DOI:10.11721/cqnuj20130619

利用最小作用原理研究共振问题的周期解*

王少敏，杨存基

(大理学院 数学与计算机学院，云南 大理 671000)

摘要:文章的主要目的是研究以下二阶系统 $\begin{cases}\ddot{u}(t)+q(t)\dot{u}(t)=\nabla F(t,u(t))\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-e^{Q(T)}\dot{u}(T)=0\end{cases}$,a. e. $t\in[0,T]$的周期解的存在性。在 $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(x)$满足假设(A)及 $F_1(t,x)$,$F_2(x)$满足一些可解性条件下,通过使用最小作用原理获得了 2 个新的存在性定理。

关键词:周期解;最小作用原理;二阶系统

中图分类号: O177.25　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)06-0103-03

1 引言和主要结果

考虑二阶系统

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)+q(t)\dot{u}(t)=\nabla F(t,u(t))\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-e^{Q(T)}\dot{u}(T)=0\end{cases},\ \text{a. e. } t\in[0,T] \tag{1}$$

其中 $T>0$,$q\in L^1(0,T;R)$,$Q(t)=\int_0^t q(s)ds$,$p(t)=e^{Q(t)}$,$F:[0,T]\times\mathbf{R}^N\rightarrow\mathbf{R}$ 满足如下假设:

(A)$F(t,x)$对于每个 $x\in\mathbf{R}^N$ 关于 t 可测,对于 a. e. $t\in[0,T]$关于 x 是连续可微的,存在 $a\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$,$b\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$使得 $|F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$,$|\nabla F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$。对于 $x\in\mathbf{R}^N$ 和 a. e. $t\in[0,T]$成立。

$H_T^1=\{u:[0,T]\rightarrow\mathbf{R}^N \mid u$ 是绝对连续,$u(0)=u(T)$,$\dot{u}\in L^2(0,T;\mathbf{R}^N)\}$ 是一个 Hilbert 空间,具有范数 $\|u\|=\left(\int_0^T p(t)\,|u(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T p(t)\,|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$,$\forall u\in H_T^1$。其等价于如下范数 $\|u\|_0=\left(\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$,$\forall u\in H_T^1$。相应泛函 $\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T p(t)\,|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T p(t)F(t,u(t))\mathrm{d}t$ 。

在 H_T^1 上连续可微且弱下半连续[1]。在文献[1]中 Wu 推导出 $u\in H_T^1$ 是问题(1)的一个解的充要条件是 u 是 φ 的一个临界点。

当 $q(t)\not\equiv 0$,$t\in[0,T]$时,在假设(A)和一些适当的条件下,通过使用最小作用原理和临界点理论中的极大极小方法,人们已经获得了很多存在性结果(参见文献[2-10])。特别是,Ma,Tang 在文献[5]中获得了如下定理。

定理[5]　设 $F(t,x)=G(x)+H(t,x)$满足假设(A)和以下条件:

i)存在 $r<\frac{4\pi^2}{T^2}$,使得 $(\nabla G(x)-\nabla G(y),x-y)\geqslant -r|x-y|^2$,$\forall x,y\in\mathbf{R}^N$;ii)存在 $f,\omega\in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$以及 $\alpha\in[0,1)$使得 $|\nabla H(t,x)|\leqslant f(t)|x|^\alpha+\omega(t)$,$\forall x\in\mathbf{R}^N$,a. e. $t\in[0,T]$;iii) $\lim\limits_{|x|\rightarrow+\infty}\dfrac{\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t}{|x|^{2\alpha}}=+\infty$。

则问题 $\begin{cases}\ddot{u}(t)=\nabla F(t,u(t))\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0\end{cases}$, a. e. $t\in[0,T]$在 H_T^1 上至少存在一个极小化 φ 的周期解。

受到这个定理的启发,笔者获得了系统(1)的如下 2 个存在性定理。

定理 1　设 $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(x)$满足假设(A)以及 $F_1(t,x)$,$F_2(x)$满足以下条件:

* **收稿日期**:2012-12-17　**修回日期**:2013-03-20　**网络出版时间**:2013-11-20 14:46

资助项目:国家自然科学基金(No. 11261002);云南省科技厅应用基础项目(No. 2011FZ167);云南省教育厅科学研究基金(No. 09Y0367)

作者简介:王少敏,女,副教授,硕士,研究方向为非线性分析的研究,E-mail:shaominwang2006@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.103_046.html

i) 存在 $\omega \in L^1(0,T;\mathbf{R})$, $h \in L^1(0,T;\mathbf{R}^N)$ 且 $\int_0^T h(t)p(t)\mathrm{d}t = 0$ 使得 $F_1(t,x) \geqslant (h(t),x) + \omega(t)$, $\forall x \in \mathbf{R}^N$, a.e. $t \in [0,T]$; ii) 存在 $k \in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$ 以及 $\alpha \in (0,2)$ 使得 $(\nabla F_2(x) - \nabla F_2(y), x-y) \geqslant -k(t)|x-y|^\alpha$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^N$, a.e. $t \in [0,T]$; iii) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\int_0^T p(t)F_2(x)\mathrm{d}t = +\infty$。

则问题(1)在 H_T^1 上至少存在一个极小化 φ 的周期解。

定理 2 设 $F(t,x) = F_1(t,x) + F_2(x)$ 满足假设(A) 以及 $F_1(t,x)$, $F_2(x)$ 满足以下条件:

i) 存在 $\beta \in [0,1)$, $f, \omega \in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$ 使得 $|\nabla F_1(t,x)| \leqslant f(t)|x|^\beta + \omega(t)$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}^N$, a.e. $t \in [0,T]$; ii) 存在 $k \in L^1(0,T;\mathbf{R}^+)$ 且 $0 < \int_0^T k(t)dt < \frac{12d_1}{Td_2}$ 使得 $(\nabla F_2(x) - \nabla F_2(y), x-y) \geqslant -k(t)|x-y|^2$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^N$, a.e. $t \in [0,T]$; iii) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\int_0^T p(t)F(t,x)\mathrm{d}t}{|x|^{2\beta}} = +\infty$。

则问题(1)在 H_T^1 上至少存在一个极小化 φ 的周期解。

2 定理的证明

存在一个常数 $c_0 > 0$, 使得 $\|u\|_\infty \overset{\Delta}{=} \max\limits_{t\in[0,T]}|u(t)| \leqslant c_0\|u\|$, $\forall u \in H_T^1$。对任意的 $u \in H_T^1$, 令 $\widetilde{H}_T^1 = \{u \in H_T^1 \mid \int_0^T u(t)\mathrm{d}t = 0\}$, 显然, $\widetilde{H}_T^1$ 是 H_T^1 的一个子集, 且 $H_T^1 = \mathbf{R}^N \oplus \widetilde{H}_T^1$, 有 $\|u\|_\infty^2 \leqslant \frac{T}{12}\|\dot{u}\|_2^2$, $\forall u \in \widetilde{H}_T^1$ (Sobolev 不等式)。$\|u\|_2^2 \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\|\dot{u}\|_2^2$, $\forall u \in \widetilde{H}_T^1$ (Wirtinger 不等式)

令 $d_1 = \min\limits_{t\in[0,T]} p(t)$, $d_2 = \max\limits_{t\in[0,T]} p(t)$, 则 $d_1 > 0$, $d_2 > 0$。以下为定理 1 的证明。

证明 由条件 *i*)和 *Sobolev* 不等式, 有

$$\int_0^T p(t)F_1(t,u(t))\mathrm{d}t \geqslant \int_0^T p(t)[(h(t),\bar{u}+\tilde{u}(t)) + \omega(t)]\mathrm{d}t = \left(\int_0^T p(t)h(t)\mathrm{d}t, \bar{u}\right) + \int_0^T (p(t)h(t), \tilde{u}(t))\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)\omega(t)\mathrm{d}t \geqslant -\|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T p(t)|h(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)\omega(t)\mathrm{d}t \geqslant -C_1\|\dot{u}\|_2 + C_2 \tag{2}$$

由条件 ii)及 Sobolev 不等式, 有

$$\int_0^T p(t)[F_2(u(t)) - F_2(\bar{u})]\mathrm{d}t = \int_0^T p(t)\int_0^1 (\nabla F_2(\bar{u}+s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^T p(t)\int_0^1 (\nabla F_2(\bar{u}+s\tilde{u}(t)) - \nabla F_2(\bar{u}), \tilde{u}(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^T p(t)\int_0^1 \frac{1}{s}(\nabla F_2(\bar{u}+s\tilde{u}(t)) - \nabla F_2(\bar{u}), s\tilde{u}(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \geqslant -\int_0^T p(t)\int_0^1 \frac{1}{s}k(t)|s\tilde{u}(t)|^\alpha \mathrm{d}s\mathrm{d}t \geqslant -\|\tilde{u}\|_\infty^\alpha \int_0^T p(t)k(t)\mathrm{d}t \geqslant -C_3\|\dot{u}\|_2^\alpha \tag{3}$$

由(2),(3)式, 有

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T p(t)|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)F(t,u(t))\mathrm{d}t \geqslant \frac{d_1}{2}\|\dot{u}\|_2^2 + \int_0^T p(t)F_1(t,u(t))\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)[F_2(u(t)) - F_2(\bar{u})]\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)F_2(\bar{u})\mathrm{d}t \geqslant \frac{d_1}{2}\|\dot{u}\|_2^2 - C_1\|\dot{u}\|_2 + C_2 - C_3\|\dot{u}\|_2^\alpha + \int_0^T p(t)F_2(\bar{u})\mathrm{d}t, u \in H_T^1$$

由于有 $\|u\|_0 \to \infty \Leftrightarrow (|\bar{u}|^2 + \|\dot{u}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$, $u \in H_T^1$, 所以当 $\|u\|_0 \to \infty$ 时, 有 $\varphi(u) \to +\infty$, 从而根据定理 1.1[3] 和推论 1.1[3], 完成了定理 1 的证明。以下是定理 2 的证明。

证明 由条件 i)有

$$\left|\int_0^T p(t)[F_1(t,u(t)) - F_1(t,\bar{u})]\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^T p(t)\int_0^1 (\nabla F_1(t,\bar{u}+s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^T p(t)\int_0^1 f(t)|\bar{u}+s\tilde{u}(t)|^\beta \cdot |\tilde{u}(t)|\,dsdt + \int_0^T p(t)\int_0^1 \omega(t)|\tilde{u}(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T p(t)2f(t)(|\bar{u}|^\beta + |\tilde{u}(t)|^\beta)|\tilde{u}(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)\int_0^1 \omega(t)|\tilde{u}(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant 2(|\bar{u}|^\beta + \|\tilde{u}\|_\infty^\beta)\|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T p(t)f(t)\mathrm{d}t + \|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T p(t)\omega(t)\mathrm{d}t = 2|\bar{u}|^\beta \|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T p(t)f(t)\mathrm{d}t + 2\|\tilde{u}\|_\infty^{\beta+1}\int_0^T p(t)f(t)\mathrm{d}t + \|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T p(t)\omega(t)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{12d_1 - Td_2\int_0^T k(t)\mathrm{d}t}{4T}\ \|\tilde{u}\|_\infty^2 + \frac{4T}{12d_1 - Td_2\int_0^T k(t)\mathrm{d}t}\ |\bar{u}|^{2\beta}\left(\int_0^T p(t)f(t)\mathrm{d}t\right)^2 + 2\ \|\tilde{u}\|_\infty^{\beta+1}\int_0^T p(t)f(t)\mathrm{d}t +$$

$$\|\tilde{u}\|_\infty\int_0^T p(t)\omega(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{12d_1 - Td_2\int_0^T k(t)\mathrm{d}t}{48}\ \|\dot{u}\|_2^2 + C_1\ |\bar{u}|^{2\beta} + C_2\ \|\dot{u}\|_2^{\beta+1} + C_3\ \|\dot{u}\|_2 \qquad (4)$$

由条件 ii)及 Sobolev 不等式,有

$$\int_0^T p(t)[F_2(u(t)) - F_2(\bar{u})]\mathrm{d}t = \int_0^T p(t)\int_0^1 (\nabla F_2(\bar{u} + s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^T p(t)\int_0^1 (\nabla F_2(\bar{u} + s\tilde{u}(t)) - \nabla F_2(\bar{u}),$$

$$\tilde{u}(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \geqslant -\int_0^T p(t)\int_0^1 \frac{1}{s}k(t)\ |s\tilde{u}(t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \geqslant -\frac{1}{2}\ \|\tilde{u}\|_\infty^2\int_0^T p(t)k(t)\mathrm{d}t \geqslant -\frac{Td_2}{24}\ \|\dot{u}\|_2^2\int_0^T k(t)\mathrm{d}t \quad (5)$$

由(4),(5)式,有

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T p(t)\ |\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)F(t,u(t))\mathrm{d}t \geqslant \frac{d_1}{2}\ \|\dot{u}\|_2^2 + \int_0^T p(t)[F_1(t,u(t)) - F_1(t,\bar{u})]\mathrm{d}t +$$

$$\int_0^T p(t)[F_2(u(t)) - F_2(\bar{u})]\mathrm{d}t + \int_0^T p(t)F(t,\bar{u})\mathrm{d}t \geqslant \frac{d_1}{2}\ \|\dot{u}\|_2^2 - \frac{12d_1 - Td_2\int_0^T k(t)\mathrm{d}t}{48}\ \|\dot{u}\|_2^2 - C_1\ |\bar{u}|^{2\beta} -$$

$$C_2\ \|\dot{u}\|_2^{\beta+1} - C_3\ \|\dot{u}\|_2 - \frac{Td_2}{24}\int_0^T k(t)\mathrm{d}t\ \|\dot{u}\|_2^2 + \int_0^T p(t)F(t,\bar{u})\mathrm{d}t = \frac{12d_1 - Td_2\int_0^T k(t)\mathrm{d}t}{48}\ \|\dot{u}\|_2^2 -$$

$$C_2\ \|\dot{u}\|_2^{\beta+1} - C_3\ \|\dot{u}\|_2 + |\bar{u}|^{2\beta}\left(|\bar{u}|^{-2\beta}\int_0^T p(t)F(t,\bar{u})\mathrm{d}t - C_1\right)$$

由于有 $\|u\|_0 \to \infty \Leftrightarrow (|\bar{u}|^2 + \|\dot{u}\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$, $u \in H_T^1$,所以当 $\|u\|_0 \to \infty$时,有 $\varphi(u) \to +\infty$,从而根据定理 1.1[3] 和推论 1.1[3],完成了定理 2 的证明。

参考文献:

[1] Wu X, Chen S X, Teng K M. On variational methods for a class of damped vibration problems [J]. Nonlinear Anal, 2008, 68: 1432-1441.

[2] Berger M S, Schechter M. On the solvability of semi-linear gradient operator equations[J]. Adv Math, 1977, 25: 97-132.

[3] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and hamiltonian systems [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[4] Mawhin J. Semi-coercive monotone variational problems [J]. Acad Roy Belg Bull Cl Sci, 1987, 73(5): 118-130.

[5] Ma J, Tang C L. Periodic solutions for some non-autonomous second order systems[J]. J Math Anal Appl, 2002, 275: 482-492.

[6] Tang C L. Periodic solutions of non-autonomous second order systems with γ-quasisub-additive potential [J]. J Math Anal Appl, 1995, 189: 671-675.

[7] Tang C L. Periodic solutions of non-autonomous second order systems[J]. J Math Anal Appl, 1996, 202: 465-469.

[8] Tang C L. Periodic solutions for non-autonomous second order systems with sublinear nonlinearity[J]. Pro Amer Math Soc, 1998, 126: 3263-3270.

[9] Tang C L, Wu X P. Periodic solutions for second order systems with not uniformly coercive potential[J]. J Math Anal Appl, 2001, 259: 386-397.

[10] Wu X P, Tang C L. Periodic solutions of a class of non-autonomous second order systems[J]. J Math Anal Appl, 1999, 236: 227-235.

Research Periodic Solutions of Vibration Problem by the Least Action Principle

WANG Shao-min, YANG Cun-ji

(Department of Mathematics and Computer, Dali University, Dali Yunnan 671000, China)

Abstract: The purpose of this paper is to study the existence of periodic solutions of the following second order systems

$$\begin{cases}\ddot{u}(t) + q(t)\dot{u}(t) = \nabla F(t, u(t)) \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - e^{Q(T)}\dot{u}(T) = 0,\end{cases} \quad \text{a. e. } t \in [0, T]$$

When $F(t, x) = F_1(t, x) + F_2(x)$ satisfies assumption (A) and $F_1(t, x)$, $F_2(x)$ satisfy many solvability conditions. Some new existence theorems are obtained by the least action principle.

Key words: periodic solutions; the least action principle; second order systems

(责任编辑 欧红叶)