DOI:10.11721/cqnuj20130618

非线性椭圆问题的非精确牛顿代数多重网格法*

李　明

(红河学院 数学学院，云南 蒙自 661199)

摘要:采用基于矩阵图集的粗化算法形成粗点集，构造改进的插值算子，结合 V 型多重网格法和瀑布型多重网格法的算法结构，提出了一种改进的代数多重网格(IAMG)法，并估计了该算法的计算量。将 IAMG 法运用于求解牛顿算法中线性校正方程，提出了求解非线性椭圆型问题的非精确牛顿代数多重网格(IN-AMG)法。数值实验表明与对比算法相比，IN-AMG 法在求解线性校正方程方面的整体计算量更少、计算时间更短。

关键词:插值算子；代数多重网格法；非精确牛顿代数多重网格法；非线性椭圆问题

中国分类号:O241.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)06-0098-05

非线性椭圆问题来源于气体动力学、化学等领域(见文献[1,2])，大规模数值解法是工程界和计算数学界的研究热点之一。许进超提出了求解非线性椭圆问题的两网格法(见文献[3,4])，黄云清、Timmermann、周叔子等人提出了一类瀑布型多重网格法(见文献[5-11])，这类多重网格方法属于完全逼近格式。多重网格法应用于求解非线性问题还有另外一类方法：牛顿多重网格法。这类方法是对非线性问题用某种全局线性化方法，比如牛顿迭代，在每个迭代步，用基本的多重网格法求解一个线性化的方程。2011 年禹海雄在博士论文[12]中针对非线性椭圆问题，提出了非光滑牛顿多重网格算法。即结合几何信息，用 V 型多重网格法或瀑布型多重网格法求解线性化方程。类似于文献[12]和非精确牛顿法的思想，为了降低求解线性化方程的计算量，结合基于矩阵图集的粗化算法，构造改进插值算子，提出一种计算量更经济的代数多重网格(IAMG)法。基于非精确牛顿法的算法框架，将 IAMG 法作为牛顿型方法中线性化方程的求解器，给出一种非精确牛顿代数多重网格(IN-AMG)法用于求解如下非线性椭圆问题

$$\begin{cases}-\Delta u(x,y)+f(x,y,u)=0, & \text{in } \Omega\\ u(x,y)=0, & \text{on } \partial\Omega\end{cases} \tag{1}$$

(其中，$f(x,y,u)$为已知的足够光滑的非线性函数，$u(x,y)$为足够光滑的待求函数，Ω 为二维凸多边形区域)。数值实验表明，本文提出的 IN-AMG 法具有与对比算法相同的计算精度，但前者在求解线性校正方程的计算量更少、计算时间更短，并具有较强稳健性。

1 改进的代数多重网格法

对于偏微分方程离散化线性方程组

$$Au=Z \tag{2}$$

其中 $A=(a_{i,j})_{n\times n}$为 n 阶稀疏对称正定矩阵，Z 为 n 维列向量，u 为未知 n 维列向量，代数多重网格(AMG)法是常用的一类求解算法。AMG 法具有不依赖于问题的几何信息，计算量少，稳健性强的优点。其中粗化算法和插值矩阵是 AMG 法的两大重要组成要素。为便于描述，先引入如下定义

定义 1[13]　设 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，$J=[1,\cdots,n]$，定义关于矩阵 $A=[a_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta\in J}$ 的图集 $G(A)$

$$G(A)=\{(\alpha,\beta)\in J\times J: a_{\alpha,\beta}\neq 0\} \tag{3}$$

其中，$\alpha\in J$ 称为顶点，$(\alpha,\beta)\in G(A)$称为以 α 起点，以 β 为终点的边。

在定义 1 的基础上，引入如下粗化算法。

* 收稿日期:2012-11-26　　修回日期:2013-05-08　　网络出版时间:2013-11-20 14:46

资助项目:国家自然科学基金(No. 11161014);云南省科技厅青年项目(No. 2012FD054);红河学院硕博项目(No. XJ1S0925)

作者简介:李明，男，讲师，硕士研究生，研究方向为偏微分方程数值解，E-mail: lm-001@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.98_045.html

算法 1[13]　粗化算法。

步骤 1　输入图集 $G(A)$，并建立空粗点集 $C=[\,]$；

步骤 2　从 $G(A)$中选取从未被访问过的顶点 α：

a)将 α 加入到粗点集 C 中，在图集 $G(A)$中将 α 点标注"被访问过"，

b)选取满足$(\alpha,\beta)\in G(A)$的点 β 将 β 点都标注为"被访问过"；

步骤 3　重复步骤 2，直至 $G(A)$中所有点都被访问过。

通过算法 1，可以得到图集 $G(A)$中的粗点集 C，记 C 的补集为 $\overline{F}$，并将 C 和 $\overline{F}$ 中元素按升序排列，记 N 表示粗点集 C 中元素个数，记 $N_i=\{j:|a_{i,j}|\neq 0,i\neq j\}$为 i 点的邻点集，记 $N_i^C=C\cap N_i$ 为 i 点的邻点中粗点构成的集合，记粗点 $i\in C$ 在粗点集 C 中的序号记为 $s=ind(i)$，记 $Z=[z_1,z_2,\cdots,z_n]^{\mathrm{T}}$。

通过算法 1，可以得到方程(2)中粗点集 C 和细点集 $\overline{F}$，可构造相应的插值矩阵 $P_H^h=(p_{i,j})_{n\times N}$，由 Galerkin 方法可得 $A_H:=(P_H^h)^{\mathrm{T}}AP_H^h$，$Z_H:=(P_H^h)^{\mathrm{T}}Z$，进而构造粗网格方程

$$A_Hu_H=Z_H \tag{4}$$

假设方程(4)对应的解 u_H 已知，针对方程(4)构造插值算子用于将 $u_H\in\mathbf{R}^{\mathrm{N}}$ 插值得到细网格上初始值$\tilde{u}\in\mathbf{R}^{\mathrm{N}}$。本文插值算子 I_H^h 如下

$$\tilde{u}=I_H^h(u_H,Z)=P_H^hu_H+\psi_Z \tag{5}$$

其中插值矩阵 P_H^h 和列向量 ψ_Z 分别如下

$$P_H^h=(p_{i,j})_{n\times N}=\begin{cases}1, & \forall\, i\in C,j=ind(i)\\ \dfrac{-a_{i,k}}{a_{i,i}}, & \forall\, i\in\overline{F},k\in N_i^C,j=ind(k)\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{6}$$

$$\psi_Z=(\varphi_i)_{n\times 1}=\begin{cases}0, & \forall\, i\in C\\ \dfrac{z_i}{a_{i,i}}, & \forall\, i\in\overline{F}\end{cases} \tag{7}$$

为了便于后面的描述，约定下标由小到大表示网格由细到粗，记 $A_1:=A$，$Z_1:=Z$，$Z_2:=Z_H$。由(6)式可构造第 $l+1$ 层到第 l 层的插值算子 P_{l+1}^l。运用 Galerkin 方法可形成一系列粗网格矩阵 A_l，$l=2,3,\cdots,L$。先给出求解方程(4)的 V 型 AMG01 法。

算法 2　V 型 AMG01 法。

for $i=1:L-1;A_{i+1}:=(P_{i+1}^i)^{\mathrm{T}}A_iP_{i+1}^i;u_i:=u_i+S_i^{m_1}(Z_i-A_iu_i);Z_{i+1}:=(P_{i+1}^i)^{\mathrm{T}}(Z_i-A_iu_i)$；

end

$u_L:=(A_L)^{-1}Z_L$;for $i=L-1:-1:1;u_i:=u_i+P_{i+1}^iu_i;u_i:=u_i+S_i^{m_2}(Z_i-A_iu_i)$；

end

其中 P_{i+1}^i为本文构造的插值矩阵(见(6)式)，S 为磨光算子，文中 S 选为共轭梯度法，前后磨光步 m_1,m_2 均取 3。

结合文献[14]的思想，在算法 2 的基础上，提出如下算法。

算法 3　改进的代数多重网格算法(IAMG)。

步骤 1　调用 ν_1 次 V 型 AMG01 法求解 $A_2u_2=Z_2$ 得 u_2^*；

步骤 2　将 u_2^* 插值到细层得 $u_1^0:=I_2^1(u_2^*,Z_1)$，令 $\nu_2:=0$；

步骤 3　如果$\dfrac{||Z_1-A_1\,u_1^0||}{||Z_1||}\leqslant\varepsilon$，令 $u_1^*:=u_1^0$，输出 u_1^*，停机；否则，转步骤 4；

步骤 4　使用磨光算子 S，对 u_1^0 磨光一次，令 $\nu_2:=\nu_2+1$，转步骤 3。

下面讨论算法 3 的计算量。设步骤 1 中 AMG01 法使用的网格层数为 $L-1$ 层，则算法 3 使用的网格层数为 L 层。为了估计算法 3 的计算量，引入文献[15,16]中关于多重网格法计算量的估计方法。

记最细层网格(即第 1 层)上作一次光滑迭代的工作量为一个单位工作量 WU(Work Unit)，对于 d 维问题(d 取 1,2,3)，通常 $1WU=O(n^d)$，用 WU 来度量多重网格法的工作量，并忽略限制和提升过程中的工作量(因为它们只占整个循环总工作量的 10%～20%(见[15,16]))，对于 d 维问题，调用 v_1 次 V 型多重网格法的工作

量为 $\nu_1(m_1+m_2)(1+2^{-d}+2^{-2d}+\cdots+2^{-(L-1)d})=\dfrac{1-2^{-Ld}}{1-2^{-d}}\nu_1(m_1+m_2)$。由算法3的流程可知,算法3的工作量为

$$\nu_1(m_1+m_2)(2^{-d}+2^{-2d}+\cdots+2^{-(L-1)d})+\nu_2=\frac{1-2^{-Ld}}{1-2^{-d}}\nu_1(m_1+m_2)+\nu_2-\nu_1(m_1+m_2)$$

2 非精确牛顿代数多重网格法

使用五点中心差分格式离散问题(1),可得对应的非线性方程

$$F_h(u)=0 \tag{8}$$

牛顿型算法是求解方程(8)常用一类数值方法,文献[7-11]均是使用其求解粗网格非线性方程,该算法的具体步骤如下:

算法4 牛顿法。

步骤1 给定初始值 u^0 及误差限 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$,置 $k:=0$;

步骤2 计算 $b^k=F(u^k)$,若 $\|b^k\|\leqslant\varepsilon_1$,转步骤6;否则,转步骤3;

步骤3 计算 $F(u^k)$的Jacobi矩阵 $F'(u^k)$,记 $A^k:=F'(u^k)$,转步骤4;

步骤4 解线性方程组

$$A^k\Diamond u^k=-b^k \tag{9}$$

得 $\Diamond u^k$,并置 $u^{k+1}:=u^k+\Diamond u^k$,转步骤5;

步骤5 若 $\|\Diamond u^k\|\leqslant\varepsilon_2$,输出 u^{k+1},转步骤6;否则置 $k:=k+1$,$u^k:=u^{k+1}$,转步骤2;

步骤6 停止,输出有关数据。

借鉴文献[10,12]和非精确牛顿法的思想,使用算法3求解方程(9),提出非精确牛顿代数多重网格(IN-AMG)法,算法具体过程如下:

算法5 非精确牛顿代数多重网格法IN-AMG。

步骤1 同算法4;

步骤2 同算法4;

步骤3 同算法4;

步骤4 使用算法3求解 $A^k\Diamond u^k=-b^k$ 得近似解 $\Diamond u^k$,并置 $u^{k+1}:=u^k+\Diamond u^k$;

步骤5 同算法4;

步骤6 同算法4。

3 数值实验

为了验证本文算法的有效性,在区域 Ω:[0,1]×[0,1]上计算如下算例。

算例1 右端函数

$$f(x,y,u)=-u^3+4\pi^2\sin(2\pi y)(\mathrm{e}^{\sin(2\pi x)}\cos^2(2\pi x)-\mathrm{e}^{\sin(2\pi x)}-\mathrm{e}^{\sin(2\pi x)}\sin(2\pi x)+1)+({}^{s}\mathrm{in}(2\pi y)(1-\mathrm{e}^{\sin(2\pi x)}))^3$$

真解为 $u=\sin(2\pi y)(1-\mathrm{e}^{\sin(2\pi x)})$。

算例2 右端函数

$$f(x,y,u)=-u\mathrm{e}^u+2(x+y-x^2-y^2+4\pi^2\sin(2\pi x)\sin(2\pi y))+\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)+(x-x^2)(y-y^2)\mathrm{e}^{(\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)+(x-x^2)(y-y^2))}$$

真解为 $u=\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)+(x-x^2)(y-y^2)$。

选取步长 h,使用五点中心差分格式离散上述算例。类似于算法5,本文选用如下插值矩阵

$$\bar{P}=(\bar{p}_{i,j})_{n\times N}=\begin{cases}1,\forall i\in C,j=ind(i)\\ \dfrac{1}{m},\forall i\in \bar{F},m=|N_i^C|\\ 0,其它\end{cases}$$

(其中 $|N_i^C|$ 表示 N_i^C 中元素的个数)作为插值算子,使用 L 层网格,运用V型AMG法求解方程(9)的非精确牛顿法作为对比算法。

为了便于描述，约定如下标注：“$grid$”表示网格的剖分规模；“L”表示对比算法或算法 5 中使用代数多重网格法(算法 3 或 V 型 AMG 法)的层数；“k”表示算法 5 或对比算法的迭代次数；“ $\sum\nu_1$”表示算法 5 在迭代过程中，算法 3 在步骤 1 中调用算法 2 的累和次数；“ $\sum\nu_2$”表示算法 5 在迭代过程中，算法 3 在步骤 3、步骤 4 中的累和磨光次数；“ $\sum\nu_3$”表示对比算法在迭代过程中，调用经典 AMG 法求解方程(9)的累和次数；“$\| u^k-u \|_\infty$”表示最细网格层上算法求出的数值解与问题真解的最大范数误差；“$time$” 表示计算时间(s)；算法 5 与对比算法的终止条件为相邻两次迭代值 2 范数误差小于10^{-6}。

表 1　对比算法和算法 5 对算例 1 的数值结果

$grid$	L	对比算法				算法 5				
		$\|\|u^k-u\|\|_\infty$	k	$\sum\nu_3$	$time$/s	$\|\|u^k-u\|\|_\infty$	k	$\sum\nu_1$	$\sum\nu_2$	$time$/s
64	3	2.202E−03	4	21	9.1	2.202E−03	4	19	0	4.5
128	3	5.500E−04	4	24	51.9	5.500E−04	4	20	0	10.4
256	3	1.375E−04	4	24	418.7	1.375E−04	4	20	0	51.6
64	4	2.202E−03	4	22	4.3	2.202E−03	4	20	0	3.2
128	4	5.500E−04	4	24	52.6	5.500E−04	4	20	1	10.6
256	4	1.375E−04	4	27	410.9	1.375E−04	4	23	0	50.7

表 2　对比算法和算法 5 对算例 2 的数值结果

$grid$	L	对比算法				算法 5				
		$\|\|u^k-u\|\|_\infty$	k	$\sum\nu_3$	$time$/s	$\|\|u^k-u\|\|_\infty$	k	$\sum\nu_1$	$\sum\nu_2$	$time$/s
64	3	8.146E−04	4	23	10.0	8.146E−04	4	19	0	4.5
128	3	2.036E−04	4	23	58.6	2.036E−04	4	19	0	10.7
256	3	5.089E−05	4	24	424.7	5.089E−05	4	19	0	53.7
64	4	8.146E−04	4	24	3.4	8.146E−04	4	20	1	2.9
128	4	2.036E−04	4	26	47.5	2.036E−04	4	21	1	9.2
256	4	5.089E−05	4	26	444.2	5.089E−05	4	22	0	54.1
64	5	8.146E−04	4	26	3.4	8.146E−04	4	21	0	2.9
128	5	2.036E−04	4	29	46.5	2.036E−04	4	23	0	9.2

从表 1 可以看出，算法 5 和对比算法具有相同的计算精度和迭代次数 k，且 k 不随求解规模变化而变化，具有较强稳健性。此外，$\sum\nu_2 \ll \sum\nu_1 < \sum\nu_3$，可知算法 5 的整体计算量少于对比算法的整体计算量，因此算法 5 的计算时间更短。

从数值试验可以看出本文构造的插值算子以及提出的算法的有效性，可用于求解问题(1)的数值解。

参考文献：

[1] Kinderlehrer D, Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications[M]. New York: Academic Press, 1980.

[2] Ishihara K. Monotone explicit iteration of the finite element approximation for the nonlinear boundary value problem[J]. Numerische Mathematik, 1984, 43: 419-437.

[3] Xu J C. A novel two-grid method for semilinear elliptic equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1994, 15(1): 231-237.

[4] Xu J C. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, 33(5): 1759-1777.

[5] Huang Y Q. Multilevel successive iteration methods for elliptic problems[A]//Workshop on MG. 湖南：湘潭大学出版社, 2003, 31-40.

[6] Timmermann G. A cascadic multigrid algorithm for semiliear elliptic problems[J]. Numer Math, 2000, 86: 717-713.

[7] 周叔子，祝树金. 半线性问题的瀑布型多重网格法[J]. 应用数学，2002，15(3): 136-139.
Zhou S Z, Zhu S J. Acascadic multigrid method for semilinear problems[J]. Mathematica Applicata, 2002, 15(3): 136-139.

[8] 祝树金，周叔子. 一类非线性椭圆问题的瀑布型多重网格法[J]. 数学理论与应用，2002, 22(1): 1-4.

Zhu S J,Zhou S Z. Acascadic multigrid method for nonlinear elliptic problems[J]. Mathematical Theory and Applications,2002,22(1):1-4.

[9] 邹战勇. 半线性椭圆型问题 Mortar 有限元逼近的瀑布型多重网格法[J]. 数学理论与应用,2006,26(1):39-41.
Zou Z Y. Cascadicmultigrid method for a mortar element approximation of a semiliear elliptic problem[J]. Mathematical Theory and Applications,2006,26(1):39-41.

[10] 禹海雄,孙哲. 一类半线性椭圆问题的瀑布型多重网格法[J]. 湖南大学学报:自然科学版,2011,38(8):79-81.
Yu H X,Sun Z. On theconvergence of a cascadic multigrid method for a kind of semilinear elliptic problems[J]. Journal of Hunan University:Natural Sciences ,2011,38(8):79-81.

[11] 李明,李郴良,崔向照. 求解半线性椭圆问题的牛顿-瀑布型两层网格法[J]. 数值计算与计算机应用,2011,32(4):313-318.
Li M,Li C L,Cui X Z. Anewton-cascadic two-level method for semilinear elliptic problems[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications,2011,32(4) :313-318.

[12] 禹海雄. 几类非线性问题的多重网格法[D]. 长沙:湖南大学博士论文,2011.
Yu H X. Multigrid methods for several kinds of nonlinear problems[D]. Changsha:Hunan University,2011.

[13] Kickinger F. Algebraic multigrid for discrete elliptic second-order problems [J]. Multigrid Methods V Lecture Notes in Computational Science and Engineering,1998,3:157-172.

[14] 李明,李郴良,崔向照,等. 一种求解泊松方程的瀑布型代数两层网格法[J]. 高等学校计算数学学报,2012,34(2):153-159.
Li M,Li C L,Cui X Z,et al. Acascadic algebraic two-level grid method for poisson equation[J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities,2012,34(2):153-159.

[15] 黄云清,舒适. 数值计算方法[M]. 北京:科学出版社,2009.
Huang Y Q,Shu S. Numericalcalculation method[M]. Beijing:Science Press,2009.

[16] Briggs W L,Henson V E,Mc Cormick S F. A multigrid tutorial[M]. 2nd. Beijing:Tsinghua University Press,2011.

Inexact Newton Algebraic Multigrid Method for Nonlinear Elliptic Problem

LI Ming

(Department of Mathematics, Honghe University, Mengzi Yunnan 661100, China)

Abstract: A new interpolation operator is designed by combining with the coarse grid points, which are given by using the coarsening algorithm based on the graph of the stiffness matrix. An improved algebraic multigrid (IAMG) method is presented for linear equations, by combining with the structure of V-cycle multigrid method and cascadic multigrid method. The calculation of the IAMG algorithm is estimated. And the algorithm is used in solving the linear correction equation of Newton algorithm. Then inexact Newton algebraic multigrid (IN-AMG) method is proposed for nonlinear elliptic problem. The numerical experiment shows that the IN-AMG method can decrease amount of calculation and reduce the computation time greatly, compared with the contrast algorithm.

Key words: interpolation operator; algebraic multigrid method; inexact Newton algebraic multigrid method; nonlinear elliptic problem

(责任编辑 欧红叶)