

排序博弈的分类、进展和展望*

唐国春¹, 樊保强², 刘丽丽¹

(1. 上海第二工业大学 经济管理学院, 上海 201209; 2. 鲁东大学 数学与统计学院, 山东 烟台 264025)

摘要:排序博弈是排序论与博弈论的交叉,是从优化的角度分析排序论中的博弈问题,也是从博弈的观点研究排序问题。排序博弈分为工件排序博弈和机器排序博弈两类,这两类又可以分别考虑合作的和非合作的情况,从而包括了多代理竞争排序在内的目前已经出现的种种排序博弈问题。研究工件排序博弈和机器排序博弈这两类排序博弈的对偶关系,是本文在理论上提出的新课题。排序博弈具有重要的理论意义和广阔的应用前景,势必会吸引更多的研究者,得到更大的发展。

关键词:排序;博弈;工件;代理;机器;对偶

中图分类号:O221.7

文献标识码:A

文章编号:1672-6693(2014)01-0006-09

1 排序博弈

在最优化理论和应用中排序(Scheduling)是为加工若干个工件(Job),而对工件及加工所需要的机器(Machine)按时间进行分配和安排,在完成所有工件加工时使得某个(些)目标为最优^[1]。1989 年 Curiel 等^[2]给出“Sequencing game”的定义;2005 年 Immorlica 等^[3]在文献中使用“Selfish scheduling game”,并简称为“Scheduling game”;2009 年 Feldman 等^[4]使用“Job scheduling game”。中文术语“排序博弈”是 2011 年在文献^[5]中提出的。排序博弈是排序论与博弈论的交叉,是从优化的角度分析排序论中的博弈问题,也是从博弈的观点研究排序问题。排序博弈这个定义比文献^[5]中提出排序博弈是“排序的两人合作博弈”更为宽泛。排序博弈的研究势必推动排序论和博弈论两门学科的进一步发展。

博弈是两个或者多个局中人(Player)之间的博弈,并且假设参与博弈的局中人都是追求自己利益最大的理性人。这种不同利益目标的多种考量在排序博弈中大都可归结为多目标优化模型。例如,多代理竞争排序(本文称为代理博弈)对于两个代理(局中人)的目标函数 γ_1 和 γ_2 来讲,如果是在第 1 个目标函数 γ_1 满足一定的约束条件下,使第 2 个目标函数 γ_2 为最优,这样得到的解称为约束解。特别,如果是在第 1 个目标函数 γ_1 为最优的条件下,使第 2 个目标函数 γ_2 为最优,这样得到的解称为多重解(Hierarchical solution)或者多层解(Stackelberg solution)。按照目标考虑的次序,可以提出多种字典序(Lexicographical order)的约束解和多重解。二是不同局中人利益目标的 Pareto 有效解(Efficient solution),简称为 Pareto 解,也称为非支配解或者非劣解要得到所有的 Pareto 解,或者说要得到所有有效点。三是构造权函数,是把不同局中人利益目标转化为单目标,得到所谓权函数解^[1]。

用一个简单的排序问题来说明排序博弈是如何从博弈的观点来研究排序问题的。设有 6 个工件 $\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}$ 要加工,加工之前都已经就绪,亦即这些工件的就绪时间都是 0,加工时间分别为 $p_j = j, j = 1, \dots, 4; p_5 = 1, p_6 = 3$ 。如果有 1 台机器可以加工这些工件,那么根据经典排序,考虑工件的交货期可以得到对于优化目标 $C_{\max}, L_{\max}, T_{\max}, \sum C_j, \sum U_j, \sum T_j$ 等的最优解或者近似解;如果还考虑工件的重要性(权),也可以研究带权的目标 $\sum w_j C_j, \sum w_j U_j, \sum w_j T_j$ 的最优解或者近似解。这些都是经典排序论中单台机器已经回答和

* 收稿日期:2013-08-03 修回日期:2013-10-25 网络出版时间:2014-01-16 08:16

资助项目:国家自然科学基金(No. 11001117; No. 11201439; No. 11271341)

作者简介:唐国春,男,教授,博士生导师,研究方向为排序论,E-mail: gctang@sspu.edu.cn;通讯作者:樊保强,E-mail: baoqiangfan@163.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140116.0816.025.html>

解决的问题。容易算出,这 6 个工件在 1 台机器上加工的工件总完工时间 $\sum C_j$ 最小是 38。这表明,要使 $\sum C_j$ 值小于 38 用 1 台机器是不可能的,那就要用 2 台甚至更多台平行机来加工。在单台机器的最优值或者近似值还不满意时,会提出 2 台甚至更多台平行机的排序问题^[1]。这是排序论研究的思路。从博弈的观点,对于机器加工上述 6 个工件 $\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}$ 的排序问题,如果这 6 个工件都是独立的理性的博弈局中人;或者这 6 个工件分为两组 $\{J_1, J_2, J_3, J_4\}, \{J_5, J_6\}$,分属于 2 个独立的“代理”作为博弈的局中人;每个局中人都有自己的优化目标;这些局中人要竞争(博弈)机器资源,采用合作或者非合作的方式加工工件,使得各自的利益(最优的目标)最大或者使得某个全局目标、约束目标、权函数目标最大,那么这种博弈局中人是工件的排序博弈,称为工件排序博弈,将在第 2 节中介绍,并按照工件是独立的局中人还是由“代理”作为局中人,又分为工件博弈(第 2.1 节)和代理博弈(第 2.2 节)两种。如果对于 2 台平行机 $\{M_1, M_2\}$ 加工上述 6 个工件的排序问题,这 2 台机器是博弈局中人,要竞争(博弈)6 个工件中部分或者全部工件加工,使得每个局中人(机器)的目标最优或者使得这 2 个局中人的收益的乘积为最大,那么这种博弈局中人是机器的排序博弈,称为机器排序博弈,将在第 3 节中介绍。

2 工件排序博弈

如果在排序问题中参与博弈的局中人是工件,那么这个排序博弈问题称为工件排序博弈,简称为工件博弈。这又可以分为两种情况:(1)工件是作为独立的局中人;(2)部分工件属于某个“代理(Agent)”,由代理作为局中人。在不会发生混淆的情况下,这两种情况分别称为工件博弈和代理博弈。默认的工件排序博弈是指工件作为独立的局中人的博弈。工件博弈可以看成是每个代理只“代理”一个工件情况下的代理博弈。所以,工件博弈是代理博弈的特殊情况。

2.1 工件博弈

工件博弈是工件作为独立的局中人参与博弈的工件排序博弈。对于 m 台机器 $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ 加工 n 个工件 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ 的排序问题,工件 $J_j (j=1, 2, \dots, n)$ 作为博弈的局中人,可根据协调机制和其它工件的信息自主选择有利于优化自身目标函数的机器进行加工。

工件对机器的选择称为工件的纯策略(Pure strategy),简称策略。工件 j 的策略记为 s_j ,策略集合记为 $S_j \subseteq \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ 。每个工件的策略选定后形成策略局势 $S = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ 是工件集到机器集的映射。如果在其它工件策略不变的情况下,任何工件不能通过单独改变策略使得自己的目标值小于原目标值,那么这个策略局势称为是纳什均衡(Nash equilibrium)^[6]。纳什均衡是博弈论的重要概念,它是非合作博弈中相对稳定的策略状态。此时,在其它局中人策略不变的情况下,理性的局中人是不会改变当前的策略的。

协调机制(Coordination mechanism)是一些排序规则(Scheduling policy)^[7],是确定机器如何安排所分配工件的次序^[8]。常用的排序规则有 LPT、SPT、MAKESPAN、RANDOM 和 EQUI 等。LPT 或者 SPT 规则是对于分配给该机器的工件,按照工件加工时间非增的或者非减的次序加工。规则 MAKESPAN、RANDOM 和 EQUI 的定义可以看文献[7]。协调机制的好坏是用所谓无序代价 PoA(Price of anarchy)来衡量。无序代价是定义为最坏纳什均衡代价与全局的最优值之比^[8]。

由于有些排序博弈不存在纳什均衡,2006 年 Angel 等^[9]提出 α -近似纳什均衡($\alpha \geq 1$)、 α -近似无序代价(Price of α -approximate anarchy)、 α -近似稳定代价(Price of α -approximate stability)等概念。某一策略状态是 α -近似纳什均衡,如果在其它工件策略不变的情况下,不存在工件能通过单独改变策略使得目标值降低到原来的 $1/\alpha$ 倍。当 $\alpha=1$ 时 α -近似纳什均衡就是纳什均衡。在 α -近似纳什均衡存在时,一个机制的 α -近似无序(或者稳定)代价是指在该机制下最差(或者最好)的 α -近似纳什均衡的目标值与最优全局目标值之比^[9]。

2.1.1 问题的提出 工件排序博弈问题产生于具有大规模匿名用户的系统,例如互联网系统。每个网络用户是一个局中人。他们使用网络搜索信息、下载文件等。用户具有独立的选择权和自利性。网络管理者如何制定既能尽量保证用户的满意度又有利于节省资源的网络协议成为重要的课题。

工件博弈首先要设计和研究适当的协调机制和排序规则,除了排序论中已经很熟悉的 SPT、LPT、EDD、WSPT 等外,诸如多项式时间的 Moore-Hodgson 算法都可以是设计和选择作为协调机制和机器规则。其次,工

件对机器的选择,即工件的纯策略也是要设计和研究的。对于第 1 节中那个排序问题,如果 6 个工件选择机器的策略是 $S_j = M_1, j = 1, \dots, 4; S_j = M_2, j = 5, 6$, 那么对于 SPT 规则(机制), 机器 M_1 上工件加工的次序是 J_1, J_2, J_3, J_4 , 机器 M_2 上工件加工的次序是 J_5, J_6 ; 对于 LPT 规则(机制), 机器 M_1 上工件加工的次序是 J_4, J_3, J_2, J_1 , 机器 M_2 上工件加工的次序是 J_6, J_5 。最后, 对工件(局中人)所关心的 $C_{\max}$ 、 $\sum C_j$ 或者其他优化目标分析其无序代价等。

2.1.2 进展 文献[7]列出优化目标是 $C_{\max}$ 的 4 种平行机(同型机 P 、同类机 Q 、限制同型机 B 、非同类机 R) 在 5 种机制下的无序代价 PoA 。文献[3]把限制同型机(Restricted identical parallel machine)称为 Bipartite machine, 因而用 B 来表示。文献[7]表明, 除了 P 和 Q 具有 PoA 为常数的协调机制, 其他排序模型尚未有 PoA 为常数的机制。实际上, Azar 等^[8]和 Fleischer 等^[10]证明对于 $B \parallel C_{\max}$, 即使工件的加工时间是一个单位, 任何“合理”的确定性(Deterministic)机制的 PoA 都不可能是常数。MAKESPAN、SPT、LPT 机制的共同特点是具有强局部性, 机器在安排加工顺序时只根据工件在本机器上所需的加工时间, 不关注其在别的机器上的加工时间。Azar 等^[8]在设计 $R \parallel C_{\max}$ 的机制时有新的突破, 机器在安排加工次序时既关注在本机器上所需的加工时间, 也关注在别的机器上的加工时间, 得到 PoA 为 $O(\log m)$ 的机制, 并证明所有不可中断、具有强局部性机制的 PoA 至少为 $m/2$ 。2009 年 Caragiannis^[11]对 $R \parallel C_{\max}$ 设计 3 个可中断、具有局部性的机制, 并证明它们的 PoA 分别为 $O(\log m)$ 、 $\Theta(\log m / \log \log m)$ 、 $O(\log^2 m)$, 改进了 Azar 等^[8]的结果。这里 Θ 表示有相同增长速度的等价类(见文献[12]的中译本《组合最优化: 算法和复杂性》第 201 页)。谈之奕等^[13]给出 2 台同类机在 MAKESPAN 机制下使机器最小负载为最大时 PoA 和 PoS (Price of stability)的紧界。叶德仕等^[14]研究 d 维向量排序博弈问题, 使机器一维最大负载为最小, 给出 PoA 分析, 证明其界位于区间 $[d, d+1-d/m]$ 内。叶德仕等^[15]还研究并行工件排序博弈, 提出基于 Bottom-Left 和 Shelf Packing 策略的两类协调机制并分析这些机制的 PoA 。

目前研究工件博弈的近似纳什均衡问题的文献较少。Angel 等^[9]证明, 对于 $P2 \parallel C_{\max}$ 问题 LPT 机制 3-近似稳定代价是 $8/7$ 。MAKESPAN 机制下的工件博弈是拥塞博弈(Congestion game)的特殊情形, 文献[16-18]对拥塞博弈的近似纳什均衡的计算复杂性、近似稳定代价、近似纳什均衡的无秩序代价进行研究。

随着协调机制研究的深入, 提出衡量机制性能的新参数和均衡的新概念。2007 年, Andelman 等^[19]提出强无序代价 $SPoA$ (Strong price of anarchy)、 k -强无序代价 k - $SPoA$ 等概念, 文献[20-23]等得到许多相关成果。2009 年 Albers^[24]提出近似强纳什均衡的概念。2009 年 Feldman 等^[25]研究 $P \parallel C_{\max}$ 的纳什均衡的稳定性时提出三种新参数: $IR_{\min}$ (最小改善因子)、 $IR_{\max}$ (最大改善因子)和 $DR_{\max}$ (最大破坏因子)。文献[26-30]探讨全局目标函数是(带权)总完工时间的工件博弈的协调机制。研究协调机制的还有文献[31-37]。

陈礴等^[38]研究同型机的工件博弈, 代表工件的每个局中人需要在 m 台同型机中选择一台来加工工件, 使其工件的费用达到最小, 每个工件的费用为加工该工件的机器上的负载。强纳什均衡解有比纳什均衡解更好的稳定性。由于强纳什均衡解不一定存在, 即使存在, 寻找强纳什均衡解也是强 NP 困难的。因此, 用纳什均衡解来近似强纳什均衡解有重要的意义。当 $m = 2$ 时任何一个纳什均衡解都是强纳什均衡解, 文献[38]证明, 当 $m \geq 3$ 时任何一个纳什均衡解都是 $5/4$ -近似强纳什均衡的, 而且是紧的。

蔡小强等^[39]研究以排序博弈为基础, 在制造业生产规划方面应用广泛的实际问题: 合作外包问题。制造商通过在第三方企业预定时间窗并支付相应的费用来加工自己的工件。与以往工件博弈主要以 $C_{\max}$ 和 $\sum w_j C_j$ 为优化目标不同, 蔡小强等^[39]的研究以预定费用、工件延误(Tardiness)交付的费用为主要目标, 并允许第三方企业通过额外加班来加速工件加工的比较复杂的现实问题。通过建立合作博弈模型, 他们设计让制造商和第三方企业同时受益的费用分配机制。值得一提的是, 他们开创性地设计迫使制造商“说真话”的子机制(Truth-Telling Mechanism), 这种“预订-最优化-协调-防假话”四位一体的机制也为解决教育和医疗等重要社会公共资源分配中的大量实际问题提供可能的全新解决方案。

2.1.3 展望 目前对于工件排序博弈的纳什均衡、协调机制的研究已经获得较多好的研究成果, 但协调机制对于平行机中不同的机器大多是采用相同的机器规则, 而对于机器采用不同规则的协调机制研究还很少^[40, 41]。此外, 研究 $C_{\max}$ 和 $\sum w_j C_j$ 以外的优化目标, 还有许多工作可做。

2.2 代理博弈

代理博弈是所有工件分属于“代理”,由代理作为局中人参与博弈的工件排序博弈。有的学者把这种代理博弈问题称为多代理竞争排序或者多代理排序^[42-44]。在代理博弈中工件分为组,每组由一个代理负责,这些代理竞争公共的机器资源用以加工其代理的工件。每个代理都有自己的优化目标,并且都想选择有利于自身优化目标的工件加工顺序。

2.2.1 问题的提出 代理博弈最初是从现代制造业中提出的。例如,两个公司合资建设和共用一条新的柔性制造系统生产各自大型和昂贵的产品^[43],这两个公司(代理商、参与者)有自己的工件(产品)需要加工。又如,不同航空公司的多个航班共用机场的若干条跑道,一个港口要为多个船只安排泊位和运输(包括人员、起重机和通道)等。

对于第 1 节中那个排序问题,如果有 2 个代理 A 和 B 分别代理工件集 $\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ 和 $\{J_5, J_6\}$,要竞争(博弈)1 台机器资源,代理 A 的优化目标是工件的总完工时间,代理 B 的优化目标是工件的最大完工时间。代理博弈是按时间对工件和机器进行分配和安排,使得 2 个代理的目标为最小。由于在可行排序中把代理 B 先加工的那个工件向后移动,与其所代理的后面工件接连加工,是不会增加代理 A 和 B 的目标函数值。因此,可以把工件 J_5 和 J_6 看成是 1 个工件 J_5' ,其加工时间是 $p_5' = p_5 + p_6 = 1 + 3 = 4$ 。

由 J_1, J_2, J_3, J_4, J_5' 的 SPT 序,可以得到代理 A 的最小目标函数值 20。如果代理 B 的工件是在代理 A 所有工件完工之后加工,那么其目标函数值是 14。如果 B 可以接受该目标值,问题就此结束,最终的工件顺序是 $(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6)$,其对应的 Pareto 点是(20,14)。事实上,14 是 B 的最大目标函数值。如果 B 不能接受该目标值,则需要继续考虑其他的 Pareto 点。容易得到该问题的 Pareto 点集 $\{(20,14), (24,10), (28,7), (32,5), (36,4)\}$ 。他们对应的排序分别为 $(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5')$, $(J_1, J_2, J_3, J_5', J_4)$, $(J_1, J_2, J_5', J_3, J_4)$, $(J_1, J_5', J_2, J_3, J_4)$, 和 $(J_5', J_1, J_2, J_3, J_4)$ 。在 Pareto 点集中代理 B 的最小目标函数值是 4,此时 A 是最大目标函数值 36,即点(36,4),该点对应的工件加工顺序 $(J_5', J_1, J_2, J_3, J_4)$,即 $(J_5, J_6, J_1, J_2, J_3, J_4)$ 是对代理 A 最有利的。最后,代理商将通过协商和谈判,在 Pareto 点集中寻找一个使双方都能够接受的工件加工方案。

2.2.2 进展 代理博弈的研究始于 Agnetis 等^[42]和 Baker 等^[44]。Agnetis 等^[42]对于两代理博弈,讨论常用的正则目标 $C_{\max}, L_{\max}, f_{\max}, \sum w_j C_j, \sum U_j, \sum T_j$ 和 $\sum f_j$ 等,研究单机或者多工序串联机的约束问题,还解决部分 Pareto 问题。Baker 等^[44]研究两个代理的目标函数带权之和为最优的问题。Leung 等^[45]研究两代理博弈,给出有效(多项式)的算法或者 NP 困难的证明,对文献[42]中的一个未解(Open)问题给出 NP 困难的证明。Mor 等^[46]考虑的目标函数是 $E_{\max}$ (Maximum earliness) 和 $\sum w_j E_j$ (Total weighted earliness); Ng 等^[47]考虑的目标函数是 $\sum C_j$ 和 $\sum U_j$ 。李士生等^[48]和樊保强等^[49]研究 Parallel-batching 机器环境下的两代理博弈。Mor 等^[50]研究 Serial-batching 机器环境下的两代理博弈。万国华等^[51]和刘鹏等^[52-54]分别研究工件加工时间可控、恶化工件和学习效应等情形下的两代理博弈。Agnetis 等^[55]和 Cheng 等^[56]讨论多个代理的 Pareto 问题,其中代理的目标函数都是 $f_{\max}$ 类型。对于目标函数为 $\sum w_j U_j$ 的多代理博弈,Cheng 等^[57]研究其计算复杂性,并且提出近似算法。

对于代理的目标带权之和的第三类问题,Baker 等^[44]对于 3 个基本的排序目标函数 $C_{\max}, L_{\max}$ 和 $\sum w_j C_j$ 的不同组合形式,或者给出多项式时间算法,或者给出 NP 困难的证明。对于文献[44]中的问题 $1 \parallel L_{\max}^A + \alpha L_{\max}^B$ 和 $1 \parallel \sum C_j^A + \alpha L_{\max}^B$,原晋江等^[58]给出多项式时间的动态规划算法。农庆琴等^[59]对两代理博弈 $1 \parallel \sum w_j^A C_j^A + \max_{1 \leq j \leq n} w_j^B C_j^B$ 给出 2 近似算法和 PTAS。Cheng 等^[56]研究 $1 \parallel \sum_{1 \leq i \leq m} L_{\max}^i, 1 \parallel \sum_{1 \leq i \leq n} T_{\max}^i$, 与 $1 \parallel \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n_i} w_j^i C_j^i$ 的计算复杂性,并讨论多项式时间可解情形。

2.2.3 展望 代理博弈已经有不少研究成果,但对于比较复杂的机器环境,例如,流水作业和异序作业,则几乎还没有涉及。当前的研究大多停留在问题的复杂性上,对于 NP 困难的启发式算法的研究尚不足^[60]。此外,设

计代理在所有非劣解中寻找妥协解的协调机制和算法,研究非合作代理博弈问题的均衡点等,都可以作为进一步研究的方向。

3 机器排序博弈

如果在排序问题中参与博弈的局中人是机器,那么把这个排序博弈问题称为机器排序博弈,简称为机器博弈。

3.1 问题的提出

在现实世界中,往往存在一方无法承担一个项目中全部工件加工任务的情况。这就考虑由两方合作共同完成任务,每一方都有一台机器用于加工工件。双方通过协商,确定这批工件的一个划分把工件分配给这两台机器,使得相应的合作(加工)收益分配合理,能够被双方接受。这就是两台平行机的机器(合作)博弈。

对于第 1 节中那个排序问题,如果 6 个工件 $\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}$ 由 2 台平行机竞争(博弈)加工,各方只考虑自己的成本和收益来选择部分工件加工,不考虑对方,也不考虑社会“整体”利益,这是非合作博弈,可以找出相应的 Pareto 解集。如果在适当选择加工的成本和收益后,协调如何分配和安排工件和机器,在完成所有工件加工时使得这 2 台机器的收益的乘积为最大,这就是合作博弈。这是第 1 节中提到的把两个优化目标收益的乘积作为权函数。把乘积作为优化的目标正是 Nash 首创两人合作博弈问题所定义的目标函数^[61,62],其涵义和推广请看文献[5]。

3.2 进展

陈全乐^[63]首先提出两台机器合作排序博弈问题,对于以 $\sum w_j C_j, \sum U_j$ 为加工成本的合作排序博弈给出 NP 困难的证明和拟多项式时间的动态规划算法,从而说明这两个排序博弈是普通 NP 困难的。在修改导出纳什谈判解(NBS)的原来优化问题后,顾燕红等^[64]提出谈判机制,定义相关的谈判解集来实现获利的效率和公平之间所需要的平衡;顾燕红等^[64]还证明,这个机制既适合于纳什原来的凹谈判模型,也适合推广到连续的情形,而且不需要利润分配 Pareto 解的凹性。顾燕红等^[65]对于以 $L_{\max}$ 为加工成本的合作排序博弈给出拟多项式时间的动态规划算法。

借用排序问题的三参数 $\alpha | \beta | \gamma$,两台机器合作博弈可以表示为^[5]: $G2 | \beta | v_1 v_2 / f_i$, 其中第一个参数 $\alpha = G2$ 表示是两台机器合作博弈, G 是 game 的意思;第二个参数 β 描述工件的特征;第三个参数 $\gamma = v_1 v_2 / f_i$ 是优化的目标,不同于排序问题使得优化的目标为最小,这里是以 f_i 作为加工成本,使得收益函数的乘积 $v_1 v_2$ 为最大。例如,文献[5]研究相同工件最大完工时间排序的两人合作博弈问题用三参数可以表示成 $G2 | p_j = p | v_1 v_2 / C_{\max}$ 。

以 $C_{\max}, \sum C_j, \sum w_j C_j, L_{\max}, \sum U_j, \sum w_j U_j, \sum T_j, \sum w_j T_j$ 为加工成本的两台机器合作博弈可以证明都是 NP 困难的,对于工件加工时间相同的某些特殊情况也已经找到多项式时间解法。笔者得到的成果已经发表或者等待发表。例如, $G2 | p_j = p | v_1 v_2 / C_{\max}$ ^[5], $G2 | p_j = p | v_1 v_2 / \sum C_j$ ^[66], 和 $G2 | p_j = p | v_1 v_2 / L_{\max}$ ^[65] 都是多项式时间可解的。

3.3 展望

相比工件排序博弈(包括工件博弈和代理博弈),机器排序博弈还刚刚起步,发展的空间更为广阔。两台平行机之间的机器博弈还有许多题目可做。例如,对于带权的机器排序博弈问题,可以考虑权与加工时间是一致的(Agreeable)特殊情况;也可以考虑就绪时间不相等,而与其它参数一致的(Agreeable)的情况。又如,还可以考虑在线和半在线的情况,考虑加工时间可变的情况^[67]。至于 3 台及更多台机器博弈的研究尚未开始做。

4 进一步研究

本文提出排序博弈是排序论与博弈论的交叉,是从优化的角度分析排序论中的博弈问题,也是从博弈的观点研究排序问题;把排序博弈分为工件(排序)博弈和机器(排序)博弈两类,并按照工件是独立的局中人还是由“代理”作为局中人,又分为工件博弈和代理博弈两种。这 3 种排序博弈又都可以考虑合作和非合作的情况。

如果简单地概括这 3 种排序博弈的现状,工件博弈是用无序代价 P_oA 等参数来衡量协调机制的优劣,以设计和选用更为优良的协调机制;代理博弈是研究不同代理的 Pareto 解,或者是研究不同代理目标的带权之和;机

器博弈是研究两台机器的合作博弈。代理博弈还没有涉及经典博弈论中 Nash 均衡(非合作解),这 3 种排序博弈都还没有涉及 Core 和 Shapley 值等重要的合作博弈解的概念。这表明排序博弈还有很大的发展空间。3 种排序博弈目前处于 3 种不同的状态,展示排序博弈还可以深入到不同的研究方向。

4.1 排序博弈问题的记号表示和进一步分类

排序问题的 3 参数 $\alpha|\beta|\gamma$ 表示^[68]对于排序问题的描述、研究和介绍起了重要的推动作用。在工件博弈、代理博弈和机器博弈等 3 类排序博弈已经有了一定发展的基础上,提出和使用简明、方便的记号来表示排序博弈,这个问题已经提到日程。这实质上也是对 3 类排序博弈进一步细分,对于深入理解和进一步研究排序博弈是至关重要的。鉴于排序博弈是从博弈的观点研究排序问题,所以在排序问题 3 参数表示的基础上做适当扩充来表示排序博弈是可行的。当然,同时考虑到排序博弈是研究排序论中的博弈,还应该有博弈论的色彩。

4.2 排序博弈的系统研究

迄今为止,排序博弈还只是停留在个别问题和典型模型的求解,还没有进入到系统深入的研究和分析。这与第 4.1 节提到排序博弈问题的记号表示有关。最主要是这三类博弈相互之间没有建立联系,相互关系还不清晰。例如,代理博弈是否也可以研究和选择适当的协调机制和排序规则,定义相应的无序代价 PoA 等参数,分析协调机制的优劣。从排序博弈的分类可知“工件博弈是代理博弈的特殊情况”。这两者的无序代价 PoA 等参数之间必然存在联系,这可能是今后可以研究的课题之一。

4.3 排序博弈的对偶关系

工件和机器在排序论中是相互依存的双方,是对偶的双方。研究工件和机器之间的对偶性,研究排序问题与其对偶排序之间的对偶关系,已经引起排序论学界的关注^[69]。那么,工件作为局中人对于“竞争”机器的博弈(工件排序博弈)与机器作为局中人对于“竞争”工件的博弈(机器排序博弈)之间,是否存在着紧密、深刻的对偶关系,自然是很有趣的课题。例如,相应于工件博弈的协调机制和无序代价等参数,是否可以定义机器博弈的协调机制“无序代价”等参数,并研究这两种协调机制和无序代价等参数之间的定性和定量关系,可能是更为有趣的课题。

虽然已经出现许多有意义的成果,展现出排序博弈蓬勃发展的强劲势头,然而,应该说排序博弈还刚刚起步,还有很大的发展空间,许多研究方兴未艾。本文只是浏览排序博弈大潮中一些靓丽的浪花,还没有顾及这浪潮中的所有层面,难免遗漏部分成果。请感兴趣者与笔者联系,在适当时候将召开研讨会,研讨排序博弈发展中的有关问题。真诚地希望排序论学科和博弈论学科双方的专家都来关心排序博弈,指出错误和不足,推进排序博弈这个新的分支不断成长。

致谢:方奇志和农庆琴两位参与本文的准备和撰写,高红伟和张强两位提出修改意见,上海第二工业大学排序讨论班讨论本文,多位审稿专家提出中肯的意见,在此一并表示感谢!

参考文献:

- [1] 唐国春,张峰,罗守成,等. 现代排序论 [M]. 上海:上海科学普及出版社,2003.
Tang G C,Zhang F,Luo S C,et al. Theory of modern scheduling [M]. Shanghai:Shanghai Popular Science Press,2003.
- [2] Curiel I,Pederzoli G,Tijs S. Sequencing games [J]. Euro J of Oper Res,1989,40:344-351.
- [3] Immorlica N,Li L,Mirroknii V S,et al. Coordination mechanisms for selfish scheduling [C]. // Proceedings of the 1st International Workshop on Internet and Network Economics (WINE),2005,55-69.
- [4] Feldman M,Tamir T. Approximate strong equilibrium in job scheduling games [J]. J of Arti Inte Res,2009,36:387-414.
- [5] 金雾,顾燕红,唐国春. 最大完工时间排序的两人合作博弈 [J]. 上海第二工业大学学报,2011,28(1):14-17.
Jin J,Gu Y H,Tang G C. Two-Person cooperative games on makespan scheduling [J]. J of Shanghai Second Polytechnic University,2011,28(1):14-17.
- [6] Aumann R. Acceptable points in general cooperative n-Person games [M]. // Luce R D,Tucker A W. Contributions to the Theory of Games IV,Annals to Mathematical,study 40 Princeton;Princeton University Press,1959,287-324.
- [7] Cohen J,Durr C,Thang N K. Non-clairvoyant scheduling games [J]. Theo of Com Sys,2011,49(1):3-23.
- [8] Azar Y,Jain K,Mirroknii V. (Almost) Optimal coordination mechanisms for unrelated machine scheduling [C]. //

- 19th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), ACM-SIAM, San Francisco, 2008, 323-332.
- [9] Angel E, Bampis E, Pascual F. The Price of approximate stability for scheduling selfish tasks on two links [J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, 4128: 157-166.
- [10] Fleischer L, Svitkina Z. Preference-constrained oriented matching [C]. // 7th Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO 2010), SIAM, Austin, 2010, 56-65.
- [11] Caragiannis I. Efficient coordination mechanisms for unrelated machine scheduling [C]. // Proceedings of the 20th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2009, 815-824.
- [12] Papadimitriou C H, Steiglitz K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity [M]. Printice-Hall Inc. , 1982.
- [13] Tan Z Y, Wan L, Zhang Q, et al. Inefficiency of equilibria for the machine covering game on uniform machines [J]. *Acta Informatica* , 2012, 49: 361-379.
- [14] Ye D S, Chen J H. Non-cooperative games on multidimensional resource allocation [J]. *Future Generation Comp Syst*, 2013, 29(6): 1345-1352.
- [15] Ye D S, Zhang G C. Coordination mechanisms for selfish parallel jobs scheduling [J]. *TAMC 2012*: 225-236.
- [16] Caragiannis I, Fanelli A, Gravin N, et al. Efficient computation of approximate pure Nash equilibria in congestion games [C]. // Proceeding FOCS '11 Proceedings of the 2011 IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 2011, 532-541.
- [17] Chien S, Sinclair A. Convergence to approximate Nash equilibria in congestion games [J]. *Games and Economic Behavior*, 2011, 71(2): 315-327.
- [18] Christodoulou G, Koutsoupias E, Spirakis P G. On the performance of approximate equilibria in congestion games [J]. *Algorithmica*, 2011, 61: 116-140.
- [19] Andelman N, Feldman M, Mansour Y. Strong price of anarchy [C]. // Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2007, 189-198.
- [20] Awerbuch B, Azar Y, Richter Y, et al. Tradeoffs in worst-case equilibria [J]. *Theoretical Computer Science*, 2006, 361(23): 200-209.
- [21] Andelman N, Feldman M, Mansour Y. Strong price of anarchy [C]. // Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 2007, 189-198.
- [22] Epstein L. Equilibria for two parallel links: the strong price of anarchy versus the price of anarchy [J]. *Acta Informatica*, 2010, 47: 375-389.
- [23] Fiat A, Kaplan H, Levy M, et al. Strong price of anarchy for machine load balancing [C]. // Proceedings of the 34th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, 2007, 583-594.
- [24] Albers S. On the value of coordination in network design [J]. *SIAM Journal on Computing*, 2009, 38(6): 2273-2302.
- [25] Feldman M, Tamir T. Approximate strong equilibrium in job scheduling games [J]. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2009, 36: 387-414.
- [26] Cole R, Gkatzells V, Mirrokni V. Coordination mechanisms for weighted sum of completion times [Z]. Manuscript, 2010.
- [27] Cole R, Correa J R, Gkatzelis V, et al. Inner product spaces for minSum coordination mechanisms [C]. // Proceeding STOC'11 Proceedings of the 43rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 2011, 539-548.
- [28] Correa J, Queyranne M. Efficiency of equilibria in restricted uniform machine scheduling with MINSUM social cost [Z]. Manuscript, 2010.
- [29] Hoeksma R. Price of anarchy for machine scheduling games with sum of completion times objective [D]. Master Thesis, University of Twente, 2010.
- [30] Hoeksma R, Uetz M. The price of anarchy for minsum related machine scheduling [J]. *Lecture Notes on Computer Science*, 2012, 7164: 261-273.
- [31] Agussurjaa L, Lau H C. The price of stability in selfish scheduling games [J]. *Web Intelligence and Agent Systems: An International Journal*, 2009, 7: 321-332.
- [32] Anshelevich E, Dasgupta A, Kleinberg J M, et al. The price of stability for network design with fair cost allocation [C]. // FOCS, 2004, 295-304.
- [33] Chen B, Gurel S. Efficiency analysis of load balancing games with and without activation costs [J]. *Journal of Scheduling*, 2012, 15(2): 157-164.
- [34] Fotakis D, Kontogiannis S, Koutsoupias E, et al. The structure and complexity of Nash equilibria for a selfish routing game [C]. // Pro. 29th Intl. Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP), 2002, 123-134.
- [35] Heydenreich B, Muller R, Uetz M. Games and mechanism design in machine scheduling: an introduction [J]. *Production & Operations Management*, 2007, 16(4): 437-454.
- [36] 王长军, 贾永基, 徐琪, 等. 并行机下独立任务调度的无秩序代价分析 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(5): 44-50.
- Wang C J, Jia Y J, Xu Q, et al. Price of anarchy analysis for scheduling selfish tasks on parallel machines [J]. *Jour-*

- nal of Management Sciences in China, 2010, 13(5): 44-50.
- [37] 王长军, 王志宏, 贾永基. 单机排序模型下自利任务的无秩序代价分析与机制设计[J]. 东华大学学报: 自然科学版, 2010, 36(6): 680-685.
- Wang C J, Wang Z H, Jia Y J. Price of anarchy and mechanism design for single machine scheduling among selfish tasks[J]. Journal of Donghua University: Natural Science, 2010, 36(6): 680-685.
- [38] Chen B, Li S S, Zhang Y Z. Strong stability of Nash equilibria in load balancing games [C]. // International Symposium on Combinatorial Optimization, University of Oxford, 2012.
- [39] Cai X Q, Vairaktarakis G L. Coordination of outsourced operations at a third-party facility subject to booking, overtime, and tardiness costs [J]. Operations Research, 2012, 60(6): 1436-1450.
- [40] Christodoulou G, Koutsoupias E, Nnavati A. Coordination mechanisms[J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410: 3327-3336.
- [41] 赵婷, 农庆琴, 方奇志. 两台平行机排序博弈问题的协调机制 [J]. 中国海洋大学学报: 自然科学版, 2013, 43(7): 110-114. .
- Zhao T, Nong Q Q, Fang Q Z. A coordination mechanism for a scheduling game problem with two parallel machines [J]. Journal of Ocean University of China: Natural Science, 2013, 43(7): 110-114.
- [42] Agnetis A, Mirchandani P B, Pacciarelli D, et al. Scheduling problems with two competing agents [J]. Operations Research, 2004, 52: 229-242.
- [43] Agnetis A, Mirchandani P B, Pacciarelli D, et al. Nondominated schedules for a job-shop with two competing users [J]. Computational & Mathematical Organization Theory, 2000, 6: 191-217.
- [44] Baker K R, Smith J C. A multiple-criterion model for machine scheduling [J]. Journal of Scheduling, 2003, 6: 7-16.
- [45] Leung J Y-T, Pinedo M, Wan G H. Competitive two-agent scheduling and its applications [J]. Operations Research, 2010, 58: 458-469.
- [46] Mor B, Mosheiov G. Scheduling problems with two competing agents to minimize minmax and minsum earliness measures [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 206: 540-546.
- [47] Ng C T, Cheng T C E, Yuan J J, A note on the complexity of the problem of two-agent scheduling on a single machine [J]. J of Combinatorial Optimization, 2006, 12: 387-394.
- [48] Li S S, Yuan J J. Unbounded parallel-batching scheduling with two competitive agents[J]. J of Scheduling, 2012, 12: 629-640.
- [49] Fan B Q, Cheng T C E, Li S S, et al. Bounded parallel-batching scheduling with two competing agents [J]. J of Scheduling, 2013, 16(3): 261-271.
- [50] Mor B, Mosheiov G. Single machine batch scheduling with two competing agents to minimize total flowtime [J]. European Journal of Operational Research, 2011, 215: 524-531.
- [51] Wan G H, Vakati S R, Leung J Y-T, et al. Scheduling two agents with controllable processing times [J]. European J of Operational Research, 2010, 205: 528-539.
- [52] Liu P, Tang L X, Zhou XY. Two-agent group scheduling with deteriorating jobs on a single machine [J]. International J of Advanced Manufacturing Technology, 2010, 47(5): 657-664.
- [53] Liu P, Zhou X Y, Tang L X. Two-agent single-machine scheduling with position-dependent processing times [J]. International J of Advanced Manufacturing Technology, 2010, 48(1): 325-331.
- [54] Liu P, Yi N, Zhou X. Two-agent single-machine scheduling problems under increasing linear deterioration [J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(5): 2290-2296.
- [55] Agnetis A, Pacciarelli D, Pacifici A. Multi-agent single machine scheduling [J]. Annals of Operations Research, 2007, 150: 3-15.
- [56] Cheng T C E, Ng C T, Yuan J J. Multi-agent scheduling on a single machine with max-form criteria [J]. European J of Operational Research, 2008, 188: 603-609.
- [57] Cheng T C E, Ng C T, Yuan J J. Multi-agent scheduling on a single machine to minimize total weighted number of tardy jobs [J]. Theoretical Computer Science, 2006, 362: 273-281.
- [58] Yuan J J, Shang W P, Feng Q. A note on the scheduling with two families of jobs [J]. J of Scheduling, 2005, 8: 537-542.
- [59] Nong Q Q, Cheng T C E, Ng C T. Two-agent scheduling to minimize the total cost [J]. European J of Operational Research, 2011, 215: 39-44.
- [60] Cheng T C E, Cheng S R, Wu W H, et al. A two-agent single-machine scheduling problem with truncated sum-of-processing-times-based learning considerations [J]. Computers & Industrial Engineering, 2011, 60: 534-541.
- [61] Nash J F. The bargaining problem [J]. Econometrica, 1950, 18: 155-162.
- [62] Nash J F. Two person cooperative games [J]. Econometrica, 1953, 21: 128-140.

- [63] Chen Q L. A new discrete bargaining model on job partition between two manufacturers [D]. PhD. Dissertation, the Chinese University of Hong Kong, 2006.
- [64] Gu Y H, Goh M, Chen Q L, et al. A new two-party bargaining mechanism [J]. J of Combinatorial Optimization, 2013, 25: 135-163.
- [65] Gu Y H, Fan J, Tang G C, et al. Maximum latency scheduling problem on two-person cooperative games [J]. J of Combinatorial Optimization, 2013, 26(1): 71-81.
- [66] 窦文卿, 顾燕红, 唐国春. 总完工时间排序两人合作博弈的纳什博弈解[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2012, 29(5): 1-5.
- Dou W Q, Gu Y H, Tang G C. The Nash bargaining solution(s) of two-person cooperative games on total completion time scheduling [J]. J of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012, 29(5): 1-5.
- [67] 顾燕红, 金霁, 唐国春. 加工时间可变最大流程时间排序的纳什合作博弈[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2012, 29(4): 18-23.
- Gu Y H, Jin J, Tang G C. Nash bargaining on maximum flow time scheduling with changeable processing time [J]. J of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012, 29(4): 18-23.
- [68] Graham R L, Lawler E L, Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey [J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5: 287-326.
- [69] 唐国春, 陈荣军, 张峰. 排序论中工件和机器的对偶性[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2013, 30(5): 1-5.
- Tang G C, Chen R J, Zhang F. The duality of jobs and machines in scheduling [J]. J of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(5): 1-5.

Operations Research and Cybernetics

Classifications, Advances and Prospects of Scheduling Games

TANG Guo-chun¹, FAN Bao-qiang², LIU Li-li¹

(1. School of Economics and Management, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209;

2. School of Mathematics and Statistics, Ludong University, Yantai Shandong 264025, China)

Abstract: Scheduling games are at the interface of scheduling theory and game theory, which not only analyze game problems in scheduling theory from the optimization, but also solve scheduling problems from game's view. Scheduling games are divided into two kinds: job (scheduling) games and machine (scheduling) games. Both of them have cooperative and non-cooperative ones including multi-agent scheduling and other scheduling games, all of have appeared up to now. In this paper we propose a new topic on dual relationships between job games and machine games. Scheduling games have important theoretical significances and wide application prospects. They will attract more teachers and student to study them and get further development.

Key words: scheduling; game; job; agent; machine; dual

(责任编辑 李若溪)