

一类动力学解轨道不收敛的博弈及混沌现象^{*}何鹏飞¹, 沈洪兵²

(1. 贵州财经大学 数学与统计学院, 贵阳 550025; 2. 贵州民族大学 理学院, 贵阳 550025)

摘要:将演化博弈论中的广义石头-剪刀-布这一矩阵博弈转化为一个微分方程,并应用复制动力学理论对该方程解轨道进行研究,从而得出该博弈的平衡点。同时应用混沌理论对该动力学方程的解轨道随着时间长期的演化是否会出现混沌进行了研究,通过应用改进小数据量法对该动力学系统的 Lyapunov 指数进行计算得出以下结论:在复制动力学下,广义石头-剪刀-布博弈系统中当参数 $a < 0$ 时会出现混沌现象。

关键词:复制动力学; Lyapunov 指数; 混沌

中图分类号: O415.5; O225

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2014)02-0055-04

Taylor 和 Jonker^[1]提出的复制动力学方程是在演化博弈理论中应用得最为广泛的选择机制动力学方程。在研究复杂非线性动力学系统与混沌中的一个主要问题之一是对混沌的判断,而目前在表征混沌运动方面,显示出重大意义的统计特征值之一就是 Lyapunov 指数^[2],它是相空间中相近轨道的平均收敛性或平均发散性的一种度量。计算 Lyapunov 指数比较成熟的算法还有 Jacobian 方法、p 范数方法与 Rosenstein 和 Kantz^[3]等人提出的小数据量法。小数据量算法相对于其他方法更具有对相空间的嵌入维数、延迟时间、观测噪声等鲁棒性,计算 Lyapunov 指数的同时,还可以得到关联维数等其他混沌系统的重要特征量。从研究的理论价值来看,将动力系统博弈和混沌理论结合属于交叉学科中前沿课题,研究这个课题不仅对动力学和混沌的基础理论起到推动和发展的作用,将演化博弈论中的广义石头-剪刀-布博弈作为一个动力学系统来考虑,并且应用混沌理论对该动力学系统随着时间推移而长期地演化是否会出现混沌进行了研究,通过应用改进小数据量法对该动力学系统的 Lyapunov 指数进行计算得出结论:在复制动力学下,广义石头-剪刀-布博弈系统中当参数 $a < 0$ 时会出现混沌现象。

1 预备知识

改进的最大 Lyapunov 指数算法如下:在常用计算最大 Lyapunov 指数的小数据量法^[4-5]的基础上,将自相关法和 G-P 法应用于小数据量法,得到了计算最大 Lyapunov 指数的小数据量法的改进算法^[6-10],其计算步骤如下:1)对时间序列 $x(i), i=1,2,\dots,N$ 进行快速傅里叶变换,从而计算出平均周期 p ;2)分别采用自相关法和 G-P 法计算出延迟时间 τ 和嵌入维数 m ;3)根据时间延迟 τ 和嵌入维数 m 重构相空间: $X_i, i=1,2,\dots,M$;4)找出相空间中每个点 X_i 的最佳邻近点 X_j ,并限制短暂分离,即

$$d_i(0) = \min_j \|X_i - X_j\|, |i-j| > p, j=1,2,\dots,M, i \neq j$$

5)对相空间中的每个点 $X(t)$,计算出该邻域点对的第 i 个离散时间步长后的距离 $d_i(i)$,其计算公式为

$$d_i(i) = \|X(t+i) - X(\hat{t}+i)\|, i=1,2,\dots,\min(M-t, M-\hat{t})$$

6)对每个 i 求出所有 t 的 $\ln d_i(i)$ 的平均值 $y(i)$,即 $y(i) = \frac{1}{q\Delta t} \sum_{t=1}^q \ln d_i(i)$,其中: q 为非零 $d_i(i)$ 的数目;7)作出 $y(i)$ 曲线图,找出曲线图中成线性关系的部分,用最小二乘法进行直线拟合,则所得直线的斜率即为最大

* 收稿日期:2013-02-26 网络出版时间:2014-03-10 19:23

资助项目:贵州省科学技术基金(No. 2010GZ43286)

作者简介:何鹏飞,男,讲师,研究方向为数理经济建模,E-mail: gznchepengfei@163.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140310.1923.012.html>

Lyapunov 指数 $\lambda_{\max}$ 。

2 动力学模型

下面在复制动力学^[1]下考虑演化博弈论中一个有名的二人博弈问题:广义的石头-剪刀-布博弈,它的支付由

矩阵 $\mathbf{A}$ 表示: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+a & 0 \\ 0 & 1 & 2+a \\ 2+a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (其中 a 为实参数)由复制动力学方程^[1]可以得到它的复制动力学方程

$$\begin{cases} \dot{x} = [x + (2+a)y - a(xy + yz + xz) - 1]x \\ \dot{y} = [y + (2+a)z - a(xy + yz + xz) - 1]y \\ \dot{z} = [z + (2+a)x - a(xy + yz + xz) - 1]z \end{cases}$$

如下

其中 $\dot{x}$ 表示对时间 t 求微分, x 表示博弈方 1 在 t 时刻采取策略 1(即:石头)的概率; y 表示博弈方 1 在 t 时刻采取策略 2(即:剪刀)的概率; z 表示博弈方 1 在 t 时刻采取策略 3(即:布)的概率。

当参数 $a=1$ 时,取初值 $x=0.5; y=0.3; z=0.2$;得到该动力学的轨迹如图 1 所示。此时的极限点为: $x=0.3314; y=0.3324; z=0.3362$,从图可以看出这时该动力学的解收敛到该博弈的 Nash 平衡点。

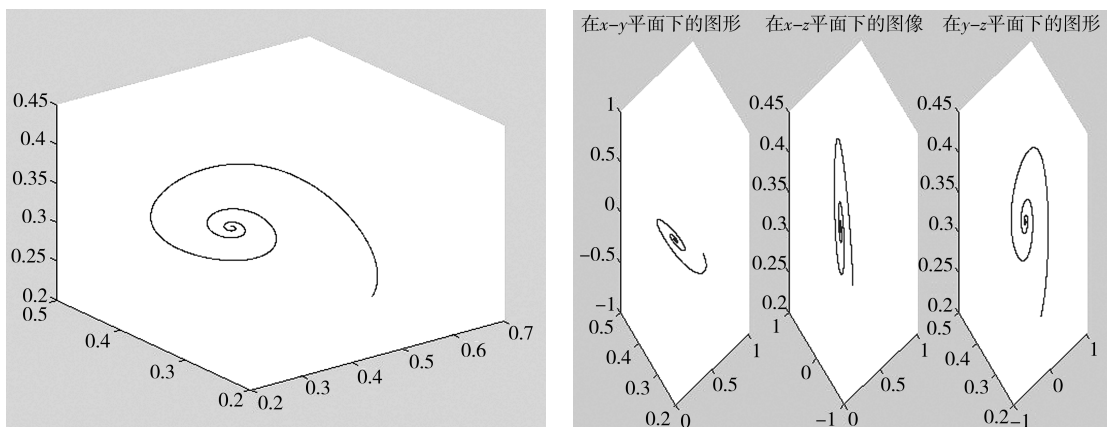


图 1 参数 $a=1$ 时的解轨道图

3 复制动力学下石头-剪刀-布博弈的混沌现象

1) 当 $a=-0.5$, 初值为 $x=0.6, y=0.3, z=0.1, dt=0.005$ 时,其图形如图 2 所示。此时的极限点为: $x=0.8851, y=0.1142, z=5.0267e-004$ 。即它的策略将偏向某个纯策略解。通过改进的小数据量法,当 $a=-0.5$, 取延迟时间 $\tau=1$ 和嵌入维数 $m=1$, 平均周期 $P=3$, 并取数据点 $N=1629$ 时得到 lyapunov 指数 $\lambda = 0.0847$, 从而判断出此时该博弈将随着时间的演化出现混沌现象。

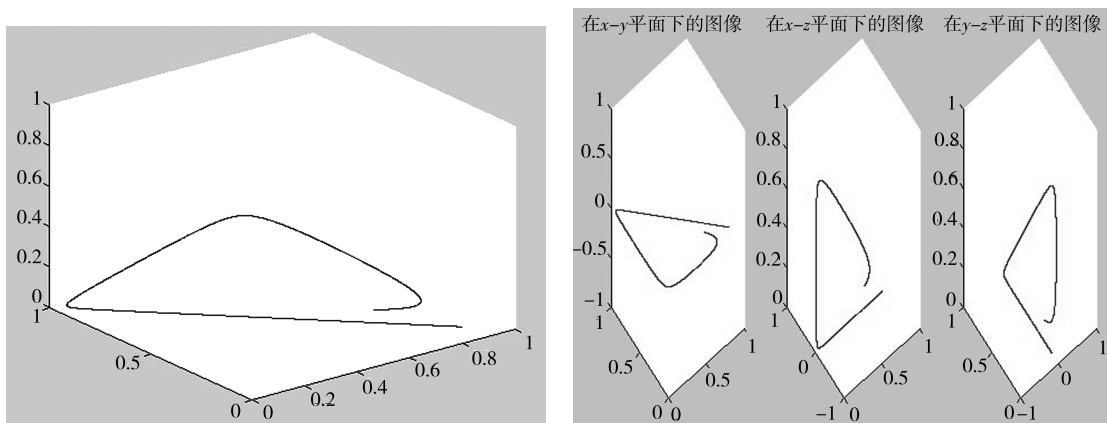


图 2 参数 $a=-0.5$ 时的解轨道图

2)当 $a=0$,初值为 $x=0.35, y=0.35, z=0.3, dt=0.005$ 时的图形如图 3。取 6 000 个点时它的轨迹在点 $(x=0.303\ 3, y=0.363\ 4, z=0.331\ 9)$ 处循环波动。

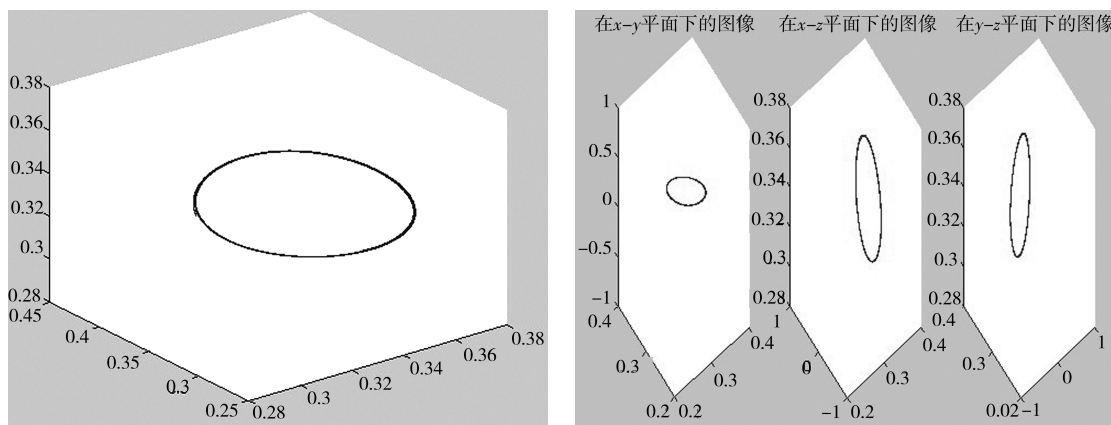


图 3 参数 $a=0$ 且演化时间为 6000 个单位时间点的解轨道图

3)当 $a=0$,初值为 $x=0.35, y=0.35, z=0.3, dt=0.005$ 时的图形如图 4。取 10 000 个点时收敛到点为: $x=5.140\ 6e-007, y=4.457\ 8e-007, z=5.289\ 1e-007$ 。

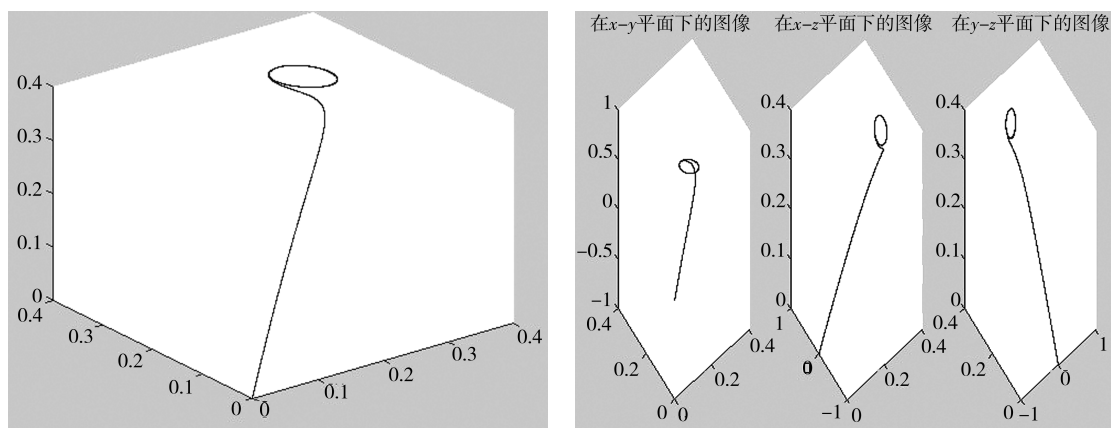


图 4 参数 $a=0$ 且演化时间为 10 000 个单位时间点的解轨道图

从 2)和 3)得出当参数 $a=0$ 时,该博弈在一开始的时间段里都是在平衡点处波动,但随着时间的推移它解轨迹将会跳出在 Nash 平衡点处的循环波而趋向不稳定。因此从这个现象可以得到启示,当在实际中从事类似于这样的经济决策时,一定要多加小心,不能简单地将短期静态的 Nash 平衡点作为博弈的长期预测结果。

4 结论

将演化博弈论中的广义石头-剪刀-布博弈作为一个动力学系统来考虑,并且应用混沌理论对该动力学系统随着时间推移的长期演化是否会出现混沌进行了研究,通过应用改进小数据量法对该动力学系统的 Lyapunov 指数进行计算得出结论:在复制动力学下,广义石头-剪刀-布博弈系统中当参数 $a<0$ 时会出现混沌现象。

参考文献:

- [1] Taylor P D, Jonker L B. Evolutionary stable strategies and game dynamics[J]. Math Bioscience 1978, 40:145-156.
- [2] 屈双惠,吴淑花,杨志忠,等. 一个新 4 维超混沌系统的行为特征及其同步[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2012, 36(1):87-91.
- Qu S H, Wu D H, Yang Z H, et al. The dynamic proper-

- ties and adaptive synchronizaTion of a new four-dymen-Tional hyper-chaotic aystem[J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science, 2012, 36(1): 87-91.
- [3] Rosenstein M T, Collins J J, Luca C J D. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets[J]. Physica D 1993, 65: 117-134.
- [4] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physica D, 1985 (16): 285-317.
- [5] Rosenstein M T, Collins J J, Deluca C J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets [J]. Physica D, 1993(65): 117-134.
- [6] 沈洪兵, 索洪敏. 一种计算最大 Lyapunov 指数的改进小数据量法及其实现[J]. 遵义师范学院学报: 自然科学版, 2009, 11(6): 73-76.
- Shen H B, Suo H M. A kind of calculating the improved small datum of the largest Lyapunov exponent and its realization[J]. Journal of Zunyi Normal College: Natural Science, 2009, 11(6): 73-76.
- [7] 李国辉, 周世平, 徐得名. 时间序列最大 Lyapunov 指数的计算[J]. 应用科学学报, 2003, 21(2): 127-131.
- Li G H, Zhou S P, Xu D M. Computing the largest Lyapunov exponent from time series[J]. Journal of Applied Sciences, 2003, 21(2): 127-131.
- [8] 张晓丹, 李志萍, 张丽丽. 一类基于奇异值分解的 Lyapunov 指数计算方法[J]. 北京科技大学学报: 自然科学版, 2005, 27(3): 371-374.
- Zhang X D, Li Z P, Zhang L L. A method based on singular value decomposition for computation of Lyapunov exponent[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing: Natural Science, 2005, 27(3): 371-374.
- [9] 马军海, 陈予恕. 混沌时序相空间重构的分析和应用研究[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(11): 1117-1124.
- Ma J H, Chen Y S. An analytic and application to state space reconstruction about chaotic time series[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(11): 1117-1124.
- [10] 张勇, 陈天麒, 陈滨. 计算最大 Lyapunov 指数的推广小数据量法[J]. 电子科技大学学报: 工学版, 2004, 33(3): 255-257.
- Zhang Y, Chen T Q, Chen B. Extended methods for calculating largest Lyapunov exponent from small data sets [J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China: Engineering Science, 2004, 33(3): 255-257.

The Game and Chaos of Dynamics Solution Orbit Does Not Converge

HE Peng-fei¹, SHEN Hong-bing²

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025;

2. School of Science, Guizhou University for Nationalities, Guiyang 550025, China)

Abstract: This paper considers the problem of transforming the generalized rock - scissors - fabric matrix game model of evolutionary game theory into a differential equation, and then applies the theory of replication dynamics to study its solution trajectory, thus, we obtain the balance of game play. In addition, using chaos theory, we also consider whether the solution trajectory of the equation will be chaotic as time goes on. By means of the improved small-data-volume method to calculate the Lyapunov exponent of dynamical systems, we obtain the result that, in the replicator dynamics theory, a generalized stone-scissors-fabric matrix game system will arise chaos phenomena when parameters $a < 0$.

Key words: replicator dynamics; Lyapunov exponent; chaos

(责任编辑 李若溪)