{22}+a_{33})$$

$$A_{2i}=(d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1)\mu_i^2-[a_{11}(d_2+d_3)+a_{22}(d_1+d_3)+a_{33}(d_1+d_2)]\mu_i+a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{11}a_{33}-a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}$$

$$A_{3i}=d_1d_2d_3\mu_i^3-(a_{11}d_2d_3+a_{22}d_1d_3+a_{33}d_1d_2)\mu_i^2+[a_{22}a_{33}d_1+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})d_2+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})d_3]\mu_i-a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{31}a_{22}$$

容易验证在条件

$$r+\left(\frac{d}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{c}\right)^2>2 \tag{3}$$

成立时 $a_{11}<0$,计算可得

$$A_{1i}>0,A_{2i}>0,A_{3i}>0,A_{1i}A_{2i}-A_{3i}>0,\forall i\geqslant1$$

所以 $\forall i\geqslant1$,$\psi_i(\lambda)$ 的根 $\lambda_{i,1},\lambda_{i,2},\lambda_{i,3}$ 的实部都小于零。

下面证明存在正常数 $\delta$ 使得

$$\mathrm{Re}\{\lambda_{i,1}\},\mathrm{Re}\{\lambda_{i,2}\},\mathrm{Re}\{\lambda_{i,3}\}\leqslant-\delta,\forall i\geqslant1$$

记 $\lambda=\mu_i\zeta$,则

$$\psi_i(\lambda)=\mu_i^3\zeta^3+A_{1i}\mu_i^2\zeta^2+A_{2i}\mu_i\zeta+A_{3i}\triangleq\overline{\psi}_i(\zeta)$$

$$\overline{\psi}(\zeta)\triangleq\lim_{i\to+\infty}\left\{\frac{\overline{\psi}_i(\zeta)}{\mu_i^3}\right\}=\zeta^3+(d_1+d_2+d_3)\zeta^2+(d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1)\zeta+d_1d_2d_3$$

则 $\forall i\geqslant1$,$\overline{\psi}(\zeta)$ 的根 $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3$ 的实部都小于零,即存在正常数 $\overline{\delta}$ 使得

$$\mathrm{Re}\{\zeta_1\},\mathrm{Re}\{\zeta_2\},\mathrm{Re}\{\zeta_3\}\leqslant-\overline{\delta},\forall i\geqslant1$$

由连续性可知:存在 $i_0$ 使得当 $i\geqslant i_0$ 时,$\overline{\psi}_i(\zeta)$ 的根 $\zeta_{i,1},\zeta_{i,2},\zeta_{i,3}$ 满足

$$\mathrm{Re}\{\zeta_{i,1}\},\mathrm{Re}\{\zeta_{i,2}\},\mathrm{Re}\{\zeta_{i,3}\}\leqslant-\overline{\delta},(\forall i\geqslant i_0)$$

即 $\mathrm{Re}\{\lambda_{i,1}\},\mathrm{Re}\{\lambda_{i,2}\},\mathrm{Re}\{\zeta_{i,3}\}\leqslant-\mu_i\overline{\delta}\leqslant-\overline{\delta},\forall i\geqslant i_0$。

记 $-\widetilde{\delta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant i_0}\{\lambda_{i,1},\lambda_{i,2},\lambda_{i,3}\}$,取 $\delta=\min\{\widetilde{\delta},\overline{\delta}\}$。即得 $\mathrm{Re}\{\lambda_{i,1}\},\mathrm{Re}\{\lambda_{i,2}\},\mathrm{Re}\{\lambda_{i,3}\}\leqslant-\delta,\forall i\geqslant1$,进而 $\widetilde{U}$ 是渐近稳定的。 证毕

由定理 1 可知:系统(1)在条件(2)和(3)约束下,在 $\widetilde{U}$ 的附近不存在非常数正平衡解。

## 2 正解的估计

为了书写简单,以下用 $\Lambda$ 表示 $r,k,d,a,m,c$ 的集合。下面给出系统(1)正解的先验估计。为此,先引入两个引理。

**引理**1[7]**(Harnack 不等式)**　若 $\omega\in C^2(\bar{\Omega})\cap C^1(\bar{\Omega})$是 $\Delta\omega+c(x)\omega=0, x\in\Omega$; $\frac{\partial\omega}{\partial n}=0, x\in\partial\Omega$ 的一个正解,则存在一个正常数 $C_*=C_*(N,\Omega,\|c\|_\infty)$使得

$$\max_{\bar{\Omega}}\omega\leqslant C_*\min_{\bar{\Omega}}\omega$$

**引理** 2[8]**(极大值原理)**　假设 $g\in C(\bar{\Omega}\times\mathbf{R}^1)$;$b_j\in C(\bar{\Omega}), j=1,2,\cdots,N$。若 $\omega\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$满足 $\Delta\omega(x)+\sum_{j=1}^{N}b_j(x)\omega_{x_j}+g(x,\omega(x))\geqslant 0, x\in\Omega$; $\frac{\partial\omega}{\partial n}\leqslant 0$, $x\in\partial\Omega, \omega(x_0)=\max_{\bar{\Omega}}\omega$,则 $g(x_0,\omega(x_0))\geqslant 0$。

**定理** 2　令 $\Lambda$ 中的元素为固定的实数,若$(u,v,w)$是系统(1)的任意正解,则

$$\max_{\bar{\Omega}}u\leqslant k, \max_{\bar{\Omega}}v\leqslant\frac{a-d}{d}k, \max_{\bar{\Omega}}w\leqslant\frac{c-m}{m}k \tag{4}$$

**证明**　若 $u(x_0)=\max_{\bar{\Omega}}u(x)$,则由引理 2 可得

$$ru(x_0)\left(1-\frac{u(x_0)}{k}\right)\geqslant 0,\ 即\max_{\bar{\Omega}}u\leqslant k$$

若 $v(x_1)=\max_{\bar{\Omega}}v(x)$,则由引理 2 可得

$$-d+\frac{au(x_1)}{u(x_1)+v(x_1)}\geqslant 0, 即\max_{\bar{\Omega}}v\leqslant\frac{a-d}{d}k$$

同理可知:

$$\max_{\bar{\Omega}}w\leqslant\frac{c-m}{m}k$$

证毕

**定理** 3　令 $\Lambda$ 中的元素为固定的实数,$\underline{d_1},\underline{d_2},\underline{d_3}$是固定的常数,假定 $d_i\in[\underline{d_i},\infty), i=1,2,3$ 且 $\Lambda$ 满足(2)式,则存在一个正常数 $\underline{C}=\underline{C}(\Omega,\Lambda,\underline{d_1},\underline{d_2},\underline{d_3})$使得系统(1)的每一个正解$(u,v,w)$都满足

$$\min_{\bar{\Omega}}\{u(x),v(x),w(x)\}>\underline{C} \tag{5}$$

**证明**　令 $c_i(x)=\frac{1}{d_i}G_i(u), i=1,2,3$。则结合(4)式可知:若 $d_i\in[\underline{d_i},\infty), i=1,2,3$。则存在一个正常数 $\bar{C}(\Omega,d_1,d_2,d_3,\Lambda)$,使得 $\|c_1\|_\infty, \|c_2\|_\infty, \|c_3\|_\infty\leqslant\bar{C}$。因此,若 $u,v,w$ 满足

$\Delta u+c_1(x)u=0, x\in\Omega$; $\frac{\partial u}{\partial n}=0, x\in\partial\Omega$, $\Delta v+c_2(x)v=0, x\in\Omega$; $\frac{\partial v}{\partial n}=0, x\in\partial\Omega$, $\Delta w+c_3(x)w=0$, $x\in\Omega$; $\frac{\partial w}{\partial n}=0$, $x\in\partial\Omega$,则由 Harnack 不等式可知,存在一个正常数 $C_*=C_*(\Omega,d_1,d_2,d_3,\Lambda)$使得

$$\begin{cases}\max_{\bar{\Omega}}u\leqslant C_*\min_{\bar{\Omega}}u\\ \max_{\bar{\Omega}}v\leqslant C_*\min_{\bar{\Omega}}v\\ \max_{\bar{\Omega}}w\leqslant C_*\min_{\bar{\Omega}}w\end{cases} \tag{6}$$

下面用反证法来证明(5)式成立。

假设(5)式不成立,由(6)式知,存在一个序列$\{d_{1i},d_{2i},d_{3i}\}_{i=1}^{\infty}$,其中 $d_i\in[\underline{d_i},\infty), i=1,2,3$。使得系统 (1)对应的正解$(u_i,v_i,w_i)$满足

$$\max_{\bar{\Omega}}u_i\to 0\ 或\max_{\bar{\Omega}}v_i\to 0\ 或\max_{\bar{\Omega}}w_i\to 0 \tag{7}$$

把$(u_i,v_i,w_i)$代入系统(1)的各个方程中,然后在 $\Omega$ 上积分可得

$$\begin{cases}\int_\Omega u_i\left[r\left(1-\frac{u_i}{k}\right)-\frac{v_i}{u_i+v_i}-\frac{w_i}{u_i+w_i}\right]\mathrm{d}x=0\\ \int_\Omega v_i\left(-d+\frac{au_i}{u_i+v_i}\right)\mathrm{d}x=0\\ \int_\Omega w_i\left(-m+\frac{cu_i}{u_i+v_i}\right)\mathrm{d}x=0\end{cases} \tag{8}$$

由 $L^p$ 估计和嵌入定理[9]知,存在$\{u_i,v_i,w_i\}_{i=1}^{\infty}$的一个子序列,为了方便仍记为$\{u_i,v_i,w_i\}_{i=1}^{\infty}$则当 $i\to\infty$时,存在 3 个非负的函数 $u^*,v^*,w^*$ 和$\overline{d_1},\overline{d_2},\overline{d_3}$使得

$$(u_i,v_i,w_i)\to(u^*,v^*,w^*)\in C^2(\bar{\Omega})\times C^2(\bar{\Omega})\times C^2(\bar{\Omega}), d_i\to\overline{d_i}\in[\underline{d_i},\infty), i=1,2,3$$

进而(8)式可转化为

$$\begin{cases}\int_\Omega u^*\left[r\left(1-\frac{u^*}{k}\right)-\frac{v^*}{u^*+v^*}-\frac{w^*}{u^*+w^*}\right]\mathrm{d}x=0\\ \int_\Omega v^*\left(-d+\frac{au^*}{u^*+v^*}\right)\mathrm{d}x=0\\ \int_\Omega w^*\left(-m+\frac{cu^*}{u^*+v^*}\right)\mathrm{d}x=0\end{cases}\tag{9}$$

同时结合(7)式可得 $u^*\equiv0$ 或 $v^*\equiv0$ 或 $w^*\equiv0$。

(i) $u^*\equiv0$。$\forall i\gg1$ 有 $-d+\frac{au_i}{u_i+v_i}<0, x\in\overline{\Omega}$,所以 $\forall i\gg1$ 有 $\int_\Omega v_i\left(-d+\frac{au_i}{u_i+v_i}\right)\mathrm{d}x<0$,与(8)式矛盾。

(ii) $v^*\equiv0, u^*\not\equiv0$。$\forall i\gg1$ 有 $-d+\frac{au_i}{u_i+v_i}<0, x\in\overline{\Omega}$,所以 $\forall i\gg1$ 都有 $\int_\Omega v_i\left(-d+\frac{au_i}{u_i+v_i}\right)\mathrm{d}x<0$,与(8)式矛盾。

(iii) $w^*\equiv0, u^*, v^*\not\equiv0$。同理可得 $\int_\Omega w_i\left(-m+\frac{cu_i}{u_i+v_i}\right)\mathrm{d}x<0$,与(8)式矛盾。

至此定理得证。 证毕

## 3 非常数正解的不存在性

**定理4** 设 $\mu_1$ 是齐次 Neumann 边界条件下 $-\Delta$ 算子在 $\Omega$ 上的最小正特征值,$d_2^*, d_3^*$ 满足 $d_2^*\mu_1>a-d$,$d_3^*\mu_1>c-m$,则存在正常数 $D_1=D_1(\Lambda)$,如果 $d_1>D_1, d_2>d_2^*, d_3>d_3^*$,则系统(1)无非常数正解。

**证明** 设$(u,v,w)$是系统(1)的正解,对任意的 $\varphi\in L^1(\Omega)$,令 $\bar{\varphi}=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\varphi\mathrm{d}x$,对系统(1)每个方程等式两边分别乘以$(u-\bar{u})$,$(v-\bar{v})$,$(w-\bar{w})$后,再在 $\Omega$ 上积分,求和可得

$$\begin{aligned}&d_1\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+d_2\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+d_3\int_\Omega|\nabla w|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\left[r-\frac{r}{k}(u+\bar{u})-\frac{v\bar{v}}{(u+v)(\bar{u}+\bar{v})}\right](u-\bar{u})^2\mathrm{d}x+\\&\int_\Omega\left[\frac{au\bar{u}}{(u+v)(\bar{u}+\bar{v})}-d\right](v-\bar{v})^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[\frac{cu\bar{u}}{(u+w)(\bar{u}+\bar{w})}-m\right](w-\bar{w})^2\mathrm{d}x+\\&\int_\Omega\frac{av\bar{v}-u\bar{u}}{(u+v)(\bar{u}+\bar{v})}(u-\bar{u})(v-\bar{v})\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{cw\bar{w}-u\bar{u}}{(u+w)(\bar{u}+\bar{w})}(u-\bar{u})(w-\bar{w})\mathrm{d}x\leqslant\\&(r+C_1+C_2)\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x+(a-d+\varepsilon_1)\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x+(c-m+\varepsilon_2)\int_\Omega(w-\bar{w})^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $C_1=C_1(\Lambda,\varepsilon_1)$,$C_2=C_2(\Lambda,\varepsilon_2)$,$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为 Young 不等式中非常小的正数。

利用 Poincare 不等式

$$\mu_1\int_\Omega(f-\bar{f})^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla f|^2\mathrm{d}x$$

上面的不等式可转化为

$$\begin{aligned}&\mu_1d_1\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x+\mu_1d_2\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x+\mu_1d_3\int_\Omega(w-\bar{w})^2\mathrm{d}x\leqslant\\&(r+C_1+C_2)\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x+(a-d+\varepsilon_1)\int_\Omega(v-\bar{v})^2\mathrm{d}x+(c-m+\varepsilon_2)\int_\Omega(w-\bar{w})^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

选择非常小的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$,使得 $d_2^*\mu_1>a-d, d_3^*\mu_1>c-m$,所以 $d_1>D_1\triangleq(r+C_1+C_2)\mu_1^{-1}$,$u\equiv\bar{u}=$常数;$v\equiv\bar{v}=$常数;$w\equiv\bar{w}=$常数。 证毕

## 4 非常数正解的存在性

本节将利用度理论以 $d_2$ 为参数来讨论系统(1)非常数正解的存在性。设 $\Lambda$ 中的元素为固定的正数,$d_1, d_3$ 为固定正数,$\Lambda$ 满足(2)式及 $r+\left(\frac{d}{a}\right)^2+\frac{m}{c}<2$。

由定理2和定理3知,一定存在一个正常数 $b$ 使得 $b^{-1}<u,v<b, x\in\overline{\Omega}$,因此,系统(1)可以写成

$$\begin{cases}-D\Delta U=G(U), x\in\Omega\\ \frac{\partial U}{\partial n}=0, x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{10}$$

**定义** $X^+=\{U\in X\mid u>0,v>0,w>0,x\in\bar{\Omega}\}$，$B(b)=\{U\in X\mid b^{-1}<u,v,w<b,x\in\bar{\Omega}\}$。若 $U$ 是(10)式的一个正解当且仅当

$$F(U)=U-(I-\Delta)^{-1}\{D^{-1}G(U)+U\}=0,U\in X^+$$

其中 $(I-\Delta)^{-1}$ 是齐次 Neumann 条件下 $(I-\Delta)$ 的逆算子。若 $F(U)\neq 0$，$U\in\partial B$，则可以定义 $\deg(F(\cdot),0,B)$。

记 $D_UF(\tilde{U})=I-(I-\Delta)^{-1}\{D^{-1}G_U(\tilde{U})+I\}$，若 $D_UF(\tilde{U})$ 可逆，则 $index(F(\cdot),\tilde{U})=(-1)^r$，其中 $r$ 是 $D_UF(\tilde{U})$ 实部小于零的特征值的代数重数之和。

下面讨论 $D_UF(\tilde{U})$ 的特征值，对于任意的整数 $i\geqslant 1$，$1\leqslant j\leqslant\dim E(\mu_i)$，若 $\lambda$ 是算子 $D_UF(\tilde{U})$ 在 $X_{ij}$ 上的特征值，当且仅当 $\lambda$ 是矩阵

$$I-\frac{1}{1+\mu_i}[D^{-1}G_U(\tilde{U})+I]=\frac{1}{1+\mu_i}[\mu_iI-D^{-1}G_U(\tilde{U})]$$

的特征值，从而可知算子 $D_UF(\tilde{U})$ 是可逆的当且仅当对任意的 $i\geqslant 1$，矩阵 $I-\frac{1}{1+\mu_i}[D^{-1}G_U(\tilde{U})+I]$ 是非奇异的。

记
$$H(\mu)=H(\tilde{U},\mu)=\det\{\mu I-D^{-1}G_U(\tilde{U})\}=(d_1d_2d_3)^{-1}\det\{\mu D-G_U(\tilde{U})\}\tag{11}$$

若 $H(\mu_i)\neq 0$，则对任意的 $1\leqslant j\leqslant\dim E(\mu_i)$ 有 $D_UF(\tilde{U})$ 在 $X_{ij}$ 上负的特征值的代数重数之和是奇数当且仅当 $H(\mu_i)<0$。

**引理 3** 假设对任意的 $i\geqslant 1$，矩阵 $\mu_iI-D^{-1}G_U(\tilde{U})$ 是非奇异的，则 $index(F(\cdot),\tilde{U})=(-1)^\sigma$，其中

$$\sigma=\sum_{i\geqslant 1,H(\mu_i)<0}\dim E(\mu_i)\tag{12}$$

要计算 $(F(\cdot),\tilde{U})$ 的指数，只需考虑 $H(\mu_i)$ 的符号。经计算可知

$$A(d_2;\mu)\triangleq\det\{\mu D-G_U(\tilde{U})\}=A_3(d_2)\mu^3+A_2(d_2)\mu^2+A_1(d_2)\mu-\det\{G_U(\tilde{U})\}$$

其中：$A_3(d_2)=d_1d_2d_3$，$A_2(d_2)=-(a_{11}d_2d_3+a_{22}d_1d_3+a_{33}d_1d_2)$，$A_1(d_2)=a_{22}a_{33}d_1+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})d_2+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})d_3$。记 $\tilde{\mu}_1(d_2)$，$\tilde{\mu}_2(d_2)$，$\tilde{\mu}_3(d_2)$ 是 $A(d_2;\mu)=0$ 的 3 个根，则有

$$\tilde{\mu}_1(d_2)\tilde{\mu}_2(d_2)\tilde{\mu}_3(d_2)=\det\{G_U(\tilde{U})\}A_3{}^{-1}(d_2)<0$$

所以 $\tilde{\mu}_1(d_2)$，$\tilde{\mu}_2(d_2)$，$\tilde{\mu}_3(d_2)$ 这 3 根之积是负数。
又因为

$$\lim_{d_2\to\infty}d_2{}^{-1}A(d_2;\mu)=\mu[d_1d_3\mu^2-(a_{11}d_3+a_{33}d_1)\mu+a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}]\tag{13}$$

则可得下面的引理。

**引理 4** 假设条件(2)及 $r+\left(\frac{d}{a}\right)^2+\frac{m}{c}<2$ 成立，则存在一个正常数 $\rho$，使得当 $d_2\geqslant\rho$ 时，$A(d_2;\mu)=0$ 的 3 个根 $\tilde{\mu}_1(d_2)$，$\tilde{\mu}_2(d_2)$，$\tilde{\mu}_3(d_2)$ 都为实数且满足

$$\lim_{d_2\to\infty}\tilde{\mu}_1(d_2)=\frac{a_{11}d_3+a_{33}d_1-\sqrt{(a_{11}d_3-a_{33}d_1)^2+4d_1d_3a_{13}a_{31}}}{2d_1d_3}\triangleq\underset{\sim}{\mu}<0,\lim_{d_2\to\infty}\tilde{\mu}_2(d_2)=0$$

$$\lim_{d_2\to\infty}\tilde{\mu}_3(d_2)=\frac{a_{11}d_3+a_{33}d_1+\sqrt{(a_{11}d_3-a_{33}d_1)^2+4d_1d_3a_{13}a_{31}}}{2d_1d_3}\triangleq\tilde{\mu}>0$$

进而可得：

$$\begin{cases}-\infty<\tilde{\mu}_1(d_2)<0<\tilde{\mu}_2(d_2)<\tilde{\mu}_3(d_2)\\A(d_2,\mu)>0,\mu_i\in(\tilde{\mu}_1(d_2),\tilde{\mu}_2(d_2))\cup(\tilde{\mu}_3(d_2),+\infty)\\A(d_2,\mu)<0,\tilde{\mu}_i\in(-\infty,\tilde{\mu}_1(d_2))\cup(\tilde{\mu}_2(d_2),\tilde{\mu}_3(d_2))\end{cases}\tag{14}$$

下面可证当 $d_2$ 充分大时，系统(1)存在非常数正解。

**定理 5** 假设 $\Lambda$ 中的元素为固定的实数，$d_1$，$d_3$ 为固定正数，$\Lambda$ 满足(2)式和 $r+\left(\frac{d}{a}\right)^2+\frac{m}{c}<2$，若存在某个 $n\geqslant 1$ 使得 $\tilde{\mu}\in(\mu_n,\mu_{n+1})$，$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\dim E(\mu_i)$ 是奇数，则存在一个正常数 $\rho$，当 $d_2\geqslant\rho$ 时，系统(1)至少存在一个非常数正解。

**证明** 由引理4知,存在一个正常数$\rho$,使得$d_2\geqslant\rho$时(14)式成立,且

$$0=\mu_0<\tilde{\mu}_2(d_2)<\mu_1,\tilde{\mu}_3(d_2)\in(\mu_n,\mu_{n+1}) \tag{15}$$

下面将用反证法证明对任意的$d_2\geqslant\rho$,系统(1)至少有一个非常数正解,采用的是拓扑度的同伦不变性得到矛盾,从而证明此结果。

假设存在某个$d_2=\tilde{d}_2\geqslant\rho$使得定理结论不成立,固定$\hat{d}_1\geqslant D_1,\hat{d}_2\geqslant d_2^*,\hat{d}_3\geqslant d_3^*$,当$t\in[0,1]$,定义$D(t)=diag(d_1(t),d_2(t),d_3(t))$,其中$d_i(t)=td_i+(1-t)\hat{d}_i,i=1,2$。对于问题

$$\begin{cases}-D(t)\Delta U=G(U),x\in\Omega\\ \dfrac{\partial U}{\partial n}=0,\ x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{16}$$

$U$是系统(1)的非常数正解当且仅当$t=1$时,$U$是(16)式的一个非常数正解。显然对任意的$0\leqslant t\leqslant 1$,$\tilde{U}$是(16)式唯一正常数解,若对任意的$0\leqslant t\leqslant 1$,$U$是(16)式的一个正解当且仅当

$$F(t;U)=U-(I-\Delta)^{-1}\{D^{-1}(t)G(U)+U\}=0$$

显然$F(1;U)=F(U)$。定理4表明,当$U\in X^+$时,$F(0;U)=0$有唯一正解$\tilde{U}$。经计算可得

$$D_UF(t;\tilde{U})=I-(I-\Delta)^{-1}\{D^{-1}(t)G_U(\tilde{U})+I\}$$

特别的$D_UF(0;\tilde{U})=I-(I-\Delta)^{-1}\{\hat{D}^{-1}G_U(\tilde{U})+I\}$,$D_UF(1;\tilde{U})=I-(I-\Delta)^{-1}\{D^{-1}G_U(\tilde{U})+I\}=D_UF(\tilde{U})$,其中$\hat{D}=diag(\hat{d}_1,\hat{d}_2,\hat{d}_3)$。又由(11)和(12)式可得

$$H(\mu)=\frac{1}{d_1d_2d_3}A(d_2;\mu) \tag{17}$$

结合(14),(15),(17)式易得

$$\begin{cases}H(\mu_0)=H(0)>0\\ H(\mu_i)<0,1\leqslant i\leqslant n\\ H(\mu_i)>0,i\geqslant n+1\end{cases}$$

所以,对任意的$i\geqslant 1$,有0不是矩阵$\mu_iI-D^{-1}G_U(\tilde{U})$的特征值,且

$$\sum_{i\geqslant 1,H(\mu_i)<0}\dim E(\mu_i)=\sum_{i=1}^{n}\dim E(\mu_i)=\sigma_n$$

其中$\sigma_n$是奇数。又由引理3可得

$$index(F(1;\cdot),\tilde{U})=(-1)^r=(-1)^{\sigma_n}=-1 \tag{18}$$

下面证明

$$index(F(0;\cdot),\tilde{U})=(-1)^0=1 \tag{19}$$

固定$r_0$使$r<r_0$,且$r_0+\left(\dfrac{d}{a}\right)^2+\left(\dfrac{m}{c}\right)^2>2$。定义$r(t)=tr+(1-t)r_0,t\in[0,1]$,$r(0)=r_0$,同时对系统(1)把$(d_1,d_2,d_3,r)$分别用$(\hat{d}_1,\hat{d}_2,\hat{d}_3,r(t))$替换掉,则可得到一个新的方程组,把它记为系统(1$t$)对应的$G(U)$用$G(t;U)$替换;则当$t\in[0,1]$时,有$r(t)+\dfrac{d}{a}+\dfrac{m}{c}>2$,类似定理4的证明,可得$\tilde{U}$是系统(1$t$)($t\in[0,1]$)的唯一正解,记

$$\hat{F}(t;U)=U-(I-\Delta)^{-1}\{\hat{D}^{-1}G(t;U)+U\}=0,U\in X^+$$

则$\hat{F}(1;\cdot)=F(0;\cdot)$,$\tilde{U}$是$\hat{F}(t;U)=0,t\in[0,1]$的唯一正解,由度的同伦不变性可得

$$index(\hat{F}(1;\cdot),\tilde{U})=index(\hat{F}(0;\cdot),\tilde{U}) \tag{20}$$

由于$r(0)=r_0$,则对任意的$i\geqslant 1$有

$$\det(\mu_i\hat{D}-G_U(0;\tilde{U}))>0$$

由引理3可得$index(\hat{F}(0;\cdot),\tilde{U})=(-1)^0=1$,又由$\hat{F}(1;\cdot)=F(0;\cdot)$,和(20)式可得(19)式成立。

由定理2和定理3知,存在一个正常数$b$使得,对任意的$0\leqslant t\leqslant 1$,(16)式的正解满足$b^{-1}<u,v,w<b$,因此对任意的$b^{-1}<u,v,w<b$有$F(t;U)\neq 0,U\in\partial B(b)$,则由度的同伦不变性可得

$$\deg(F(1;\cdot),0,B(b))=\deg(F(0;\cdot),0,B(b)) \tag{21}$$

另一方面，由假设知若 $U\in B(b)$ 则 $F(1;U)=0$，$F(0;U)=0$ 只有唯一的一个正解 $\widetilde{U}$，从而由(18)和(19)式可得

$\deg(F(0;\cdot),0,B(b))=index(F(0;\cdot),0,B(b))=1$，$\deg(F(1;\cdot),0,B(b))=index(F(1;\cdot),0,B(b))=-1$

与(21)式矛盾，则定理结论成立。 证毕

**注 1** 当 $r=1,d=2,a=3,m=1,c=2$ 时，可同时满足条件(2)及 $r+\left(\frac{d}{a}\right)^2+\frac{m}{c}<2$。

当以 $d_3$ 为分歧参数时，可得如下定理：

**定理 6** 假设 $\Lambda$ 中的元素为固定的正数，$d_1$，$d_2$ 为固定正数，$\Lambda$ 满足条件(2)和 $r+\frac{d}{a}+\left(\frac{m}{c}\right)^2<2$，若存在某个 $n\geqslant 1$ 使得 $\widetilde{\mu}\in(\mu_n,\mu_{n+1})$，$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\dim E(\mu_i)$ 是奇数，则存在一个正常数 $M$，当 $d_3\geqslant M$ 时，系统(1)至少存在一个非常数正解。

**注 2** 利用定理 5 的证明方法可得定理 6。

**参考文献：**


[1] Xu R, Chen L S. Persistence and global stability for three species ratio-dependent predator-prey system with time delays[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2001, 21(4): 204-212.

[2] Tan D J. Persistence for three-species ratio-dependent predator-prey system[J]. Journal of Biomathematics, 2003, 18(1): 50-56.

[3] Wang M X. Stationary patterns caused by cross-diffusion for a three-species prey-predator model[J]. Computers and Mathematics with Application. 2006(52): 707-720.

[4] Pang P Y H, Wang M X. Strategy and stationary pattern in a three-species predator-prey model[J]. Journal of Differential Equations, 2004(200): 245-273.

[5] Hei L J, Yu Y. Non-constant positive steady state of one resource and two consumers model with diffusion[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008(339): 566-581.

[6] Li B, Wang M X. Non-constant positive steady states of the three-species prey-predator model with siffusion[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2009, 30A(2): 265-280.

[7] Lin C S, Ni W M, Takagi I. Large amplitude stationary solutions to a Chemotaxis systems[J]. Journal of Differential Equations, 1988, 72: 1-27.

[8] Lou Y, Ni W M. Diffusion self-diffusion and cross diffusion [J]. Journal of Differential Equations, 1996, 131: 79-131.

[9] Ye Q X, Li Zh Y. Reaction diffusion equations introduction [M]. Beijing: Science Press, 1994.


## Non-constant Positive Solutions for Three-species Ratio-dependent Predator-Prey System with Diffusion


ZHOU Hong-ling, SHEN Lin

(Department of Mathematics, Huanghuai University, Zhumadian He'nan 463000, China)



**Abstract**: The existence of non-constant positive steady state of three-species ratio-dependent predator-prey system with diffusion is discussed. First, the asymptotically stability of constant positive solution is analyzed and the prior estimate of positive solution by using Harnack inequality and Maximum principle are given. Furthermore, the non-existence of non-constant positive solution by using energy methods is analyzed and a sufficient condition for non-constant positive solution is obtained. In the end, the diffusion coefficient $d_2$ of the species $v$ is treated as bifurcation parameter and a sufficient condition for the existence of non-constant positive solution is given by the degree theory: Assume that $\left(a>d,\ c>m,\ r+\frac{d}{a}+\frac{m}{c}>2\right)$ and $r+\left(\frac{d}{a}\right)^2+\frac{m}{c}<2$ hold, $\widetilde{\mu}\in(\mu_n,\ \mu_{n+1})$ for some $n\geqslant 1$, and the sum $\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\dim E(\mu_i)$ is odd. Then there exists a positive constant $\rho$ such that, if $d_2\geqslant\rho$, the predaor-prey system has at least one non-constant positive solution.



**Key words**: predator-prey; diffusion; ratio-dependent

(责任编辑 游中胜)