运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130603

正则图的最大-团横贯数与减最大-团横贯数*

汪定国[1]，单而芳[2]
(1. 重庆师范大学 数学学院，重庆 400047；2. 上海大学 管理学院，上海 200444)

摘要:本文首先得到了阶数为 n、团数为 k 的连通 k-正则图的最大-团横贯数的上界 n/k 以及 n 阶连通无爪 3-正则图的最大-团横贯数的下界 $n/4$,并对达到这些界的极值图进行了刻画。然后对阶数为 n、团数为 $\omega(G)$ 的任意图 G 的减最大-团横贯数给出了一个紧的下界 $1+\omega(G)-n$,同时对阶数为 n、团数为 k 的连通 k-正则图的减最大-团横贯数呈现了一个上界 n/k,并刻画了达到这个上界的极值图。

关键词:正则图;无爪;最大-团横贯数;减最大-团横贯数
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)06-0013-04

本文所考虑的图都是非空、有限的简单图。对于一个顶点集为 V、边集为 E 的图 $G=(V,E)$,$\forall v\in V$,v 的开邻域 $N(v)$ 定义为与 v 相邻的顶点集合,即 $N(v)=\{u|uv\in E\}$;v 的闭邻域为 $N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$;与顶点 v 相邻的顶点数目称为 v 的度,记为 $d_G(v)$或简单的记为 $d(v)$,即 $d(v)=|N_G(v)|$。如果对 $\forall v\in V(G)$,$d_G(v)=k$,则称图 G 为 k-正则图。$\forall S\subseteq V(G)$,G 的由 S 导出的子图记为 $G[S]$。一般地,用 K_n 和 C_n 分别表示 n 个顶点的完全图和圈,而用 $K_{m,n}$ 表示二分集的基数分别为 m 和 n 的完全二部图。同时,图 K_3 又叫做三角形,图 $K_{1,3}$ 又叫做爪。给定图 F,如果图 G 不包含 F 作为导出子图,则称 G 是无 F 的。特别地,如果图 G 不包含 $K_{1,3}$ 作为导出子图,则称 G 是无爪的。图 $K_{k+1}-e$ 表示在 $k+1$ 阶完全图 K_{k+1} 中删除边 e 而得到的图。特别地,K_4-e 又称为钻石。

若图 G 的一个至少有 2 个顶点的子图 C 在包含的意义下是一个极大完全子图,则称 C 为图 G 的一个团,图 G 中阶数为 m 的团叫做 G 的一个 m-团,而 G 中最大团的顶点数称为 G 的团数,记为 $\omega(G)$。设 G 是一个无孤立点的图,$D\subseteq V(G)$,若对图 G 的任意一个团 C,都有 $D\cap V(C)\neq\varnothing$,则称 D 是 G 的一个团横贯集。G 的元素个数最少的一个团横贯集称为 G 的最小团横贯集,G 的最小团横贯集的顶点数称为 G 的团横贯数,记为 $\tau_C(G)$。图 G 中与图 G 的每个最大团都相交的顶点子集称为 G 的最大-团横贯集,图 G 的包含顶点数最少的最大-团横贯集的顶点个数称为图 G 的最大-团横贯数,记为 $\tau_M(G)$。一个函数 $f:V(G)\to\{-1,0,+1\}$ 称为图 G 的一个减最大-团横贯函数,如果对于图 G 的任意一个最大团 Q,$\sum\limits_{v\in V(Q)}f(v)\geqslant 1$。为了方便,对任意的 $S\subseteq V$,记 $f(S)=\sum\limits_{v\in S}f(v)$。函数 f 的权定义为 $W(f)=\sum\limits_{v\in V}f(v)$,即 $W(f)=f(V)$。图 G 中权最小的减最大-团横贯函数的权称为 G 的减最大-团横贯数,记为 $\tau_M^-(G)$。其它没有定义的术语和符号请参考文献[1]。

对于图的团横贯集问题已经有了广泛的研究,请参考文献[2-10]或者其它相关文献。在 2001 年,Chang 等[11]介绍了一个在通讯网络中有着重要应用的概念—最大-团横贯集。文献[11]中主要研究了对于一个给定的图,寻找具有最小基数的最大-团横贯集的算法方面的问题,其中包括平面图、k-树、强弦图、比较图、距离遗传图等。随后,在 2010 年,Lee[12]又介绍了符号最大-团横贯集、减最大-团横贯集与最大-团完美的等概念以及最大-团横贯集问题的一些变形参数的概念,诸如$\{k\}$-最大-团横贯、k 倍最大-团横贯等等。同时,作者证明了平衡图、强弦图与距离遗传图等是最大-团完美的,而且还给出了一些特殊图类的相应地最大-团横贯参数的算法复杂性的结果。Wang 等[13]研究了一些特殊正则图的符号最大-团横贯数的界与极值图的刻画。

关于图的最大-团横贯问题的研究还处于起步阶段,相应的结果也不多。本文讨论一些特殊正则图的最大-团横贯数与减最大-团横贯数的界及达到相应界的极值图的刻画。

* **收稿日期**:2013-03-03　　**修回日期**:2013-04-25　　**网络出版时间**:2013-11-20　14:46
资助项目:重庆师范大学青年基金(No. 2011XLQ29);重庆市科委自然科学基金(No. CSTC2011JJA00020)
作者简介:汪定国,男,讲师,博士研究生,研究方向为图论与组合最优化,E-mail: wangdg2955@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.13_030.html

1 正则图的最大-团横贯数

本节首先对团数为 k 的 k-正则图的最大-团横贯数给出一个上界，并对达到这个上界的极值图进行刻画，然后再对无爪 3-正则图的最大-团横贯数呈现一个下界并刻画达到下界的极值图。

如果一个 k-正则图 G 不连通，可以考虑其连通分支，从而只需要讨论 G 连通的情况。另外，若无特别说明，本文假设 $k\geqslant 3$。

对任意的图 G，如果 G 没有三角形，则 G 的所有团都是 2-团，于是由 $\tau_C(G)$ 与 $\tau_M(G)$ 的定义，容易得如下命题。

命题 1　如果 G 是一个阶数为 n 的无三角形的图，则 $\tau_C(G)=\tau_M(G)$。

同时，根据最大-团横贯数的定义还可以得到下面的结果。

命题 2　对于一个团数为 k 的 k-正则图 G，若 $k\geqslant 2$，则 $\tau_M(G)\geqslant 1$。并且这个界是紧的。

证明　事实上，G 中至少有一个阶数为 $k(k\geqslant 2)$ 的最大团，于是 $\tau_M(G)\geqslant 1$。当 G 中只有一个最大团时，等号成立。　　证毕

为了讨论团数为 k 的 k-正则图的最大-团横贯数的上界，下面首先介绍 2 个必要的引理。

引理 1　设 G 是一个阶数为 n 的连通 k-正则图，若 k 是一个奇数，则 n 必是偶数。

证明　若 n 是奇数，则 G 的所有顶点的度数和 kn 为奇数，这与任意图中所有顶点的度数和为偶数矛盾。　证毕

引理 2[13]　如果 G 是一个连通 k-正则图，$\omega(G)=k$，那么 G 的任意 2 个不同的最大团或者是顶点不相交的，或者它们的并的导出子图是 $K_{k+1}-e$。

如果图 G 的一个最大团 Q 的顶点集与其余最大团的顶点集不相交，则称 Q 是独立的。

为了刻画达到上界的极值图，构造一个连通 k-正则图的集合 F 如下。

构造 1　对于一个整数 $m\geqslant 2$(若 k 是奇数，则 m 是偶数)，令 $F_{k,m}$ 表示 m 个 k 阶完全图 K_k 的不相交并中将其所有 $k-1$-度顶点两两配对，并在配对的 $k-1$-度顶点之间连边，使得 $F_{k,m}$ 中的每个顶点的度为 k，且 $F_{k,m}$ 是连通的。

通过上述构造方法可知，$F_{k,m}$ 是阶数为 km 的连通 k-正则图，并且 $\omega(F_{k,m})=k$。图 1 展示了一个 $F_{3,m}$ 的例子。

令 $F_1=\{F_{k,m}\mid m\geqslant 2,k\geqslant 3$，其中 k 是奇数，m 是偶数$\}$，$F_2=\{F_{k,m}\mid m\geqslant 2,k\geqslant 3$，其中 k 是偶数，m 是整数$\}$以及 $F=F_1\cup F_2$。

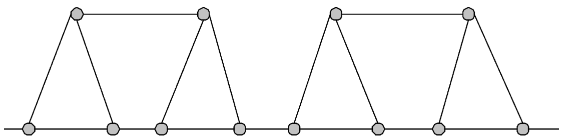

图 1　一个 $F_{3,m}$ 的例子

Fig. 1　Example of $F_{3,m}$

定理 1　如果 G 是一个阶数为 n 的连通 k-正则图，$\omega(G)=k$，则 $\tau_M(G)\leqslant n/k$。等式成立当且仅当 $G\in F$。

证明　由引理 2 可以设 x 表示 G 中独立 k-团的数目，y 表示 $K_{k+1}-e$ 的数目。若 D 是 G 的一个具有最小基数的最大-团横贯集，则 $|D|=x+y$。于是有

$$|V-D|\geqslant(k-1)x+ky\geqslant(k-1)(x+y)=(k-1)|D| \tag{1}$$

$$n=|V-D|+|D|\geqslant k|D| \tag{2}$$

及 $|D|\leqslant\dfrac{n}{k}$，因此 $\tau_M(G)\leqslant n/k$。

对于一个阶数为 n、团数为 k 的连通 k-正则图 G，下面证明 $\tau_M(G)=n/k$ 当且仅当 $G\in F$。

如果 $G\in F$，那么存在整数 $m\geqslant 2$(当 k 是一个奇数时，m 是一个偶数)，使得 $G=F_{k,m}$，从而 $|V(G)|=mk$。由于 G 的所有最大团互相独立，为了满足与 G 的每个最大团都相交，G 的一个最大-团横贯集 D 必定包含 G 的每个最大团中至少一个顶点，所以 $|D|\geqslant m=mk/k=n/k$，于是根据 $\tau_M(G)\leqslant n/k$ 可得 $\tau_M(G)=n/k$。

反之，对于一个阶数为 n、团数为 k 的连通 k-正则图 G，如果 $\tau_M(G)=n/k$，则上面证明中的不等式(1)式与(2)式必须取等号，于是由 $(k-1)x+ky=(k-1)(x+y)$ 知 $y=0$，即 G 仅仅包含独立 k-团，并且由 $n=k|D|$ 知 G 的每个顶点包含在某个 k-团中，所以 $G\in F$。　　证毕

注　在定理 1 中，当 $k=3$ 时，$F_{3,m}$ 是一个无爪 3-正则图，因此，$n/3$ 是无爪 3-正则图的最大-团横贯数的紧的上界。

接下来对无爪 3-正则图的最大-团横贯数给出一个紧的下界。首先引入一个引理。

引理 3[13]　如果 G 是一个阶数为 $n(n>4)$ 的连通无爪的 3-正则图，那么对任意的顶点 $v\in V(G)$，v 包含在至多 1 个 2-团中。

为了刻画达到下界的极值图，构造一个连通无爪 3-正则图的集合如下。

构造 2　对于 $k\geqslant 2$，令 M_k 表示在 k 个钻石的不相交并中将不同钻石中的所有 2-度顶点任意两两配对，并在

配对的 2-度顶点之间连边，使得 M_k 中的每个顶点的度为 3，而且 M_k 是连通的。

通过构造方法可知，M_k 是阶数为 $4k$ 的连通无爪 3-正则图，并且 $\omega(M_k)=3$。图 2 展示了一个 M_k 的例子。

令 $M=\{M_k \mid k\geqslant 2\}$，有如下定理。

定理 2　如果 G 是一个阶数为 $n(n>4)$ 的连通无爪 3-正则图，那么 $\tau_M(G)\geqslant n/4$。等式成立的充要条件是 $G\in M$。

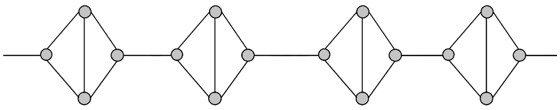

图 2　M_k

Fig. 2　M_k

证明　由引理 3 及 $n>4$ 知，$\omega(G)=3$，G 的每个顶点包含在 G 的至少一个三角形中。又由引理 2 知，G 的任意两个不同的最大团或者是独立的，或者它们的并的导出子图是一个钻石。令 x 是 G 中独立三角形的数目，y 是 G 中钻石的数目。若 D 是 G 的一个基数最小的最大-团横贯集，由引理 3 知

$$|V-D|=2x+3y\leqslant 3(x+y)=3|D| \quad (3) \qquad n=|V-D|+|D|\leqslant 4|D| \quad (4)$$

及 $|D|\geqslant \dfrac{n}{4}$。因此 $\tau_M(G)\geqslant n/4$。

对于一个阶数为 n 的连通无爪 3-正则图 G，下面证明 $\tau_M(G)=n/4$ 当且仅当 $G\in M$。

假设 $G\in M$，那么存在某个正整数 $k\geqslant 2$ 使得 $G=M_k$，从而 $|V(G)|=4k$。显然，在每个钻石中选择一个 3-度顶点作成的顶点子集一定是 M_k 的一个基数为 k 的最大-团横贯集，于是有 $\tau_M(G)\leqslant k=n/4$。再由前面的证明可得 $\tau_M(G)=n/4$。

反之，对于一个阶数为 n 的连通无爪 3-正则图 G，如果 $\tau_M(G)=n/4$，则不等式(3)式与(4)式必须取等号，由 $2x+3y=3x+3y$ 得 $x=0$，即 G 中无独立三角形，每个最大团都包含在某个钻石中；由 $n=4|D|$ 知 G 的每个顶点都包含在某个三角形中，所以 $G\in M$。　证毕

2 减最大-团横贯数

本节首先对任意图的减最大-团横贯数给出一个紧的下界，然后对团数为 k 的 k-正则图的减最大-团横贯数呈现一个上界，并刻画其极值图。

由减最大-团横贯数 $\tau_M^-(G)$ 的定义，可以得到下面的结果。

定理 3　如果 G 是一个阶数为 n 的图，$\omega(G)\geqslant 3$，则 $\tau_M^-(G)\geqslant 1+\omega(G)-n$。并且这个界是紧的。

证明　设 f 是 G 的具有最小权的减最大-团横贯函数。对于任意顶点 $v\in V(G)$，如果 v 不包含在 G 的任何最大团中，那么 $f(v)=-1$。由 $\tau_M^-(G)$ 的定义知，对于给定团数和阶数的图 G，减最大-团横贯函数 f 的权随着 G 的最大团数目的增加不会减小，因此，当 G 的最大团的数目是 1 时，函数 f 的权最小。令 Q 是 G 的一个最大团，则 $f(Q)\geqslant 1$。从而 $\tau_M^-(G)\geqslant 1-(n-\omega(G))=1+\omega(G)-n$。

假设 G 只有唯一的最大团 Q，任取 Q 中一个顶点 v，定义一个函数 $g:V(G)\to\{-1,0,+1\}$，使得：$g(v)=1$；$\forall u\in V(Q)$，若 $u\neq v$，则 $g(u)=0$；G 中不在 Q 中的其余顶点，其函数值为 -1。显然 g 是图 G 的一个减最大-团横贯数，于是 $\tau_M^-(G)\leqslant g(V(G))=1+\omega(G)-n$。结合前面的 $\tau_M^-(G)\geqslant 1+\omega(G)-n$ 可得 $\tau_M^-(G)=1+\omega(G)-n$。证毕

接下来对团数为 k 的 k-正则图的减最大-团横贯数给出一个上界，并刻画达到上界的极值图。

定理 4　如果图 G 是一个阶数为 n 的连通 k-正则图，$\omega(G)=k$，那么 $\tau_M^-(G)\leqslant n/k$。等式成立的充要条件是 $G\in F$(F 见“构造 1”)。

证明　令 a 表示 G 中所有独立 k-团的数目，b 表示 G 中所有导出子图 $K_{k+1}-e$ 的数目。同时，分别记 $A=\{G_i:G_i=G[\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ik}\}]\}(1\leqslant i\leqslant a)$ 为 G 的所有独立 k-团的集合，$B=\{G_j:G_j=G[\{y_{j1},z_{j2},u_{j3},u_{j4},\cdots,u_{j(k+1)}\}]\}(1\leqslant j\leqslant b)$ 为 G 的所有导出子图 $K_{k+1}-e$ 的集合，其中，对于 $1\leqslant j\leqslant b$，$d_{G_j}(u_{jt})=k$，$3\leqslant t\leqslant k+1$，$d_{G_j}(y_{j1})=d_{G_j}(z_{j2})=k-1$。

定义一个函数 $f:V(G)\to\{-1,0,+1\}$ 如下。对每个 G_i，有 $f(x_{is})=\begin{cases}+1, 1\leqslant i\leqslant a, s=1\\ 0, 1\leqslant i\leqslant a, 2\leqslant s\leqslant k\end{cases}$。对每个 G_j：$f(y_{j1})=f(z_{j2})=-1$，并且 $f(u_{jt})=\begin{cases}+1, 1\leqslant j\leqslant b, t=3,4\\ 0, 1\leqslant j\leqslant b, 5\leqslant t\leqslant k+1\end{cases}$。

对任意的 $v\in V(G)-(\bigcup_{i=1}^{a}V(G_i)\cup\bigcup_{j=1}^{b}V(G_j))$，$f(v)=-1$。于是 $f(V(G_i))=1$，$1\leqslant i\leqslant a$。令 Q_{j1} 与 Q_{j2} 是 $G_j(1\leqslant j\leqslant b)$ 中两个最大团，那么 $f(V(Q_{j1}))=f(V(Q_{j2}))=1$，$1\leqslant j\leqslant b$。

因此 f 是 G 的一个减最大-团横贯函数，注意到

$$n\geqslant ka+(k+1)b\geqslant k(a+b) \tag{5}$$

于是有

$$\tau_M^-(G)\leqslant f(V(G))\leqslant\sum_{i=1}^{a}f(V(G_i))+\sum_{j=1}^{b}f(V(G_j))=a\leqslant a+b\leqslant\frac{n}{k}\tag{6}$$

下面刻画达到这些界的极值图,对于一个阶数为 n 的 k-正则图 G,$\omega(G)=k$,下证 $\tau_M^-(G)=n/k$ 当且仅当 $G\in F$。

设 $G\in F$,那么存在 $k\geqslant3$,$m\geqslant2$(若 k 为奇数,则 m 为偶数),使得 $G=F_{k,m}$,因此 $|V(G)|=km$,令 f 是 G 的一个权最小的符号最大-团横贯函数。因为这些最大团相互独立,对任意的 $v\in V(G)$,v 都包含在某个最大团中。对于任意的最大团 Q,由于 $f(V(Q))\geqslant1$,于是 $\tau_M^-(G)\geqslant f(V(G))=m=n/k$。从而有 $\tau_M^-(G)=n/k$。

反之,对于一个阶数为 n 的 k-正则图 G,$\omega(G)=k$,假设 $\tau_M^-(G)=n/k$,下证 $G\in F$。由于 $\tau_M^-(G)=n/k$ 要求不等式(4)式与(6)式都必须取等号,所以 $b=0$ 并且 $\tau_M^-(G)=f(V(G))=a=n/k$。于是对于每个顶点 $v\in V(G)$,v 仅仅包含在一个最大团中,从而可得 $G\in F$。 证毕

参考文献:

[1] Bollobas B. Modern graph theory[M]. New York:Springer-Verlag,2001.

[2] Erdos P,Gallai T,Tuza Zs. Covering the cliques of a graph with vertices[J]. Discrete Math,1992,108:279-289.

[3] Andreae T. On the clique-transversal number of chordal graphs[J]. Discrete Math,1998,191:3-11.

[4] Andreae T,Flotow C. On covering all cliques of a chordal graph[J]. Discrete Math,1996,149:299-302.

[5] Andreae T,Schughart M,Tuza Zs. Clique-transversal sets of line graphs and complements of line graphs[J]. Discrete Math,1991,88:11-20.

[6] Bacso G,Tuza Zs. Clique-transversal sets and weak 2-colorings in graphs of small maximum degree[J]. Math Theoret Comput Sci,2009,11(2):15-24.

[7] Chang M S,Chen Y H,Chang G J,et al. Algorithmic aspects of the generalized clique-transversal problem on chordal graphs[J]. Discrete Appl Math,1996,66:189-203.

[8] Shan E F,Cheng T C E,Kang L Y. Bounds on the clique-transversal number of regular graphs[J]. Science in China A:Mathematics,2008,51(5):851-863.

[9] Shan E F,Kang L Y. Clique-transversal sets claw-free 4-regular graphs[J]. Acta Mathematica Sinica,2011,27(5):883-896.

[10] Tuza Zs. Covering all cliques of a graph[J]. Discrete Math,1990,86:117-126.

[11] Chang M S,Klot T,Lee C M. Maximum clique trandversals[J]. Lecture Notes in Computer Science,2001,2204:32-43.

[12] Lee C M. Variations of maximum-clique transversal sets on graphs[J]. Annals of OperationS Research,2010,181(1):21-66.

[13] Wang D G,Shan E F. The signed maximum-clique transversal number of regular graphs[J]. J of Comp Math,2012,89:741-751.

Operations Research and Cybernetics

The Maximum-clique Transversal Number and the Minus Maximum-clique Transversal Number of Regular Graphs

WANG Ding-guo[1], SHANG Er-fang[2]

(1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;

2. School of Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: In this paper, firstly, we establish the upper bound n/k on the maximum-clique transversal number for a k-regular graph G with order n and clique number k, and the lower bound $n/4$ on the maximum-clique transversal numbe for claw-free cubic with order n, meanwhile, we characterize the extremal graphs achieving these bounds. Next, we establish a tight lower bound $1+\omega(G)-n$ on the minus maximum-clique transversal number of an arbitrary graph G with order n and clique number $\omega(G)$. Meantime, we give an upper bound n/k on the minus maximum-clique transversal number for a k-regular graph G with order n and clique number k and characterize the extremal graphs achieving the upper bound.

Key words: regular graph; claw-free; maximum-clique transversal number; minus maximum-clique transversal number

(责任编辑 黄 颖)