DOI:10.11721/cqnuj20130521

关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ *

郭凤明，罗　明
(西南大学 数学与统计学院，重庆 400715)

摘要:主要运用 Pell 方程、递归数列、同余式及(非)平方剩余等一些初等的证明方法,证明了不定方程 $x(x+1)(x+2)\cdot(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解。在证明该结论的过程中,对不定方程进行变形和整理,将其化为 Pell 方程形式。根据得到的 Pell 方程整数解的情况,从而得到 6 类整数解。根据原不定方程的情况舍去了两类,剩余 4 类整数解。本文逐一对每一类整数解用同余式及平方剩余的证明方法进行讨论和证明,最后得到原不定方程无正整数解的结论。根据本文的结论也能得到这个不定方程的全部整数解,它们都为其平凡解,由于比较简单,故文中没有再给出。同时本文证明了不定方程 $(x^2+3x+1)^2-13y^2=-12$ 仅有整数解 $(x,\pm y)=(0,1),(-3,1),(-2,1),(-1,1),(-14,43),(11,43)$。本文进一步完善了此类不定方程的正整数解的研究。

关键词:不定方程;整数解;递归数列

中图分类号:O156　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)05-0101-05

设 p 是素数,形如 $x(x+1)(x+2)(x+3)=py(y+1)(y+2)(y+3)$ 的不定方程已有不少研究工作[1-8]。1971 年,J H E Cohn[1] 证明了当 $p=2$ 时仅有正整数解 $(x,y)=(5,4)$;1991 年,罗明[4] 证明了当 $p=7$ 时仅有正整数解 $(x,y)=(4,2)$;2007 年,程遥、马玉林[6] 证明了当 $p=11$ 时无正整数解。2009 年,段明辉、杨春德[7] 证明了当 $p=19$ 时无正整数解。

在本文中,将证明当 $p=13$ 时,不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)\tag{1}$$

无正整数解。

先将方程(1)化为

$$(x^2+3x+1)^2-13\,(y^2+3y+1)^2=-12\tag{2}$$

易知方程 $x^2-13y^2=-12$ 的全部整数解[9],由以下 6 个类给出。

$$x_n+y_n\sqrt{13}=\pm\left(1+\sqrt{13}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{13}\right)=\pm\left(1+\sqrt{13}\right)\left(649+180\sqrt{13}\right)^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\overline{x}_n+\overline{y}_n\sqrt{13}=\pm\left(-1+\sqrt{13}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{13}\right)=\pm\left(-1+\sqrt{13}\right)\left(649+180\sqrt{13}\right)^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$x'_n+y'_n\sqrt{13}=\pm\left(25+7\sqrt{13}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{10}\right)=\pm\left(25+7\sqrt{10}\right)\left(649+180\sqrt{13}\right)^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\overline{x}'_n+\overline{y}'_n\sqrt{13}=\pm\left(-25+7\sqrt{13}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{13}\right)=\pm\left(-25+7\sqrt{13}\right)\left(649+180\sqrt{13}\right)^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$x''_n+y''_n\sqrt{13}=\pm\left(14+4\sqrt{13}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{13}\right)=\pm\left(14+4\sqrt{13}\right)\left(649+180\sqrt{13}\right)^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\overline{x}''_n+\overline{y}''_n\sqrt{13}=\pm\left(-14+4\sqrt{13}\right)\left(u_n+v_n\sqrt{13}\right)=\pm\left(-14+4\sqrt{13}\right)\left(649+180\sqrt{13}\right)^n,n\in\mathbf{Z}$$

其中 $1+\sqrt{13}$,$25+7\sqrt{13}$,$14+4\sqrt{13}$ 是 $x^2-13y^2=-12$ 的相应结合类的基本解,$649+180\sqrt{13}$ 是 Pell 方程 $u^2-13v^2=1$ 的基本解。由于从(2)式中可知 $2\nmid(x^2+3x+1)$,从而舍去后面两个类。

于是方程(2)的解应满足

$$(2x+3)^2=4x_n+5\tag{3}$$

或

$$(2x+3)^2=4\,\overline{x}_n+5\tag{4}$$

或

$$(2x+3)^2=4x'_n+5\tag{5}$$

* **收稿日期**:2012-11-11　　**修回日期**:2013-04-27　　**网络出版时间**:2013-09-17　17:38

作者简介:郭凤明,女,硕士,研究方向为代数数论;**通讯作者**:罗明,E-mail:luoming1958@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.101_017.html

或
$$(2x+3)^2=4\,\overline{x}_n'+5 \tag{6}$$

显然必满足 $x_n\geqslant -1,\overline{x}_n\geqslant -1,x_n'\geqslant -1,\overline{x}_n'\geqslant -1$。从而(3)～(6)式中的 $x_n,\overline{x}_n,x_n',\overline{x}_n'$ 只需取自

$$x_n+y_n\sqrt{13}=(1+\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=(1+\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,n\geqslant 0$$

$$\overline{x}_n+\overline{y}_n\sqrt{13}=(-1+\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=(-1+\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,n\geqslant 0$$

$$x_n'+y_n'\sqrt{13}=(25+7\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=(25+7\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,n\geqslant 0$$

$$\overline{x}_n'+\overline{y}_n'\sqrt{13}=(-25+7\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=(-25+7\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,n\geqslant 0$$

由这4个式子不难推出下列关系式。

$$x_{n+1}=1\ 298x_n-x_{n-1},x_0=1,x_1=2\ 989 \tag{7}$$

$$\overline{x}_{n+1}=1\ 298\,\overline{x}_n-\overline{x}_{n-1},\overline{x}_0=-1,\overline{x}_1=1\ 691 \tag{8}$$

$$x_{n+1}'=1\ 298x_n'-x_{n-1}',x_0'=25,x_1'=32\ 605 \tag{9}$$

$$\overline{x}_{n+1}'=1\ 298\,\overline{x}_n'-\overline{x}_{n-1}',\overline{x}_0'=-25,\overline{x}_1'=155 \tag{10}$$

$$u_{n+1}=1\ 298u_n-u_{n-1},u_0=1,u_1=649 \tag{11}$$

$$u_{2n}=2u_n^2-1,v_{2n}=2u_nv_n \tag{12}$$

$$x_n=u_n+13v_n,\overline{x}_n=-u_n+13v_n \tag{13}$$

$$u_{n+2h}\equiv -u_n(\bmod u_h),v_{n+2h}\equiv -v_n(\bmod u_h) \tag{14}$$

$$x_{n+2h}\equiv -x_n(\bmod u_h),\overline{x}_{n+2h}\equiv -\overline{x}_n(\bmod u_h) \tag{15}$$

$$x_{n+2h}'\equiv -x_n'(\bmod u_h),\overline{x}_{n+2h}'\equiv -\overline{x}_n'(\bmod u_h) \tag{16}$$

下面将证明(3)式仅当 $n=0$ 时成立,(4)式仅当 $n=0$ 时成立,(5)式不成立,(6)式仅当 $n=1$ 时成立,由此求得方程 $(x^2+3x+1)^2-13y^2=-12$ 的全部整数解,进而求得(1)式的全部正整数解。

1 $(2x+3)^2=4x_n+5$

本节将考察(3)式的解,即 n 取何值时 $4x_n+5$ 为完全平方数。

引理1　设 $2\mid n,n>0$,则 $\left(\dfrac{\pm 52v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=-\left(\dfrac{\pm 5u_n+52v_n}{233}\right)$。

证明　由(11)式知 $2\nmid u_n$,所以有 $u_{2n}\equiv 2u_n^2-1\equiv 1(\bmod 8)$,$\left(\dfrac{-1}{u_{2n}}\right)=1$,$\left(\dfrac{2}{u_{2n}}\right)=1$。又 $u_n\equiv 1(\bmod 4)$,则 $\left(\dfrac{-1}{u_n}\right)=1$。由(13)式,可推知

$$\left(\frac{\pm 52v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 104u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{52v_n\pm 5u_n}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_{2n}}{u_n}\right)\left(\frac{u_{2n}}{52v_n\pm 5u_n}\right)=$$

$$\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{13v_n^2+u_n^2}{52v_n\pm 5u_n}\right)=\left(\frac{3\ 029}{52v_n\pm 5u_n}\right)=\left(\frac{13}{52v_n\pm 5u_n}\right)\left(\frac{233}{52v_n\pm 5u_n}\right)=-\left(\frac{\pm 5u_n+52v_n}{233}\right)$$

证毕

引理2　若(3)式成立,则必须 $n\equiv 0(\bmod 420)$。

证明　用对序列 $\{4x_n+5\}$ 取模的方法证明。

mod 11,排除 $n\equiv 3(\bmod 4)$,此时 $4x_n+5\equiv 6(\bmod 11)$。mod 59,排除 $n\equiv 1(\bmod 4)$,此时 $4x_n+5\equiv 43(\bmod 4)$,剩余 $n\equiv 0,2(\bmod 4)$。即 n 取偶数。上面的 mod 11 是对 $\{4x_n+5\}$ 取的,mod 4 指出所得剩余序列周期为4,“此时”这句话是“排除”的理由,因6为11的平方非剩余。为节省篇幅,后面的证明过程将按这种方式叙述。

mod 211,排除 $n\equiv 1,2,3(\bmod 5)$,此时 $4x_n+5\equiv 145,50,39(\bmod 5)$,剩 $n\equiv 0,4(\bmod 5)$。因为 n 为偶数,所以 $n\equiv 0,4(\bmod 10)$。mod 3 089,排除 $n\equiv 4(\bmod 10)$,此时 $4x_n+5\equiv 591(\bmod 3\ 089)$,剩余 $n\equiv 0(\bmod 10)$。mod 43,排除 $n\equiv 1,5(\bmod 7)$,此时 $4x_n+5\equiv 7,26(\bmod 43)$。mod 35 617,排除 $n\equiv 2,3,4(\bmod 7)$,此时 $4x_n+5\equiv 25\ 494,20\ 195,2\ 641(\bmod 35\ 617)$,剩余 $n\equiv 0,6(\bmod 7)$。因为 n 取偶数,所以剩余 $n\equiv 0,6(\bmod 14)$。mod 29,排除 $n\equiv 6(\bmod 14)$,此时 $4x_n+5\equiv 12(\bmod 29)$,剩余 $n\equiv 0(\bmod 14)$。mod 74 717,排除 $n\equiv 14,28(\bmod 42)$,此时 $4x_n+5\equiv 45\ 147,29\ 576(\bmod 74\ 717)$,剩余 $n\equiv 0(\bmod 42)$。又因为 $n\equiv 0(\bmod 10)$,所以剩余 $n\equiv 0,210(\bmod 420)$。

下面用计算排除 $n\equiv 210(\bmod 420)$。令 $n=420t+210$。若 $2\mid t$,则 $n\equiv 42(\bmod 56)$,若 $2\nmid t$,则 $n\equiv 14(\bmod 56)$。

mod 337,排除 $n\equiv 14,42 \pmod{56}$,此时 $4x_n+5\equiv 270,77 \pmod{337}$,故(3)式不成立。

从而排除 $n\equiv 210 \pmod{420}$,剩余 $n\equiv 0 \pmod{420}$。　　证毕

引理 3　设 $n\equiv 0 \pmod{420}$ 且 $n>0$,则(3)式不成立。

证明　令 $n=2\cdot k\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^t$,$(t\geqslant 1, 2\nmid k)$,对$\{\pm 5u_n+52v_n\}$取模 mod 233 所得的两个剩余序列周期均为 58,而$\{2^t\}$对 mod 58 的剩余序列具有周期 28。对 k 分两种情况讨论。

1) $k\equiv 1 \pmod 4$时,令

$$m=\begin{cases}2^t, t\equiv 0,1,2,3,4,8,9,11,12,13,16,19,21,24,26,27 \pmod{58}\\ 5\cdot 2^t, t\equiv 5,6,7,10,14,15,17,18,22,25 \pmod{58}\\ 3\cdot 7\cdot 2^t, t\equiv 20,23 \pmod{58}\end{cases}$$

则有表 1(其中第一行表示 $t(\geqslant 1) \pmod{28}$,第二行表示 $m \pmod{58}$,第三行表示 $5u_m+52v_m \pmod{233}$)。

表 1　$k\equiv 1$(mod 4)**情况下的数据**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
30	2	4	8	16	44	30	2	24	48	16	18	36	14	24	48	54	18	36	26	48	46	54	36	20	26	22	44
210	25	169	92	8	161	210	25	132	167	8	50	91	15	132	167	162	50	91	224	167	173	162	91	107	224	33	161

对表中所有 m,均有$\left(\frac{5u_m+52v_m}{233}\right)=1$。于是,由(14)、(15)式及引理 1,有 $4x_n+5\equiv 4x_{2m}+5\equiv 52v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$得$\left(\frac{4x_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{52v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{5u_m+52v_m}{233}\right)=-1$。

从而 $4x_n+5$ 非平方数,故(3)式不成立。

2) $k\equiv -1 \pmod 4$时,令

$$m=\begin{cases}2^t, t\equiv 2,5,7,10,12,13,14,15,16,17,18,22,23,25,26,27 \pmod{58}\\ 5\cdot 2^t, t\equiv 0,1,3,4,8,11,19,20,21,24 \pmod{58}\\ 3\cdot 7\cdot 2^t, t\equiv 6,9 \pmod{58}\end{cases}$$

则有表 2(其中第一行表示 $t(\geqslant 1) \pmod{28}$,第二行表示 $m \pmod{58}$,第三行表示$-5u_m+52v_m \pmod{233}$)。

表 2　$k\equiv 1$(mod 4)**情况下的数据**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
34	10	4	40	22	32	10	12	4	22	38	32	36	14	28	56	54	50	42	14	28	56	34	10	42	40	22	44
101	66	71	183	142	9	66	60	71	142	126	9	200	72	23	208	64	141	225	72	23	208	101	66	225	183	142	218

对表中所有 m,均有$\left(\frac{-5u_m+52v_m}{233}\right)=1$。于是,由(17)、(18)式及引理 1,有

$$4x_n+5\equiv -4x_{2m}+5\equiv -52v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$$

得

$$\left(\frac{4x_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-52v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{-5u_m+52v_m}{233}\right)=-1$$

从而 $4x_n+5$ 非平方数,故(3)式不成立。　　证毕

2　$(2x+3)^2=4\bar{x}_n+5$

引理 4　若(4)式成立,则必须 $n\equiv 0 \pmod{420}$。

证明　仿引理 2 的方法证明。

1) mod 11,排除 $n\equiv 3 \pmod 4$,此时 $4\bar{x}_n+5\equiv 6 \pmod{11}$。mod 59,排除 $n\equiv 1 \pmod 4$,此时 $4\bar{x}_n+5\equiv 43 \pmod{59}$,剩余 $n\equiv 0,2 \pmod 4$。即 n 为偶数。mod 3 089,排除 $n\equiv 2,6,8 \pmod{10}$,此时 $4\bar{x}_n+5\equiv 743,2\ 508,257 \pmod{3\ 089}$,剩余 $n\equiv 0,4 \pmod{10}$。mod 89,排除 $n\equiv 4,14,20 \pmod{30}$,此时 $4\bar{x}_n+5\equiv 48,35,24 \pmod{89}$。mod 181,排除 $n\equiv 24 \pmod{30}$,此时 $4\bar{x}_n+5\equiv 18 \pmod{181}$,剩余 $n\equiv 0,10 \pmod{30}$。

2) mod 43,排除 $n\equiv 1,2,3,6 \pmod 7$,此时 $4\bar{x}_n+5\equiv 18,27,39,3 \pmod{43}$。mod 1 429,排除 $n\equiv 4,5 \pmod 7$,

此时 $4\,\overline{x}_n+5\equiv 338,61(\mathrm{mod}\ 1\ 429)$,剩余 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$。因为 n 为偶数,所以 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 14)$。

由1)和2)知 $n\equiv 0,70,210,280(\mathrm{mod}\ 420)$。mod 1 259,排除 $n\equiv 70(\mathrm{mod}\ 420)$,此时 $4\,\overline{x}_n+5\equiv 690(\mathrm{mod}\ 1\ 259)$,剩余 $n\equiv 0,210,280(\mathrm{mod}\ 420)$。mod 127,排除 $n\equiv 7(\mathrm{mod}\ 21)$,此时 $4\,\overline{x}_n+5\equiv 119(\mathrm{mod}\ 127)$,从而排除 $n\equiv 280(\mathrm{mod}\ 420)$剩余 $n\equiv 0,210(\mathrm{mod}\ 420)$。

下面用计算排除 $n\equiv 210(\mathrm{mod}\ 420)$。令 $n=420t+210$。若 $2\mid t$,则 $n\equiv 42(\mathrm{mod}\ 56)$,若 $2\nmid t$,则 $n\equiv 14(\mathrm{mod}\ 56)$。mod 337,排除 $n\equiv 14,42(\mathrm{mod}\ 56)$,此时 $4x_n+5\equiv 270,77(\mathrm{mod}\ 337)$,故(3)式不成立。

从而排除 $n\equiv 210(\mathrm{mod}\ 420)$,剩余 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 420)$。 证毕

引理 5 设 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 420)$,$n>0$,则(4)式不成立。

此引理证明过程与引理3的一致,这里不再证明。

3 $(2x+3)^2=4x'_n+5$

引理 6 对任意 $n\geqslant 0$,(5)式都不成立。

证明 当 $n>0$ 时,mod 433,排除 $n\equiv 1,2(\mathrm{mod}\ 3)$,此时 $4x'_n+5\equiv 92,251(\mathrm{mod}\ 433)$,剩余 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$。mod 1 297,排除 $n\equiv 0,3(\mathrm{mod}\ 6)$,此时 $4x'_n+5\equiv 105,1\ 202(\mathrm{mod}\ 1\ 297)$。即对任意 $n>0$,$4x'_n+5$ 都是非平方数。当 $n=0$ 时,$4x'_0+5=125$ 非平方数,从而(5)式。 证毕

4 $(2x+3)^2=4\,\overline{x}'_n+5$

引理 7 若(6)式成立,则必须 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 20)$。

证明 mod 61,排除 $n\equiv 2,3(\mathrm{mod}\ 5)$,此时 $4x'_n+5\equiv 31,10(\mathrm{mod}\ 61)$,剩余 $n\equiv 0,1,4(\mathrm{mod}\ 5)$,mod 109,排除 $n\equiv 0,6,9(\mathrm{mod}\ 10)$,此时 $4x'_n+5\equiv 14,39,58(\mathrm{mod}\ 109)$。mod 3 089,排除 $n\equiv 5(\mathrm{mod}\ 10)$,此时 $4x'_n+5\equiv 105(\mathrm{mod}\ 3\ 089)$,剩余 $n\equiv 1,4(\mathrm{mod}\ 10)$。mod 19,排除 $n\equiv 10,11(\mathrm{mod}\ 20)$,此时 $4x'_n+5\equiv 10,12(\mathrm{mod}\ 19)$。mod 739,排除 $n\equiv 14(\mathrm{mod}\ 20)$,此时 $4x'_n+5\equiv 61(\mathrm{mod}\ 739)$。mod 5 281,排除 $n\equiv 4(\mathrm{mod}\ 20)$,此时 $4x'_n+5\equiv 1\ 683(\mathrm{mod}\ 5\ 281)$,剩余 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 20)$。 证毕

引理 8 设 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 20)$,$n>1$,则(6)式不成立。

证明 当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 20)$时,令 $n=1+2\cdot k\cdot 5\cdot 2^t(t\geqslant 1,2\nmid k)$。对$\{u_m\}$取 mod 41,剩余序列周期为14,而对$\{2^t\}$取 mod 14 的剩余序列周期为3。

当 $t\equiv 0,1(\mathrm{mod}\ 3)$时,令 $m=2^t$;当 $t\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$时,令 $m=5\cdot 2^t$,则当 $t(\mathrm{mod}\ 3)\equiv 0,1,2$ 时,$m(\mathrm{mod}\ 14)\equiv 8,2,6$,有$\{u_m\}(\mathrm{mod}\ 41)\equiv 7,15,7$。此时对所有 m 均有$\left(\dfrac{u_m}{41}\right)=-1$。

又由(16)式,有 $4\,\overline{x}'_n+5\equiv -4\,\overline{x}'_1+5\equiv -615(\mathrm{mod}\ u_m)$。因 $2\mid m$,则$\left(\dfrac{-1}{u_m}\right)=1$,$\left(\dfrac{3}{u_m}\right)=1$。有$\left(\dfrac{4\,\overline{x}_n+5}{u_m}\right)=\left(\dfrac{-615}{u_m}\right)=\left(\dfrac{41}{u_m}\right)=\left(\dfrac{u_m}{41}\right)=-1$。从而$\left(\dfrac{4\,\overline{x}_n+5}{u_m}\right)=-1$,故(6)式不成立。

5 结果

根据前两节的讨论,现给出本文的主要结果。

定理 1 不定方程
$$(x^2+3x+1)^2-13y^2=-12 \tag{17}$$
的全部整数解是$(x,\pm y)=(0,1),(-3,1),(-2,1),(-1,1),(-14,43),(11,43)$。

证明 由引理2及引理3知,要(3)式成立,则必须 $n=0$,此时 $x=0,-3$。这就给出了(17)式的前两组解。

由引理4及引理5知,要(4)式成立,则必须 $n=0$,此时 $x=-1,-2$。这就给出了(17)式的中间两组解。

由引理7及引理8知,要(6)式成立,则必须 $n=1$,此时 $x=-14,11$。这就给出了(17)式的后两组解。 证毕

推论 1 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解。

证明 要让(1)式有正整数解,则由(2)式及定理1知,应有 $y^2+3y+1=\pm 43$。但这两个方程都无正整数解。从而方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解。 证毕

参考文献：

[1] Cohn J H E. The diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. Pacific J Math, 1971, 37: 331-240.

[2] Ponnudurai T. The diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=3y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. J London Math Soc, 1975, 10: 232-240.

[3] 宣体佐. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 北京师范大学学报：自然科学版，1982(2)：27-34.

Xuan T Z. On the diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. Journal of Beijing Normal University: Natural Science, 1982(2): 27-34.

[4] 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 重庆师范学院学报：自然科学版，1991，8(1)：1-8.

Luo M. On The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science Edition, 1991, 8(1): 1-8.

[5] Luo M. On The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. Indian J Pure Appl Math, 2001(1): 3-7.

[6] 程遥，马玉林. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2007，7(1)：27-30.

Cheng Y, Ma Y L. On ehe diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science Edition, 2007, 7(1): 27-30.

[7] 段辉明，杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2009，1(1)：60-63.

Duan H M, Yang C D. On the diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2009, 1(1): 60-63.

[8] 罗明，朱德辉，马芙蓉. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2009，10(5)：16-21.

Luo M, Zhu D H, Ma F R. On the diophantine equation $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science, 2001, 10(5:) 16-21.

[9] 柯召，孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海：哈尔滨工业大学出版社，1980.

Ke Z, Sun Q. About indeterminate equation[M]. Shanghai: Harbin Institute of Technology Press, 1980.

On the Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$

GUO Feng-ming, LUO Ming

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper, with the elementary method of recurrence sequence, congruent form and quadratic residue, the author has shown that the Diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ has no positive integer solution. In the process of proving this conclusion, the authors change the Diophantine equation to a form of Pell-equation. According to the integer solution of the Pell-equation, we get six classes of integer solution. Because of the Diophantine equation, we get four classes of integer solution. Then, elementary method of congruent form and quadratic residue are used to research them. After that, we argue that the Diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$ has no positive integer solution. Besides, we can easily find all integer solution of this Diophantine equation, which are trivial solutions. Elementary theory of numbers is used through all the process of proving. Also, the total integer solutions of Diophantine equation $(x^2+3x+1)^2-13y^2=-12$ are $(x, \pm y)=(0,1),(-3,1),(-2,1),(-1,1),(-14,43),(11,43)$ has been proved. In a word, the positive integer solution of such Diophantine equation research becomes more perfective through our work.

Key words: diophantine equation; integer solution; recurrence sequence

(责任编辑　游中胜)