DOI:10.11721/cqnuj20130522

半导体器件模型热平衡解的存在性*

董建伟, 程少华
(郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015)

摘要:研究半导体器件中一维双极量子流体动力学模型的热平衡状态 $(n_e^\alpha)_x-\delta^2 n_e\left(\frac{(\sqrt{n_e})_{xx}}{\sqrt{n_e}}\right)_x=n_eV_x$, $(n_i^\beta)-\delta^2 n_i\left(\frac{(\sqrt{n_i})_{xx}}{\sqrt{n_i}}\right)_x=-n_iV_x$, $V_{xx}=n_e-n_i-C(x)$ in $(0,1)$。利用指数变换法把该模型转化为一个耦合的四阶椭圆方程组,然后利用 Leray-Schauder 不动点定理证明了转化后的方程组弱解的存在性。

关键词:量子流体动力学模型;热平衡解;存在性
中图分类号:O175 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2013)05-0106-04

1 引言和主要结果

量子流体动力学模型是描述半导体器件中载流子运动规律的一种宏观模型,它分为单极模型(载流子为电子)和双极模型(载流子为电子和空穴),双极量子流体动力学模型的形式为[1]

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\operatorname{div} j_e=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial j_e}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{j_e\otimes j_e}{n_e}\right)+\nabla P_e(n_e)-\delta^2 n_e\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}}\right)=n_e\nabla V-\frac{j_e}{\tau_e} \tag{2}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\operatorname{div} j_i=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{j_i\otimes j_i}{n_i}\right)+\nabla P_i(n_i)-\delta^2 n_i\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{n_i}}{\sqrt{n_i}}\right)=-n_i\nabla V-\frac{j_i}{\tau_i} \tag{4}$$

$$\lambda^2\Delta V=n_e-n_i-C(x) \tag{5}$$

其中电子浓度 n_e、空穴浓度 n_i、电子电流密度 j_e、空穴电流密度 j_i 和电位势 V 为未知函数,规模普朗克常数 $\delta>0$、规模德拜长度 $\lambda>0$、电子动量松弛时间 $\tau_e>0$ 和空穴动量松弛时间 $\tau_i>0$ 是物理参数,$C(x)$表示带电粒子杂质,函数 $P_e(n_e)=n_e{}^\alpha$, $\alpha\geqslant1$, $P_i(n_i)=n_i{}^\beta$, $\beta\geqslant1$ 分别表示电子压力函数和空穴压力函数。文献[1]通过积分把(1)~(5)式的稳态模型转化成了一个二阶椭圆方程组,然后证明了其弱解的存在性和唯一性,并得到了动量松弛时间极限和半古典极限结果。文献[2]在三维全空间中得到了(1)~(5)式热平衡解的唯一存在性,并得到了动量松弛时间极限和半古典极限结果。文献[3]证明了(1)~(5)式瞬态解的唯一存在性,并得到了动量松弛时间极限和半古典极限结果。文献[4]研究了(1)~(5)式解的代数衰减性。关于不带量子项的经典双极量子流体动力学模型方面的近来研究情况,请参看文献[5,6]。

在热平衡状态下,$j_e=j_i=0$,本文在一维有界区域(0,1)上研究(1)~(5)式热平衡状态的混合边值问题

$$(n_e^\alpha)_x-\delta^2 n_e\left(\frac{(\sqrt{n_e})_{xx}}{\sqrt{n_e}}\right)_x=n_eV_x \tag{6}$$

* **收稿日期:**2012-12-02 **网络出版时间:**2013-09-17 17:38
资助项目:河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(No. 2006110016);河南省教育厅科学技术研究重点项目(No. 12A110024)
作者简介:董建伟,男,讲师,硕士,研究方向为偏微分方程,E-mail:dongjianweiccm@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.106_018.html

$$(n_i^{\beta})-\delta^2 n_i\left(\frac{(\sqrt{n_i})_{xx}}{\sqrt{n_i}}\right)_x=-n_i V_x \tag{7}$$

$$V_{xx}=n_e-n_i-C(x)\quad \text{in } (0,1) \tag{8}$$

$$n_e(0)=n_e(1)=1,\quad n_{e,x}(0)=n_{e,x}(1)=0 \tag{9}$$

$$n_i(0)=n_i(1)=1,\quad n_{i,x}(0)=n_{i,x}(1)=0 \tag{10}$$

这里为了方便,假定了 $\lambda=1$。与文献[2]不同,这里把(6)～(8)式转化为四阶椭圆方程组。为此,(6)式两边同除以 n_e 并关于 x 求导,再利用(8)式,得

$$-\delta^2\left(\frac{(\sqrt{n_e})_{xx}}{\sqrt{n_e}}\right)_{xx}+\left(\frac{(n_e^{\alpha})_x}{n_e}\right)_x=n_e-n_i-C(x) \tag{11}$$

同理,(7)式两边同除以 n_i 并关于 x 求导,再利用(8)式,得

$$-\delta^2\left(\frac{(\sqrt{n_i})_{xx}}{\sqrt{n_i}}\right)_{xx}+\left(\frac{(n_i^{\beta})_x}{n_i}\right)_x=-n_e+n_i+C(x) \tag{12}$$

令 $n_e=e^u$,$n_i=e^v$,则(11),(12),(9),(10)式变为

$$-\frac{\delta^2}{2}\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)_{xx}+(\alpha e^{(\alpha-1)u}u_x)_x=e^u-e^v-C(x) \tag{13}$$

$$-\frac{\delta^2}{2}\left(v_{xx}+\frac{v_x^2}{2}\right)_{xx}+(\beta e^{(\beta-1)v}v_x)_x=-e^u+e^v+C(x) \tag{14}$$

$$u(0)=u(1)=0,u_x(0)=u_x(1)=0 \tag{15}$$

$$v(0)=v(1)=0,v_x(0)=v_x(1)=0 \tag{16}$$

定义 1　称 $(u,v)\in H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$ 为问题(13)～(16)式的一个弱解,若对所有的 $\psi\in H_0^2(0,1)$,成立

$$-\frac{\delta^2}{2}\int_0^1\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)\psi_{xx}\,dx-\int_0^1\alpha e^{(\alpha-1)u}u_x\psi_x\,dx=\int_0^1(e^u-e^v-C(x))\psi dx \tag{17}$$

$$-\frac{\delta^2}{2}\int_0^1\left(v_{xx}+\frac{v_x^2}{2}\right)\psi_{xx}\,dx-\int_0^1\beta e^{(\beta-1)v}v_x\psi_x\,dx=-\int_0^1(e^u-e^v-C(x))\psi dx \tag{18}$$

本文的主要结果是:

定理 1　设 $C(x)\in L^2(0,1)$,$\alpha,\beta\geqslant 1$,满足

$$\alpha e^{(1-\alpha)M_1},\ \beta e^{(1-\beta)M_2}>\frac{1}{2} \tag{19}$$

其中 M_1,M_2 分别是

$$\frac{\|C(x)\|_{L^2(0,1)}}{\sqrt{\alpha e^{(1-\alpha)M_1}-\dfrac{1}{2}}}=M_1 \tag{20}$$

和

$$\frac{\|C(x)\|_{L^2(0,1)}}{\sqrt{\beta e^{(1-\beta)M_2}-\dfrac{1}{2}}}=M_2 \tag{21}$$

的解,则问题(13)～(16)存在弱解 $(u,v)\in H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$,且 $\|u\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M_1$,$\|v\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M_2$。

注 1　本文中的规模普朗克常数 δ 和规模德拜长度 λ 的表达式为[7]

$$\delta^2=\frac{h^2}{2mk_BT_0L^2},\ \lambda^2=\frac{\lambda_0k_BT_0}{Nq^2L^2}$$

这里的物理参数分别为约化普朗克常数 h,波兹曼常数 k_B,周围介质温度 T_0,电子质量 m,特征器件长度 L,介电常数 λ_0,特征器件浓度 N 和基本电荷 q。

2 结果的证明

为了证明定理 1,考虑(13)～(14)式的截断问题

$$-\frac{\delta^2}{2}\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)_{xx}+(\alpha e^{(\alpha-1)u_{M_1}}u_x)_x=e^u-e^v-C(x) \tag{22}$$

$$-\frac{\delta^2}{2}\left(v_{xx}+\frac{v_x^2}{2}\right)_{xx}+(\beta\mathrm{e}^{(\beta-1)v_{M_2}}v_x)_x=-\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^v+C(x) \tag{23}$$

其中 M_1,M_2 如(20),(21)式所定义

$$u_{M_1}=\min\{M_1,\max\{-M_1,u\}\},v_{M_2}=\min\{M_2,\max\{-M_2,v\}\}$$

有如下引理：

引理1　设定理1中的条件成立,$(u,v)\in H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$是问题(22),(23),(15),(16)的一个弱解,则

$$\frac{\delta^2}{2}\|u_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}+\frac{\delta^2}{2}\|v_{xx}\|^2_{L^2(0,1)}+\left(\alpha\mathrm{e}^{(1-\alpha)M_1}-\frac{1}{2}\right)\|u_x\|^2_{L^2(0,1)}+\left(\beta\mathrm{e}^{(1-\beta)M_2}-\frac{1}{2}\right)\|v_x\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant \|C(x)\|^2_{L^2(0,1)} \tag{24}$$

且 $\|u\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M_1$, $\|v\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M_2$。

证明　用 $\psi=u$ 作为(22)式的试验函数,得

$$\frac{\delta^2}{2}\int_0^1\left(u_{xx}^2+\frac{1}{2}u_x^2u_{xx}\right)\mathrm{d}x+\alpha\int_0^1\mathrm{e}^{(\alpha-1)u_{M_1}}u_x^2\mathrm{d}x=-\int_0^1(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v-C(x))u\mathrm{d}x \tag{25}$$

由边界条件(15)式知

$$\frac{\delta^2}{4}\int_0^1u_x^2u_{xx}\mathrm{d}x=\frac{\delta^2}{12}\int_0^1(u_x^3)_x\mathrm{d}x=\frac{\delta^2}{12}(u_x^3(1)-u_x^3(0))=0 \tag{26}$$

而

$$\alpha\int_0^1\mathrm{e}^{(\alpha-1)u_{M_1}}u_x^2\mathrm{d}x\geqslant\alpha\mathrm{e}^{(1-\alpha)M_1}\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x \tag{27}$$

所以由(25)～(27)式,得

$$\frac{\delta^2}{2}\int_0^1u_{xx}^2\mathrm{d}x+\alpha\mathrm{e}^{(1-\alpha)M_1}\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x\leqslant-\int_0^1(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v-C(x))u\mathrm{d}x \tag{28}$$

同理,用 $\psi=v$ 作为(23)式的试验函数,并进行如上估计可得

$$\frac{\delta^2}{2}\int_0^1v_{xx}^2\mathrm{d}x+\beta\mathrm{e}^{(1-\beta)M_2}\int_0^1v_x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v-C(x))v\mathrm{d}x \tag{29}$$

由(28)与(29)式两边分别相加,并利用 Young 不等式和 Poincare 不等式,得

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^2}{2}\int_0^1u_{xx}^2\mathrm{d}x+\frac{\delta^2}{2}\int_0^1v_{xx}^2\mathrm{d}x+\alpha\mathrm{e}^{(1-\alpha)M_1}\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x+\beta\mathrm{e}^{(1-\beta)M_2}\int_0^1v_x^2\mathrm{d}x\leqslant\\&-\int_0^1(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v)(u-v)\mathrm{d}x+\int_0^1C(x)(u-v)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1C(x)(u-v)\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{2}\int_0^1u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1v^2\mathrm{d}x+\int_0^1C(x)^2\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{2}\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1v_x^2\mathrm{d}x+\int_0^1C(x)^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{30}$$

由此可知(24)式成立。由 Poincare-Sobolev 不等式及(24)式,得

$$\|u\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant\|u_x\|_{L^2(0,1)}\leqslant\frac{\|C(x)\|_{L^2(0,1)}}{\sqrt{\alpha\mathrm{e}^{(1-\alpha)M_1}-\frac{1}{2}}}$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant\|v_x\|_{L^2(0,1)}\leqslant\frac{\|C(x)\|_{L^2(0,1)}}{\sqrt{\beta\mathrm{e}^{(1-\beta)M_2}-\frac{1}{2}}}$$

令 M_1,M_2 分别为(20)和(21)式的解,则 $\|u\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M_1$, $\|v\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M_2$。　　证毕

证明　对于给定 $(\rho,\eta)\in W_0^{1,4}(0,1)\times W_0^{1,4}(0,1)$ 及试验函数 $\psi\in H_0^2(0,1)$,考虑如下线性问题

$$-\frac{\delta^2}{2}\int_0^1u_{xx}\psi_{xx}\mathrm{d}x-\frac{\sigma\delta^2}{4}\int_0^1\rho_x^2\psi_{xx}\mathrm{d}x-\int_0^1\alpha\mathrm{e}^{(\alpha-1)\rho}\rho\mathrm{d}x=\sigma\int_0^1(\mathrm{e}^\rho-\mathrm{e}^\eta-C(x))\psi\mathrm{d}x \tag{31}$$

$$-\frac{\delta^2}{2}\int_0^1v_{xx}\psi_{xx}\mathrm{d}x-\frac{\sigma\delta^2}{4}\int_0^1\eta_x^2\psi_{xx}\mathrm{d}x-\int_0^1\beta\mathrm{e}^{(\beta-1)\eta}\eta\mathrm{d}x=-\sigma\int_0^1(\mathrm{e}^\rho-\mathrm{e}^\eta-C(x))\psi\mathrm{d}x \tag{32}$$

这里 $\sigma\in[0,1]$。定义双线性形式

$$a(u,\psi)=\frac{\delta^2}{2}\int_0^1 u_{xx}\psi_{xx}\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

和线性泛函

$$F(\psi)=-\frac{\sigma\delta^2}{4}\int_0^1 \rho_x^2\psi_{xx}\,\mathrm{d}x-\sigma\int_0^1(\mathrm{e}^{\rho}-\mathrm{e}^{\eta}-C(x))\psi\mathrm{d}x-\int_0^1\alpha\mathrm{e}^{(\alpha-1)\rho}\rho\mathrm{d}x \tag{34}$$

因为双线性形式 $a(u,\psi)$ 在 $H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$ 上是连续且强制的,且线性泛函 $F(\psi)$ 在 $H_0^2(0,1)$ 上连续,所以由 Lax-Milgram 定理知问题(31)存在解 $u\in H_0^2(0,1)$。同理,问题(32)也存在解 $v\in H_0^2(0,1)$。从而算子

$$S:W_0^{1,4}(0,1)\times W_0^{1,4}(0,1)\times[0,1]\to W_0^{1,4}(0,1)\times W_0^{1,4}(0,1),\quad (\rho,\eta,\sigma)\mapsto(u,v)$$

是有定义的。此外,因为 $H_0^2(0,1)\subset W_0^{1,4}(0,1)$ 是紧嵌入,所以 S 是连续且紧的。另外,$S(\rho,\eta,0)=(0,0)$。与引理 1 的证明类似,可以证明对所有满足 $S(\rho,\eta,\sigma)=(u,v)$ 的 $(u,v,\sigma)\in W_0^{1,4}(0,1)\times W_0^{1,4}(0,1)\times[0,1]$ 都有 $\|u\|_{H_0^2(0,1)}$,$\|v\|_{H_0^2(0,1)}\leqslant C$,这里 C 为常数。从而由 Leray-Schauder 不动点定理知 $S(u,v,1)=(u,v)$ 存在不动点 $(u,v)\in H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$。此不动点就是问题(22),(23),(15),(16)的一个解,事实上它也是问题(13)~(16)的一个解,这是因为 $\|u\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M_1$,$\|v\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M_2$。 证毕

参考文献:

[1] Liang B, Zhang K J. Steady-state solutions and asymptotic limits on the multi-dimensional semiconductor quantum hydrodynamic model[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2007, 17(2): 253-275.

[2] Zhang G J, Zhang K J. On the bipolar multi-dimensional quantum Euler-Poisson system: The thermal equilibrium solution and semiclassical limit[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 2218-2229.

[3] Zhang G J, Li H L, Zhang K J. Semiclassical and relaxation limits of bipolar quantum hydrodynamic model for semiconductors[J]. Journal of Differential Equatios, 2008, 245: 1433-1453.

[4] Li H L, Zhang G J, Zhang K J. Algebraic time decay for the bipolar quantum hydrodynamic model[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2008, 18(6): 859-881.

[5] Zhou F, Li Y P. Existence and some limits of stationary solutions to a one-dimensional bipolar Euler-Poisson system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 351: 480-490.

[6] Naoki T. Existence and uniqueness of stationary solutions to a one-dimensional bipolar hydrodynamic model for semiconductors[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73: 779-787.

[7] Hsiao L, Li H L. The well-posedness and asymptotics of multi-dimensional quantum hydrodynamics[J]. Acta Mathematica Scientia, 2009, 29B(3): 552-568.

Existence of Thermal Equilibrium Solutions to a 1-d Semiconductor Device Model

DONG Jian-wei, CHENG Shao-hua

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: The thermal equilibrium state of 1-d bipolar quantum hydrodynamic model for semiconductor devices is studied, i. e. the following model system is considered: $(n_e^\alpha)_x-\delta^2 n_e\left(\frac{(\sqrt{n_e})_{xx}}{\sqrt{n_e}}\right)_x=n_eV_x$, $(n_i^\beta)-\delta^2 n_i\left(\frac{(\sqrt{n_i})_{xx}}{\sqrt{n_i}}\right)_x=-n_iV_x$, $V_{xx}=n_e-n_i-C(x)$ in $(0,1)$. The model is reformulated as a coupled fourth-order elliptic system by using an exponential variable transformation. Then the existence of weak solutions to the reformulated system is proved by using the Leray-Schauder fixed-point theorem.

Key words: quantum hydrodynamic model; thermal equilibrium solutions; existence

(责任编辑 欧红叶)