

2类图完美匹配数的计算*

唐保祥¹, 任 韩²

(1. 天水师范学院 数学与统计学院, 甘肃 天水 741001; 2. 华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要:一般图的完美匹配计数问题是 NP-难问题。本文用划分、求和及嵌套递推的方法给出了 2 类特殊图完美匹配数目的显式表达式, 所用的方法也开辟了得到一般的有完美匹配图的所有完美匹配数目的可能性。 $\sigma(n)$ 和 $g(n)$ 分别表示图 $3-nC_{6,3}$ 和 $2-nK_{3,3}$ 的完美匹配的数目。证明 $\sigma(n) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (4+2\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot (4-2\sqrt{3})^n$, $g(n) = \frac{41+5\sqrt{41}}{82} \cdot \left(\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right)^n + \frac{41-5\sqrt{41}}{82} \cdot \left(\frac{7-\sqrt{41}}{2}\right)^n$ 。

关键词:完美匹配; 线性递推式; 特征方程

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2014)02-0043-04

图的完美匹配计数理论有很强的物理学和化学背景, 其研究成果已经在多个领域得到应用^[1-6]。由于得到应用领域的支持, 并与其他理论课题有着密切联系, 产生出许多含义丰富而深刻的理论成果。例如, 完美匹配相当于有机化学中苯类碳氢化合物分子骨架的 kekulé 结构, 研究 kekulé 结构对研究碳氢化合物的 π -电子能量, 分子共振能量等化学性质有重要作用; 统计晶体物理中的 dimmer 问题也与完美匹配的计数有关。匹配计数理论也是图论研究的重要内容之一, 在过去的几十年它是快速发展的组合论中许多重要思想的源泉。因此, 此问题引起一些学者的广泛研究^[7-20]。但是, Valiant L. 在 1979 年证明了, 图(即使是偶图)的完美匹配计数问题是 NP-难问题。一般来说, 要给出一个图完美匹配的数目是非常困难的。本文给出了 2 类图完美匹配数目的计算公式, 所给方法适合相同结构重复出现的很多图类完美匹配数目的求解。

定义 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同, 则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美匹配。

定理 1 n 个长为 6 的圈 $C_6^i = u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}u_{i1}$, 每个圈 C_6^i 上距离为 3 的顶点间各连接一条边所得到的图记为 $C_{6,3}^i$ 。分别连接 $C_{6,3}^i$ 和 $C_{6,3}^{i+1}$ 上的顶点 u_{ij} 与 $u_{i+1,7-j}$ ($j=1,2,3; i=1,2,\dots,n-1$), 这样得到的图记为 $C_{6,3}^{3-n}$, 如图 1 所示。 $\sigma(n)$ 表示图 $C_{6,3}^{3-n}$ 的完美匹配数, 则 $\sigma(n) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (4+2\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot (4-2\sqrt{3})^n$ 。

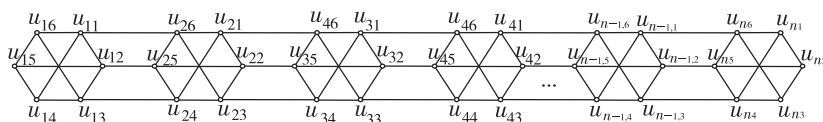


图 1 $C_{6,3}^{3-n}$

证明 欲求 $\sigma(n)$, 先定义图 G_1 和 G_2 , 并求其完美匹配的数目。将长为 1 的路 uv 的端点 u 和 v 分别与图 $3-nC_{6,3}$ 的顶点 u_{15} 和 u_{14} , u_{16} 和 u_{15} 各连接一条边得到的图分别记为 G_1 和 G_2 , 如图 2、3 所示。

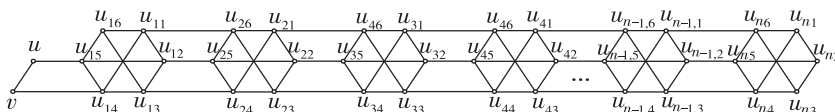


图 2 G_1

* 收稿日期: 2013-02-19 修回日期: 2013-05-20 网络出版时间: 2014-03-10 19:23
资助项目: 国家自然科学基金(No. 11171114)
作者简介: 唐保祥, 男, 副教授, 研究方向为图论和组合数学, E-mail: tbx0618@sina.com
网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140310.1923.009.html

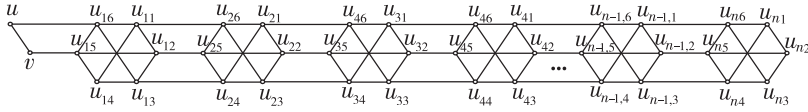


图 3 G_2

显然图 G_1 和 G_2 均有完美匹配。 $\tau(n)$ 和 $\varphi(n)$ 分别表示图 G_1 和 G_2 的完美匹配的数目。因为 $G_1 \cong G_2$, 所以 $\tau(n) = \varphi(n)$ 。

1) 先求 $\tau(n)$ 。设图 G_1 完美匹配的集合为 \mathcal{M} , G_1 含边 uv, uu_{15} 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$; $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, 故 $\tau(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。先求其中 $|\mathcal{M}_1|$, $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $uv \in M_1$, 所以由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_1| = \sigma(n)$ 。对 $|\mathcal{M}_2|$ 分 2 种情况讨论: 1) $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, uu_{15}, vu_{14}, u_{16}u_{11} \in M_{21}$, 由 $\tau(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = \tau(n-1)$; 2) $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, uu_{15}, vu_{14}, u_{16}u_{13} \in M_{22}$, 由 $\varphi(n)$ 的定义知 $|\mathcal{M}_{22}| = \varphi(n-1)$ 。显然 $\mathcal{M}_{21} \cap \mathcal{M}_{22} = \emptyset, \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}$ 。故 $|\mathcal{M}_2| = \tau(n-1) + \varphi(n-1)$ 。

$$\text{综上所述} \quad \tau(n) = \sigma(n) + \tau(n-1) + \varphi(n-1) \tag{1}$$

$$\text{因此} \quad \varphi(n) = \sigma(n) + \tau(n-1) + \varphi(n-1) \tag{2}$$

2) 再求 $\sigma(n)$ 。设图 $C_{6,3}^{3-n}$ 的完美匹配的集合为 \mathcal{M} , $C_{6,3}^{3-n}$ 含边 $u_{15}u_{16}, u_{15}u_{12}, u_{15}u_{14}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$, 则 $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset (1 \leq i < j \leq 3)$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3, \sigma(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_3|$ 。

分 2 种情形讨论 $|\mathcal{M}_1|$: 1) $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}, u_{15}u_{16}, u_{14}u_{11} \in M_{11}$, 由 $\tau(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = \tau(n-1)$; 2) $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}, u_{15}u_{16}, u_{14}u_{13} \in M_{12}$, 由 $\varphi(n)$ 的定义知 $|\mathcal{M}_{12}| = \varphi(n-1)$ 。显然 $\mathcal{M}_{11} \cap \mathcal{M}_{12} = \emptyset, \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12}$ 。故 $|\mathcal{M}_1| = \tau(n-1) + \varphi(n-1)$ 。

接下来讨论 $|\mathcal{M}_2|$, 有: 1) $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_{15}u_{12}, u_{16}u_{11}, u_{14}u_{13} \in M_{21}$, 由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = \sigma(n-1)$; 2) $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_{15}u_{12}, u_{16}u_{13}, u_{14}u_{11} \in M_{22}$, 由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = \sigma(n-1)$ 。显然 $\mathcal{M}_{21} \cap \mathcal{M}_{22} = \emptyset, \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}$ 。故 $|\mathcal{M}_2| = 2\sigma(n-1)$ 。

最后讨论 $|\mathcal{M}_3|$, 有: 1) $\mathcal{M}_{31} \subseteq \mathcal{M}_3, \forall M_{31} \in \mathcal{M}_{31}, u_{15}u_{14}, u_{16}u_{11} \in M_{31}$, 由 $\tau(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{31}| = \tau(n-1)$; 2) $\mathcal{M}_{32} \subseteq \mathcal{M}_3, \forall M_{32} \in \mathcal{M}_{32}, u_{15}u_{14}, u_{16}u_{13} \in M_{32}$, 由 $\varphi(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{32}| = \varphi(n-1)$ 。显然 $\mathcal{M}_{31} \cap \mathcal{M}_{32} = \emptyset, \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{31} \cup \mathcal{M}_{32}$ 。故 $|\mathcal{M}_3| = \tau(n-1) + \varphi(n-1)$ 。

$$\text{综上所述} \quad \sigma(n) = 2\sigma(n-1) + 2\tau(n-1) + 2\varphi(n-1) \tag{3}$$

$$\text{由(1)~(3)式得} \quad \sigma(n) = 6\sigma(n-1) + 4\tau(n-2) + 4\varphi(n-2) \tag{4}$$

$$\sigma(n-1) = 2\sigma(n-2) + 2\tau(n-2) + 2\varphi(n-2) \tag{5}$$

$$\text{再由(4)-2} \times \text{(5)得} \quad \sigma(n) = 8\sigma(n-1) - 4\sigma(n-2) \tag{6}$$

其中(6)式的特征方程的根为 $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$ 。易知 $\sigma(1) = 6, \tau(1) = \varphi(1) = 8$, 所以由(3)式得 $\sigma(2) = 44$ 。因此, 递推

$$\text{式(6)式的通解为} \quad \sigma(n) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (4+2\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot (4-2\sqrt{3})^n. \tag{7}$$

证毕

定理 2 n 个完全偶图 $K_{3,3}^i$ 的顶点集为 $V(K_{3,3}^i) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}\} (i=1, 2, \dots, n)$, 分别连接 $K_{3,3}^i$ 与 $K_{3,3}^{i+1}$ 的顶点 v_{i1} 与 $u_{i+1,1}, u_{i3}$ 与 $v_{i+1,3} (i=1, 2, \dots, n-1)$ 。这样得到的图记为 $K_{3,3}^{2-n}$, 如图 4 所示。 $g(n)$ 表示图 $K_{3,3}^{2-n}$

$$\text{的完美匹配的数目, 则} \quad g(n) = \frac{41+5\sqrt{41}}{82} \cdot \left(\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right)^n + \frac{41-5\sqrt{41}}{82} \cdot \left(\frac{7-\sqrt{41}}{2}\right)^n.$$

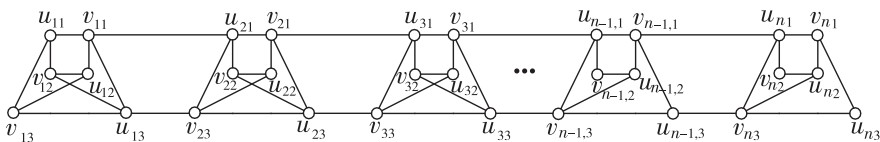


图 4 $K_{3,3}^{2-n}$

证明 先定义一个图 G_3 , 并求其完美匹配的数目。将路 vu 的端点 v, u 分别与 u_{11}, v_{13} 连接一条边, 得到的图记为 G_3 , 如图 5 所示。显然图 G_3 有完美匹配。 $\alpha(n)$ 表示图 G_3 的完美匹配的数目。设图 G_3 的完美匹配集合为 \mathcal{M} , 图 G_3 含边 vu, vu_{11} 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, 则 $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。故 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \alpha(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| +$

$|\mathcal{M}_2|$ 。其中对 $|\mathcal{M}_1|$, $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $vu \in M_1$, 所以由 $g(n)$ 的定义知 $|\mathcal{M}_1| = g(n)$ 。对 $|\mathcal{M}_2|$ 分 2 种情况讨论, 有:

1) $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2$, $\forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}$, $vu_{11}, uv_{13}, v_{12}u_{12} \in M_{21}$, 由 $\alpha(n)$ 的定义知 $|\mathcal{M}_{21}| = \alpha(n-1)$; 2) $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2$, $\forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}$, $vu_{11}, uv_{13}, v_{11}u_{12}, v_{12}u_{13} \in M_{22}$, 由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = g(n-1)$ 。因此易知 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$, 故

$$\alpha(n) = g(n) + g(n-1) + \alpha(n-1) \quad (7)$$

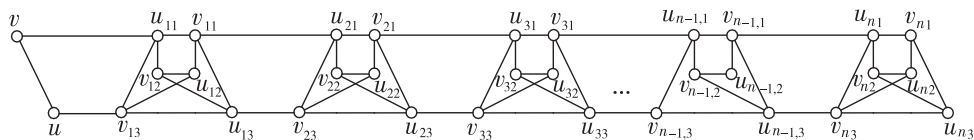


图 5 G_3

显然图 $K_{3,3}^{2-n}$ 有完美匹配。设图 $K_{3,3}^{2-n}$ 的完美匹配集合为 \mathcal{M} , 图 $K_{3,3}^{2-n}$ 含边 $v_{13}u_{11}, v_{13}u_{12}, v_{13}u_{13}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$, 则 $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset (1 \leq i < j \leq 3)$ 。故 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_3$, $g(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_3|$ 。

先讨论 $|\mathcal{M}_1|$, 有: 1) $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1$, $\forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}$, $v_{13}u_{11}, v_{12}u_{12} \in M_{11}$, 由 $\alpha(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = \alpha(n-1)$; 2) $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1$, $\forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}$, $v_{13}u_{11}, v_{11}u_{12}, v_{12}u_{13} \in M_{12}$, 由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{12}| = g(n-1)$ 。则易知 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{11} \cap \mathcal{M}_{12} = \emptyset$, 故 $|\mathcal{M}_1| = g(n-1) + \alpha(n-1)$ 。

再讨论 $|\mathcal{M}_2|$, 有: 1) $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2$, $\forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}$, $v_{13}u_{12}, v_{11}u_{11}, v_{12}u_{13} \in M_{21}$, 由 $g(n)$ 的定义知 $|\mathcal{M}_{21}| = g(n-1)$; 2) $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2$, $\forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}$, $v_{13}u_{12}, u_{11}v_{12} \in M_{22}$, 由 $\alpha(n)$ 的定义知 $|\mathcal{M}_{22}| = \alpha(n-1)$ 。则易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}$, $\mathcal{M}_{21} \cap \mathcal{M}_{22} = \emptyset$, 故 $|\mathcal{M}_2| = g(n-1) + \alpha(n-1)$ 。

最后求 $|\mathcal{M}_3|$, 有: 1) $\mathcal{M}_{31} \subseteq \mathcal{M}_3$, $\forall M_{31} \in \mathcal{M}_{31}$, $v_{13}u_{13}, v_{11}u_{11}, v_{12}u_{12} \in M_{31}$, 由 $g(n)$ 的定义知 $|\mathcal{M}_{31}| = g(n-1)$; 2) $\mathcal{M}_{32} \subseteq \mathcal{M}_3$, $\forall M_{32} \in \mathcal{M}_{32}$, $v_{13}u_{13}, u_{11}v_{12}, v_{11}u_{12} \in M_{32}$, 由 $g(n)$ 的定义知 $|\mathcal{M}_{32}| = g(n-1)$ 。则易知 $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{31} \cup \mathcal{M}_{32}$, $\mathcal{M}_{31} \cap \mathcal{M}_{32} = \emptyset$, 故 $|\mathcal{M}_3| = 2g(n-1)$ 。

综上所述, 有
$$g(n) = 4g(n-1) + 2\alpha(n-1) \quad (8)$$

把(7)代入(8)式, 得
$$g(n) = 6g(n-1) + 2g(n-2) + 2\alpha(n-1) \quad (9)$$

再由(8)式, 得
$$g(n-1) = 4g(n-2) + 2\alpha(n-2) \quad (10)$$

(9)-(10)式, 得
$$g(n) = 7g(n-1) - 2g(n-2) \quad (11)$$

解(11)式的特征方程的根为 $x = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$ 。易得 $g(1) = 6, \alpha(1) = 8$ 。所以由(8)式知 $g(2) = 40$, 故线性递推式

(11)式的通解为
$$g(n) = \frac{41 + 5\sqrt{41}}{82} \cdot \left(\frac{7 + \sqrt{41}}{2}\right)^n + \frac{41 - 5\sqrt{41}}{82} \cdot \left(\frac{7 - \sqrt{41}}{2}\right)^n$$
 证毕

参考文献:

- [1] Hall G G. A graphic model of a class of molecules[J]. Int J Math Edu Sci, 1973, 4(3): 233-240.
- [2] Cyvin S J, Gutman I. Kekulé structures in Benzenoid hydrocarbons[M]. Berlin: Springer Press, 1988.
- [3] Kasteleyn P W. Graph theory and crystal physics [C]// Harary F. Graph Theory and Theoretical Physics. London: Academic Press, 1967: 43-110.
- [4] Ciucu M. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry[J]. J Combin Theory Ser A, 1997, 77(1): 87-97.
- [5] Jockusch W. Perfect mathings and perfect squares[J]. J Combin Theory Ser A, 1994, 67(1): 100-115.
- [6] Kasteleyn P W. Dimmer statistics and phase transition[J]. Math Phys, 1963, 4(1): 287-293.
- [7] Lovász L, Plummer M. Matching theory [M]. New York: North-Holland Press, 1986.
- [8] Zhang H P. The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes[J]. Discrete Mathematics, 1996, 158(1/2/3): 257-272.
- [9] Zhang H P, Zhang F J. Perfect matchings of polyomino graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 1997, 13(1): 259-304.
- [10] Yan W G, Zhang F J. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154(1): 145-157.
- [11] 唐保祥, 任韩. 几类图完美匹配的数目[J]. 南京师范大学学报: 自然科学版, 2010, 33(3): 1-6.
Tang B X, Ren H. The number of perfect matching in sev-

- eral types of graphs[J]. Journal of Nanjing Normal University: Natural Science Edition, 2010, 33(3): 1-6.
- [12] 唐保祥, 李刚, 任韩. 3类图完美匹配的数目[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2011, 38(4): 16-19.
Tang B X, Li G, Ren H. The number of perfect matching for three specific types of graphs[J]. Journal of Zhejiang University: Science Edition, 2011, 38(4): 16-19.
- [13] 唐保祥, 任韩. 2类图完美匹配的数目[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2011, 36(5): 16-21.
Tang B X, Ren H. The number of perfect matchings in two types of graphs[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science Edition, 2011, 36(5): 16-21.
- [14] 唐保祥, 任韩. 3类图完美匹配的计数[J]. 南京师范大学学报: 自然科学版, 2012, 35(1): 16-21.
Tang B X, Ren H. The number of perfect matchings in three types of graphs[J]. Journal of Nanjing Normal University: Natural Science Edition, 2012, 35(1): 16-21.
- [15] 唐保祥, 任韩. 6类图完美匹配的数目[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2012, 51(2): 40-44.
Tang B X, Ren H. The number of perfect matchings in six types of graphs [J]. Journal of Zhongshan University: Natural Science Edition, 2012, 51(2): 40-44.
- [16] 唐保祥, 任韩. 四类图完美匹配的计数公式[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2012, 40(4): 437-440.
Tang B X, Ren H. Counting formulas of the number of perfect matchings for four types of graphs[J]. Journal of Fuzhou University: Natural Science Edition, 2012, 40(4): 437-440.
- [17] 唐保祥, 任韩. 5类图完美匹配的数目[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2012, 51(4): 31-37.
Tang B X, Ren H. The number of perfect matchings in five types of graphs[J]. Journal of Zhongshan University: Natural Science Edition, 2012, 51(4): 31-37.
- [18] 唐保祥, 任韩. 2类偶图完美匹配的数目[J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2012, 34(10): 91-95.
Tang B X, Ren H. The number of perfect matching for two types of bipartite graphs[J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition, 2012, 34(10): 91-95.
- [19] 唐保祥, 任韩. 4类图完美匹配的计数[J]. 武汉大学学报: 理学版, 2012, 58(5): 441-446.
Tang B X, Li G, Ren H. The number of perfect matching for three specific types of graphs[J]. Journal of Wuhan University: Natural Science Edition, 2012, 58(5): 441-446.
- [20] 唐保祥, 任韩. 3类图1-因子的数目[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2012, 40(1): 21-23.
Tang B X, Ren H. The number of 1-factors for three types of graphs[J]. Journal of Henan Normal University: Natural Science Edition, 2012, 40(1): 21-23.

The Enumeration of Perfect Matching in Two Types of Graphs

TANG Bao-xiang¹, REN Han²

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui Gansu 741001;

2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: The counting problem of perfect matching for general graphs is NP-hard. In this paper, with differentiation summation and re-nested recursive calculation different method which draw up two types of graphs are given the perfect matching number of explicit expression. The given method also is able to get the possible that the perfect graphs match with the counting of all perfect matching. $\sigma(n)$ and $g(n)$ are respectively represented in graphs $3-nC_{6,3}$ and $2-nK_{3,3}$ is the number of perfect matching. Prove the following conclusions: $\sigma(n) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (4+2\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot (4-2\sqrt{3})^n$, $g(n) = \frac{41+5\sqrt{41}}{82} \cdot \left(\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right)^n + \frac{41-5\sqrt{41}}{82} \cdot \left(\frac{7-\sqrt{41}}{2}\right)^n$.

Key words: perfect matching; linear recurrence relation; characteristic equation

(责任编辑 黄 颖)