DOI:10.11721/cqnuj20140208

离散非线性系统的混沌同步问题*

毛北行[1], 孟晓玲[1], 卜春霞[2]

(1. 郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015; 2. 郑州大学 数学系, 郑州 450001)

摘要: 本文研究了离散非线性系统的混沌同步问题,即驱动系统为 $x(k+1)=f(x(k))$,响应系统为 $\hat{x}(k+1)=f(\hat{x}(k))+u(k)$ 构成的混沌系统的同步问题。基于 Lyapunov 稳定性理论给出了控制律的设计,选取控制律 $u(k)=-e(k+1)$ 下,得到系统的 Lyapunov 函数一阶差分 $\Delta V<0$,从而离散非线性系统及其时滞系统是混沌同步的,数值算例结果表明系统的误差曲线趋于同步,从而说明了该方法的有效性。

关键词: 混沌同步;离散系统;非线性系统

中图分类号: O411.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6693(2014)02-0040-03

混沌同步一直是非线性科学领域的研究热点问题之一,自 Pecora 和 Carroll 提出混沌系统的完全同步方法以来,混沌同步研究取得了巨大的进展[1-8],近年来混沌同步的应用从物理学迅速扩展到自动化控制,复杂网络以及保密通信等领域。现有的文献主要是研究的连续系统的混沌同步问题,而离散系统的混沌同步控制问题则结果相对较少,离散非线性混沌控制的结果则更加少见,文献[9]研究了一类简单的离散模糊系统的混沌同步问题,而非线性系统在实际应用中大量存在,本文研究了一般的离散非线性系统的混沌同步问题,基于 Lyapunov 稳定性理论给出了控制律的设计,在适当的选取控制律下离散非线性系统及其时滞系统是混沌同步的。

1 离散非线性系统的混沌同步

考虑离散的非线性混沌系统

$$x(k+1)=f(x(k)) \tag{1}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 为系统的状态。对应的响应系统设计为

$$\hat{x}(k+1)=f(\hat{x}(k))+u(k) \tag{2}$$

定义 $\Delta f=f(\hat{x}(k))-f(x(k))$。

假设存在常数 L 满足

$$\| f(\hat{x}(k))-f(x(k)) \| \leqslant L \| \hat{x}(k)-x(k) \| \tag{3}$$

引理 1 给定适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$,则 $\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{DFE}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}<0$ 对所有满足 $\boldsymbol{FF}^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{F}$ 成立,当且仅当存在一个常数 $\lambda>0$,使得 $\boldsymbol{Y}+\lambda\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}}+\lambda^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}<0$。

定义系统误差 $e(k)=\hat{x}(k)-x(k)$,则其一阶差分为

$$\Delta e(k)=e(k+1)-e(k)=(\hat{x}(k+1)-\hat{x}(k))-(x(k+1)-x(k))=-e(k)+[f((\hat{x}(k))-f((x(k))]+u(k)$$

构造 Lyapunov 函数 $V(k)=e^{\mathrm{T}}(k)e(k)$,则其一阶差分为

$$\begin{gathered}\Delta V(k)=V(k+1)-V(k)=e^{\mathrm{T}}(k+1)e(k+1)-e^{\mathrm{T}}(k)e(k)=\\ e^{\mathrm{T}}(k+1)[e(k+1-e(k)]+e^{\mathrm{T}}(k+1)e(k)-e^{\mathrm{T}}(k)e(k)=e^{\mathrm{T}}(k+1)\Delta e(k)+\Delta e\,(k)^{\mathrm{T}}e(k)=\\ e^{\mathrm{T}}(k+1)\{-e(k)+u(k)+[f(\hat{x}(k))-f(x(k))]\}+\{-e(k)+u(k)+[f(\hat{x}(k))-f(x(k))]\}^{\mathrm{T}}e(k)\end{gathered}$$

由(3)式很容易得到 $\Delta V(k)=e^{\mathrm{T}}(k+1)[\Delta f-e(k)+u(k)]+[\Delta f-e(k)+u(k)]^{\mathrm{T}}e(k)$,选取控制律 $u(k)=-e(k+1)$,由于 $e^{\mathrm{T}}(k+1)=[e_1^{\mathrm{T}}(k+1)\quad\cdots\quad e_n^{\mathrm{T}}(k+1)]$, $e(k)=\begin{bmatrix}e_1(k)\\ \vdots\\ e_n(k)\end{bmatrix}$, $e_i^{\mathrm{T}}(k+1),e_i(k)\in\mathbf{R}$,所以 $e^{\mathrm{T}}(k+1)e(k)=$

* **收稿日期:** 2013-01-11 **网络出版时间:** 2014-03-10 19:23

资助项目: 国家自然科学基金(No. 51072184));国家自然科学基金天元基金(No. 11226337);河南省科技厅基础与前沿技术研究计划项目(No. 122300410390);郑州航空工业管理学院青年基金(No. 2012113004)

作者简介: 毛北行,男,副教授,研究方向为切换系统与混沌同步,E-mail: maobeixing329@zzia.edu.cn

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140310.1923.008.html

$e^{\mathrm{T}}(k)e(k+1)$，从而

$$-\{e^{\mathrm{T}}(k+1)[e(k)+e(k+1)]+[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}e(k)\}=-[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}[e(k)+e(k+1)]$$

$$e^{\mathrm{T}}(k+1)\Delta f+\Delta f^{\mathrm{T}}e(k)=\frac{1}{2}\{[e^{\mathrm{T}}(k+1)\Delta f+\Delta f^{\mathrm{T}}e(k+1)]+[e^{\mathrm{T}}(k)\Delta f+\Delta f^{\mathrm{T}}e(k)]\}=$$

$$\frac{1}{2}\{[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}\Delta f+\Delta f^{\mathrm{T}}[e(k)+e(k+1)]\}$$

由假设(3)和引理 1，很容易得到

$$e^{\mathrm{T}}(k+1)\Delta f+\Delta f^{\mathrm{T}}e(k)\leqslant\frac{1+L^2}{2}[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}[e(k)+e(k+1)]$$

从而 $\Delta V(k)\leqslant\frac{L^2-1}{2}[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}[e(k)+e(k+1)]$。

若 $L<1$，必有 $\Delta V(k)<0$。所以驱动系统(1)与响应系统(2)是混沌同步的。　　证毕

2 离散非线性系统的观测器混沌同步

以下考虑非线性混沌系统　$x(k+1)=f(x(k)),y(k)=g(x(k))$　(4)

相应的观测系统设计为驱动系统

$$\hat{x}(k+1)=f(\hat{x}(k))+L(\hat{y}(k)-y(k))+u(k),\hat{y}(k)=g(\hat{x}(k))\tag{5}$$

定义 $\Delta f=f(\hat{x}(k))-f(x(k))$。

假设存在常数 K_1 满足　$\|f(\hat{x}(k))-f(x(k))\|\leqslant K_1\|\hat{x}(k)-x(k)\|$　(6)

定义 $\Delta g=g(\hat{x}(k))-g(x(k))$。

假设存在常数 K_2 满足　$\|g(\hat{x}(k))-g(x(k))\|\leqslant K_2\|\hat{x}(k)-x(k)\|$　(7)

定义系统误差 $e(k)=\hat{x}(k)-x(k)$，则其一阶差分为　$\Delta e(k)=e(k+1)-e(k)=$

$$(\hat{x}(k+1)-\hat{x}(k))-(x(k+1)-x(k))=-e(k)+[f((\hat{x}(k))-f((x(k))]+L[g((\hat{x}(k))-g((x(k))]+u(k)$$

构造 Lyapunov 函数 $V(k)=e^{\mathrm{T}}(k)e(k)$，则其一阶差分为

$$\Delta V(k)=V(k+1)-V(k)=e^{\mathrm{T}}(k+1)\Delta e(k)+\Delta e\,(k)^{\mathrm{T}}e(k)=$$

$$e^{\mathrm{T}}(k+1)\{-e(k)+u(k)+[f(\hat{x}(k))-f(x(k))]+L[g(\hat{x}(k))-g(x(k))]\}+$$

$$\{-e(k)+u(k)+[f(\hat{x}(k))-f(x(k))]+L[g(\hat{x}(k))-g(x(k))]\}^{\mathrm{T}}e(k)$$

$$\Delta V(k)=e^{\mathrm{T}}(k+1)[\Delta f+L\Delta g-e(k)+u(k)]+[\Delta f+L\Delta g-e(k)+u(k)]^{\mathrm{T}}e(k)$$

选取控制律 $u(k)=-e(k+1)$，显然

$$-\{e^{\mathrm{T}}(k+1)[e(k)+e(k+1)]+[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}e(k)\}=-[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}[e(k)+e(k+1)]$$

$$e^{\mathrm{T}}(k+1)[\Delta f+L\Delta g]+[\Delta f+L\Delta g]^{\mathrm{T}}e(k)=\frac{1}{2}\{[e^{\mathrm{T}}(k+1)[\Delta f+L\Delta g]+[\Delta f+L\Delta g]^{\mathrm{T}}e(k+1)]+$$

$$[e^{\mathrm{T}}(k)[\Delta f+L\Delta g]+[\Delta f+L\Delta g]^{\mathrm{T}}e(k)]\}=\frac{1}{2}\{[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}[\Delta f+L\Delta g]+[\Delta f+L\Delta g]^{\mathrm{T}}[e(k)+e(k+1)]\}$$

由假设(6)、(7)和引理 1，很容易得到

$$e^{\mathrm{T}}(k+1)[\Delta f+L\Delta g]+[\Delta f+L\Delta g]^{\mathrm{T}}e(k)\leqslant\frac{1+(K_1+LK_2)^2}{2}[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}[e(k)+e(k+1)]$$

从而有 $\Delta V(k)\leqslant\frac{(K_1+LK_2)^2-1}{2}[e(k)+e(k+1)]^{\mathrm{T}}[e(k)+e(k+1)]$。若 $K_1+LK_2<1$，必有 $\Delta V(k)<0$，从而驱动系统(4)与响应系统(5)是混沌同步的。

3 数值算例

例　$x_1(k+1)=1+x_2(k)-1.4x_1^2(k)$，$x_2(k+1)=0.3x_1(k)$，$f(x(k))=\begin{bmatrix}1+x_2(k)-1.4x_1^2(k)\\0.3x_1(k)\end{bmatrix}$，对应的驱动系统为 $\hat{x}_1(k+1)=1+\hat{x}_2(k)-1.4\hat{x}_1^2(k)+u_1(k)$，$\hat{x}_2(k+1)=0.3\hat{x}_1(k)+u_2(k)$，$f(\hat{x}(k))=\begin{bmatrix}1+\hat{x}_2(k)-1.4\hat{x}_1^2(k)\\0.3\hat{x}_1(k)\end{bmatrix}$，$u(k)=\begin{bmatrix}u_1(k)\\u_2(k)\end{bmatrix}$，则选取 $u(k)=-e(k+1)$，若满足 $L<1$，最终 $\Delta V(k)<0$，则两系统是

混沌同步的。

4 结论

文章研究了离散非线性系统的混沌同步问题，以及离散非线性系统的观测器混沌同步问题，在适当选取控制律的作用下，最终 $\Delta V(k)<0$，从而驱动与响应系统混沌同步。

参考文献：

[1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.

[2] Pecora L M, Carroll T L. Driving systems with chaotic signals [J]. Phys Rev A, 1991, 44(4): 2374-2383.

[3] Yoo W J, Ji D H, Won S C. Synchronization of two different non-autonomous chaotic systems using fuzzy disturbance observer[J]. Physics Letters A, 2009, 374(11): 1354-1361.

[4] Fallahi K, Leung H. A chaos secure communication scheme based on multiplication modulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(2): 368-383.

[5] 王建安. 时变时滞耦合两个不同复杂网络的自适应广义同步[J]. 物理学报, 2012, 61(2): 5091-5097.
Wang J A. Adaptive generalized synchronization between two different complex networks with time-varying delay coupling[J]. Acta phys Sin, 2012, 61(2): 5091-5097.

[6] Gassara H, EI Hajjaji A, Chaabane M. Observer-based robust H_∞ reliable control for uncertain T-S fuzzy systems with state time delay[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2010, 18(6): 1027-1040.

[7] Niu Y, Ho D W C. Robust observer design for Ito stochastic time-delay systems via sliding mode control[J]. Systems Control Letters, 2006, 55(10): 781-793.

[8] 赵岩岩，蒋国平. 一类输出耦合时延复杂动态网络故障诊断研究[J]. 物理学报, 2011, 60(11): 2061-2066.
Zhao Y Y, Jiang G P. Fault diagnosis for a class of output-coupling complex dynamical networks with time delay[J]. Acta phys Sin, 2011, 60(11): 2061-2066.

[9] 何汉林，涂建军，熊萍. 一类 Lurie 混沌系统的全局渐近同步[J]. 华中科技大学学报, 2010, 38(2): 38-40.
He H L, Tu J J, Xiong P. Global asymptotic synchronization of a class of chaotic Lurie systems[J]. Journal Huazhong University of Science Technology: Natural Science Edition, 2010, 38(2): 38-40.

Chaos Synchronization Problem of Discrete Nonlinear System

MAO Bei-xing[1], MENG Xiao-ling[1], BU Chun-xia[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015;
2. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: Chaos synchronization always is hot research topics in the area of nonlinear science for it is important merits and broad application prospects in engineering technology. The problem of chaos synchronization for discrete nolinear system is based on Lyapunov stability theory. The drive system is $x(k+1)=f(x(k))$, the response system is, $\hat{x}(k+1)=f(\hat{x}(k))+u(k)$. The conclusion is arrived that nolinear system is chaos synchronized under appropriate controlling law $u(k)=-e(k+1)$. Numerical simulations example of chaotic system verify the Lyapunov function differential $\Delta V<0$, it prove the effectiveness of the proposed method.

Key words: chaos synchronization; discrete systems; nonlinear system

（责任编辑 黄 颖）