运筹学与控制论　　DOI:10.11721/cqnuj20130604

带有交货期窗口和工件可拒绝的单机排序问题*

陈　东，赵传立
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要:讨论了带有交货期窗口和工件可拒绝的单机排序问题，这一问题是将所有的工件分成两个集合，一个是被接受的工件集，一个是被拒绝的工件集。假设被接受的每个工件都有一个待定的交货期窗口，且所有工件的交货期窗口的大小是相同的，如果工件在窗口中完工，则不产生任何费用;否则工件提前或延误，会产生相应的提前或延误的费用。而对于拒绝工件而言，它的费用只与工件有关。这类问题的总费用是 2 个工件集的费用之和。目标函数是确定被接受工件的最优排序，极小化总费用，给出了一个动态规划算法，并证明了这个问题是多项式时间可解的。

关键词:排序;单机;交货期窗口;拒绝工件;接受工件

中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)06-17-05

近年来有关交货期窗口的排序问题已广为关注，交货期窗口问题是指:若某个工件在交货期窗口内完工，则不产生惩罚费用，但是如果工件在窗口之前或之后完工则会产生提前或延误的费用。在许多交货期窗口问题中，窗口的开始时间和结束时间都是决策变量。Mosheiov 和 Sarig[1]研究了带有相同交货期窗口的单机排序问题，目标函数为极小化最大完工时间。Mor 和 Mosheiov[2]提出了带有维修活动且具有相同大小交货期窗口的单机排序问题，目标函数是极小化总加权流时间的费用。Liman[3]等研究了将交货期窗口和可退化两种模型结合起来的单机排序问题，并且将单机的交货期问题进一步阐释。

可拒绝问题是指:在所有需要加工的工件中，某些工件因为外界和自身的因素可能导致被拒绝加工，被拒绝的工件集的费用可以通过工件集内对应工件的单位费用求出。Shabtay 等[4]研究了带有拒绝和位置权函数的单机排序问题，目标函数是极小化接受工件集和拒绝工件集产生的总费用。Zhang 等[5]讨论的是带有拒绝问题的单机排序问题，目标函数是极小化接受工件的最大完工时间和拒绝工件的费用。Bartal 等[6]将带有拒绝的单机排序问题推广到多个机器的情况，使此类问题得到进一步的推广。Cheng 和 Sun[7]研究了带有线性退化和拒绝工件的单机排序问题，目标函数是极小化最大完工时间，加权总完工时间以及拒绝工件集的最大误工费用。Zhang 等[8]研究了可拒绝的带有不确定交货期窗口的单机排序问题。张淑霞和张峰[9]研究了可拒绝的排序问题，目标函数是极小化总加权完工时间。此外，Cao 和 Zhang[10]和 Zhang 等[11]也对可拒绝的排序问题进行了探讨。

本文考虑带有交货期窗口和工件可拒绝的单机排序问题。给出了一些最优解的讨论，证明了该问题是多项式时间可解的。第 1 节给出记号、问题描述。第 2 节给出了有关最优化的模型及相关的主要结论，给出了一个动态规划算法。第 3 节讨论了与位置相关的，加工时间可控的排序问题。最后一节是结论。

1 问题描述

工件集 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$，其中包含了 n 个相互独立的，无优先约束的工件，所有工件在 $t=0$ 时刻都是可加工的，需要将 n 个工件划分为 A 和 R 2 个子集，其中 A 表示被接受的工件集，R 表示被拒绝的工件集。若工件 J_j 被拒绝，则产生费用 e_j，$j=1,2,\cdots,n$。对于被接受工件需要确定最优排序和交货期窗口，目标函数是极小化总费用。

* 收稿日期:2012-12-03　　网络出版时间:2013-11-20　14:46
资助项目:国家自然科学基金(No. 11001117;No. 11201439;No. 11271341)
作者简介:陈东，女，硕士研究生，研究方向为排序理论，E-mail: 602322781@qq.com;通讯作者:赵传立，E-mail: zhaochuanli@synu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.17_031.html

设接受工件集 A 中有 h 个工件，A 的一个排序为 $\sigma=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[h]})$，$J_{[j]}$ 表示排在第 j 个位置的工件，$p_{[j]}$ 表示排在第 j 个位置的工件的加工时间。$C_{[j]}$，$j=1,2,\cdots,h$ 表示排在第 j 个位置的工件的完工时间。每个工件都有一个待定的交货期窗口$[d_{[j]}^{(1)},d_{[j]}^{(2)}]$，且 $d_{[j]}^{(1)}\leqslant d_{[j]}^{(2)}$，$j=1,2,\cdots,h$，将排在第 j 个位置的工件的交货期窗口的开始时间定义为它的加工时间加上一个常数，即 $d_{[j]}^{(1)}=p_{[j]}+q^{(1)}$，类似的，排在第 j 个位置的工件的交货期窗口的结束时间定义为它的加工时间加上一个更大的常数，即 $d_{[j]}^{(2)}=p_{[j]}+q^{(2)}$。排在第 j 个位置的工件的交货期窗口可表示为$[p_{[j]}+q^{(1)},p_{[j]}+q^{(2)}]$。设 $D_{[j]}$ 为排在第 j 个位置的工件的交货期窗口大小，则 $D_{[j]}=q^{(2)}-q^{(1)}=D,(j=1,2,\cdots,h)$ 是一个常量，即所有工件的交货期窗口大小相同，$E_{[j]}=\max\{0,d_{[j]}^{(1)}-C_{[j]}\}$ 表示排在第 j 个位置的工件的提前时间，$T_{[j]}=\max\{0,C_{[j]}-d_{[j]}^{(2)}\}$ 表示排在第 j 个位置的工件的延误时间。接受工件的总费用包括提前、延误、交货期窗口的开始时间和交货期窗口大小的费用。因此，工件集 A 的费用可以描述为 $F_1=\alpha\sum_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum_{j\in A}D_{[j]}$，其中 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0,\gamma\geqslant0$ 和 $\delta\geqslant0$ 分别表示提前时间、延误时间、交货期窗口的开始时间和交货期窗口大小的单位费用。工件集 R 的费用可以描述为 $F_2=\sum_{j\in R}e_j$，目标函数为极小化总费用

$$F=F_1+F_2=\alpha\sum_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum_{j\in A}D_{[j]}+\sum_{j\in R}e_j$$

综上，本文所研究的问题可记为

$$1\mid rej\mid\alpha\sum_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum_{j\in A}D_{[j]}+\sum_{j\in R}e_j \tag{1}$$

2 主要结果

首先，对于工件全部接受的特殊情况，即 $A=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$，有

$$F=F_1=\alpha\sum_{j=1}^{n}E_{[j]}+\beta\sum_{j=1}^{n}T_{[j]}+\gamma\sum_{j=1}^{n}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum_{j=1}^{n}D_{[j]} \tag{2}$$

由文献[2]，有下面结论：

性质1 如果 $C_{[j]}<d_{[j]}^{(1)}$，则 $C_{[j-1]}<d_{[j-1]}^{(1)}$。

性质2 如果 $C_{[j]}>d_{[j]}^{(2)}$，则 $C_{[j-1]}>d_{[j-1]}^{(2)}$。

性质3 在最优排序 $\sigma^*=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$ 中，存在某个 k 和 l，使得

$$q^{(1)}=p_{[1]}+p_{[2]}+\cdots+p_{[k]}=\sum_{j=1}^{k}p_{[j]},q^{(2)}=p_{[1]}+p_{[2]}+\cdots+p_{[k]}+\cdots+p_{[l]}=\sum_{j=1}^{l}p_{[j]}$$

性质4 在最优排序 $\sigma^*=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$ 中，设 $q^{(1)*}=\sum_{j=1}^{k^*}p_{[j]}$，$q^{(2)*}=\sum_{j=1}^{l^*}p_{[j]}$，则 $k^*=\left[\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right]$，$l^*=\left[\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right]$，其中 k^*，l^* 为性质3中 k,l 的最优值。

运用以上结论，可将目标函数(2)作如下化简

$$\sum_{j=1}^{n}E_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}(d_{[j]}^{(1)}-C_{[j]})=((p_{[1]}+q^{(1)})-p_{[1]})+((p_{[2]}+q^{(1)})-(p_{[1]}+p_{[2]}))+\cdots+((p_{[k]}+q^{(1)})-(p_{[1]}+\cdots+p_{[k]}))=q^{(1)}+(q^{(1)}-p_{[1]})+(q^{(1)}-(p_{[1]}+p_{[2]}))+\cdots+p_{[k]}=\sum_{j=1}^{k}jp_{[j]}$$

$$\sum_{j=1}^{n}T_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}(C_{[j]}-d_{[j]}^{(2)})=(q^{(2)}+p_{[l+1]})-(q^{(2)}+p_{[l+1]})+((q^{(2)}+p_{[l+1]}+p_{[l+2]})-(q^{(2)}+p_{[l+2]}))+\cdots+((q^{(2)}+p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+\cdots+p_{[n-1]}+p_n)-(q^{(2)}+p_{[n]}))=p_{[l+1]}+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]})+\cdots+(p_{[l+1]}+p_{[l+2]}+\cdots+p_{[n]})=\sum_{j=l+1}^{n}(n-j)p_{[j]}$$

$$\sum_{j=1}^{n}d_{[j]}^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}(p_{[j]}+q^{(1)})=\sum_{j=1}^{n}p_{[j]}+nq^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}p_{[j]}+n\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}=$$

$$(n+1)\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{n}p_{[j]}\sum_{j=1}^{n}D_{[j]}=n(q^{(2)}-q^{(1)})=n\sum_{j=k+1}^{l}p_{[j]}$$

综上可得

$$F=\sum_{j=1}^{k}(\alpha j+\gamma(n+1))p_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{l}(\delta n+\gamma)p_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{n}(\beta(n-j)+\gamma)p_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}w_jp_{[j]} \tag{3}$$

其中 $w_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1),j=1,2,\cdots,k\\ \delta n+\gamma,j=k+1,\cdots,l\\ \beta(n-j)+\gamma,j=l+1,l+2,\cdots,n\end{cases}$，表示在排序 σ 中排在第 j 个位置上的工件的位置权。

对于工件全部接受的情况，给出如下算法。

算法 1　**步骤 1**　根据给定的 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$，运用性质 4，求出 $k^*=\left\lceil\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil,l^*=\left\lceil\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$；

步骤 2　求出不同位置的 w_j，并按非增的顺序将其排序，使得 $\tilde{w}_1\geqslant\tilde{w}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{w}_n$；

步骤 3　将工件按照 SPT 规则排序，即：$p_{[1]}\leqslant p_{[2]}\leqslant\cdots\leqslant p_{[n]}$，此时将 $\tilde{w}_j$ 与 $p_{[j]}$ 逆序相乘，便可得到接受工件集 A 的最小费用，即(3)式的最优值。

其次，讨论接受工件集 A 中工件个数为 h 的情况，由于 $h=0$ 是平凡问题，所以设 $1\leqslant h<n$，则

$$F=F_1+F_2=\alpha\sum\nolimits_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum\nolimits_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum\nolimits_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum\nolimits_{j\in A}D_{[j]}+\sum\nolimits_{j\in R}e_j$$

其中 $F_1=\alpha\sum\nolimits_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum\nolimits_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum\nolimits_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum\nolimits_{j\in A}D_{[j]}=\sum_{j=1}^{k}(\alpha j+\gamma(h+1))p_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{l}(\delta h+\gamma)p_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{h}(\beta(h-j)+\gamma)p_{[j]}=\sum_{j=1}^{h}w_jp_{[j]}$。

此时

$$w_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(h+1),j=1,2,\cdots,k\\ \delta h+\gamma,j=k+1,\cdots,l\\ \beta(h-j)+\gamma,j=l+1,l+2,\cdots,h\end{cases} \tag{4}$$

表示在排序 σ 中排在第 j 个位置上的工件的位置权。

当 $1\leqslant h<n$ 时，针对问题(1)，给出了如下算法。

算法 2　**步骤 1**　根据给定的 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$，运用性质 4，求出 $k^*=\left\lceil\frac{h(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil,l^*=\left\lceil\frac{h(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$；

步骤 2　求出不同位置的 w_j，并按非增的顺序排序，使得 $\tilde{w}_1\geqslant\tilde{w}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{w}_h$；

步骤 3　将工件按照 SPT 规则排序，即：$p_{[1]}\leqslant p_{[2]}\leqslant\cdots\leqslant p_{[n]}$；

步骤 4　通过解决动态规划问题来确定最优排序。

对于给定的 h，设 $F_j(m)$ 是极小化部分排序 $\sigma=(J_1,J_2,\cdots,J_j)$ 的目标函数，其中有 m 个工件恰好被接受。

在任意一个这样的排序中，工件 J_j 分两种情况：J_j 被拒绝或者 J_j 被接受并在机器上加工。

a) J_j 被拒绝。此时在前 $j-1$ 个工件中，已有 m 个工件被接受，因此目标函数值为 $F_j(m)=F_{j-1}(m)+e_j$；

b) J_j 被接受。此时在前 $j-1$ 个工件中，恰好有 $m-1$ 个工件被接受，因此目标函数值为 $F_j(m)=F_{j-1}\cdot(m-1)+\tilde{w}_jp_{[j]}$。综上所述，有如下递推公式 $F_j(m)=\min\begin{cases}F_{j-1}(m-1)+\tilde{w}_jp_{[j]}\\ F_{j-1}(m)+e_j\end{cases}$。注意：已考虑的工件中被接受的 m 个工件与余下的未考虑的 $(n-j)$ 个工件之和应不少于 h，$m\geqslant h-(n-j)$。

因此，有 $\max(0,h-(n-j))\leqslant m\leqslant\min(j,h)$。

综合以上 2 种情况，给出以下动态规划算法 DP。边界条件 $F_0(0)=0$，$F_j(m)=\infty$ 对于 $m=-1$ 和 $j=m-1$，递推式 $F_j(m)=\min\begin{cases}F_{j-1}(m-1)+\tilde{w}_jp_{[j]}\\ F_{j-1}(m)+e_j\end{cases}$，对于给定的 h，目标函数值表示如下 $F^*(h)=F_n(h)$，最优的目标函

数值 F^* 可以表示如下 $F^*=\min\limits_{h=1,\cdots,n}\{F^*(h)\}$,其中 $j\leqslant n,m\leqslant h\leqslant n$。

对于给定的 h,上述动态规划算法 DP 中有 $j\leqslant n,m\leqslant h\leqslant n$,所以动态规划算法 DP 在 $O(n^2)$ 时间内可解。对于 $h=1,2,\cdots,n$,分别运行算法 2,从得到的解中选取目标函数值最小者,即得到问题的最优解。

定理 1 问题

$$1\mid rej\mid \alpha\sum_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum_{j\in A}D_{[j]}+\sum_{j\in R}e_j$$

存在计算复杂性是 $O(n^3)$ 的最优算法。

3 加工时间与位置相关的排序问题

Mosheiov 和 Sidney[12] 研究了有关工件带有学习效应的排序问题,考虑了加工时间为 $p_{rj}=p_jr^{a_j}$ 的模型。本文所讨论的问题可以扩展到上述加工时间模型,即当工件 J_j 排在位置 r 上时加工时间为 $p_{rj}=p_jr^{a_j}$。若有 h 个工件被接受,设排序 $\sigma=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[h]})$,考虑问题

$$1\mid p_{rj}=p_jr^{a_j},rej\mid \alpha\sum_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum_{j\in A}D_{[j]}+\sum_{j\in R}e_j \tag{5}$$

通过前几节的讨论,得出下面结果:

目标函数为

$$F=\alpha\sum_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum_{j\in A}D_{[j]}+\sum_{j\in R}e_j=$$

$$\sum_{j=1}^{k}(\alpha j+\gamma(h+1))p_{rj}+\sum_{j=k+1}^{l}(\delta h+\gamma)p_{rj}+\sum_{j=l+1}^{h}(\beta(h-j)+\gamma)p_{rj}+\sum_{j\in R}e_j=\sum_{j=1}^{h}w_jp_{rj}+\sum_{j\in R}e_j$$

其中,w_j 可应用(4)式求出。

通过分析,该问题不能用本文的动态规划算法 DP 求解,将该问题转化为指派问题:假设工件 J_j 排在位置 r,当 $1\leqslant r\leqslant h$ 时,对应的函数值为 $w_jp_rj^{a_r}$;当 $h<r\leqslant n$ 时,对应的函数值为 e_j。

因此定义一个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}=(c_{rj})$ 其中 $c_{rj}=\begin{cases}w_jp_rj^{a_r},1\leqslant r\leqslant h\\ e_j,h+1\leqslant r\leqslant n\end{cases}$ $j=1,2,\cdots,n$,设 $y_{rj}\in\{0,1\}$,如果工件 J_j 排在第 r 个位置上,则 $y_{rj}=1$,否则 $y_{rj}=0$,则有如下指派问题。

$$\begin{aligned}\min\quad &\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{rj}y_{rj}\\ \text{s.t.}\quad &\sum_{r=1}^{n}y_{rj}=1,\quad j=1,\cdots,n\\ &\sum_{j=1}^{n}y_{rj}=1,\quad r=1,\cdots,n\\ &y_{rj}\in\{0,1\},\quad r,j=1,\cdots,n\end{aligned}$$

对于给定的 h,上述指派问题在 $O(n^3)$ 时间内可解。对于 $h=1,2,\cdots,n$,分别应用指派问题从得到的解中选取目标函数值最小者,即得到问题的最优解。

定理 2 问题

$$1\mid p_{rj}=p_jr^{a_j},rej\mid \alpha\sum_{j\in A}E_{[j]}+\beta\sum_{j\in A}T_{[j]}+\gamma\sum_{j\in A}d_{[j]}^{(1)}+\delta\sum_{j\in A}D_{[j]}+\sum_{j\in R}e_j$$

存在计算复杂性是 $O(n^4)$ 的最优算法。

4 结论

本文讨论了带有交货期窗口和工件可拒绝的单机排序问题。将所有工件分为 2 个集合:接受工件集和拒绝工件集。其中,在接受工件集中每个工件都有一个交货期窗口,且窗口的大小是相同的;而拒绝工件的费用只与工件有关。证明了这个问题在 $O(n^3)$ 时间内可以求解。此外,进一步讨论了加工时间与位置相关的工件可拒绝的单机排序问题,对于工件可拒绝问题的其它类型目标函数,以及其他类型的交货期窗口问题,还有待进一步讨论。

参考文献:

[1] Mosheiov G, Sarig A. Scheduling with a common due-window: Polynomially solvable cases[J]. Information Sciences, 2010, 180 : 1492-1505.

[2] Mor B, Mosheiv G. Scheduling a maintenance activity and due-window assignment based on common flow allowance [J]. International Journal of Production Economics, 2012, 135: 222-230.

[3] Liman S D, Panwalkar S S, Thongmee S. Common due window size and location determination in a single machine scheduling problem[J]. Journal of the Operational Research Society, 1998, 49: 1007-1010.

[4] Shabtay D, Gaspar N, Yedidsion L. A bicriteria approach to scheduling a single machine with job rejection and positional penalties[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2012, 23: 395-424.

[5] Zhang L Q, Lu L F, Ng C T. Optimal algorithms for single machine scheduling with rejection to minimize the makespan[J]. International Journal of Production Economics, 2011, 130: 153-158.

[6] Bartal Y, Leonardi S, Marchetti-Spaccamela A, et al. Multiprocessor scheduling with rejection[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2000, 13: 64-78.

[7] Cheng Y S, Sun S J. Scheduling linear deteriorating jobs with rejection on a single machine[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 194: 18-27.

[8] Zhang L Q, Lu L F, Yuan J J. Single machine scheduling with release dates and rejection[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 198: 975-978.

[9] 张淑霞,张峰. 极小化加权总完工时间的工件可拒绝排序[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2012,29(5):10-12.
Zhang S X, Zhang F. Scheduling with rejection to minimize the total weighted completion time[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012, 29(5): 10-12.

[10] Cao Z, Zhang Y. Scheduling with rejection and non-identical job arrivals[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2007, 20: 529-535.

[11] Zhang L Q, Lu L F, Ng C T. The unbounded parallel-batch scheduling with rejection[J]. Journal of the Operational Research Society, 2012, 63: 293-298.

[12] Mosheiov G, Sidney J B. Scheduling with general job-dependent learning curves[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 147: 665-670.

Operations Research and Cybernetics

Scheduling a Single Machine with Job Rejection and Due-window Assignment

CHEN Dong, ZHAO Chuan-li

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: We study a single machine scheduling with job rejection and due-window assignment. The scheduling problem is given by partitioning the jobs into a set of accepted and a set of rejected jobs. We assume that every accepted job has an undetermined due-window and the size of due-window is identical. There is no cost where the job is completed during the due-window, but there is cost where the job is completed prior or after the due-window. The cost of the rejected jobs depends on the rejected jobs. The cost of this problem is the sum cost of two sets jobs. The objective is to determine the optimal sequence of accepted jobs and minimize the total costs. We have provided dynamic programming algorithms, and shown that the problem is solvable in polynomial time.

Key words: scheduling; single machine; due-window; rejected job; accepted job

(责任编辑　欧红叶)