

# 无三角形 3-正则图的几个参数的界\*

汪定国<sup>1</sup>, 单而芳<sup>2</sup>

(1. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331; 2. 上海大学 管理学院, 上海 200444)

**摘要:**图  $G$  的一条边称为割边是指删去该边后,使得余下的图的连通分支数增加。图  $G$  中的一个两两不相邻的边子集称为图  $G$  的一个匹配。图  $G$  的一个最大匹配的边数称为图  $G$  的匹配数。图  $G$  中的一个与  $G$  的每个团都有交的顶点子集称为  $G$  的一个团横贯集,图  $G$  中元素个数最少的团横贯集的顶点数称为  $G$  的团横贯数。本文针对  $n$  阶连通无三角形的 3-正则图  $G=(V(G),E(G))$ ,首先给出了其割边数的一个上界  $(n-10)/4$ ;其次对它的匹配数得到了一个下界  $(11n-2)/24$ ;再次对它的线图的团横贯数呈现了一个上界  $(13|E(G)|+3)/36$ 。同时刻画了达到这些界的极值图。

**关键词:**割边;3-正则图;无三角形;匹配数;团横贯数

**中图分类号:**O157.5

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2014)03-0007-05

本文所考虑的图都是非空、有限简单图,其他没有定义的术语和符号请参考文献[1]。对于一个顶点集为  $V$ 、边集为  $E$  的图  $G=(V,E), \forall v \in V, v$  的开邻域  $N(v)$  定义为与  $v$  相邻的顶点集合,即  $N(v)=\{u | uv \in E\}; v$  的闭邻域为  $N_G[v]=N_G(v) \cup \{v\}$ ;与顶点  $v$  相邻的顶点数目称为  $v$  的度,记为  $d_G(v)$  或简单地记为  $d(v)$ ,即  $d(v)=|N_G(v)|$ 。对  $\forall v \in V(G), G$  的由  $S$  导出的子图记为  $G[S]$ 。用  $K_n$  表示  $n$  个顶点的完全图。特别地,图  $K_3$  也叫做一个三角形;令  $K_{m,n}$  表示二分划分别有  $m$  和  $n$  个顶点的完全二部图,若  $m=1$  或  $n=1$ ,则称  $K_{m,n}$  为一个星。给定图  $F$ ,如果图  $G$  不包含  $F$  作为其导出子图,则称  $G$  是无- $F$  的。图  $G$  的线图  $L(G)$  是指以  $G$  的边集作为  $L(G)$  的顶点集, $L(G)$  中两个顶点相邻当且仅当与这两个顶点对应的  $G$  中的两条边在  $G$  中相邻。设  $S \subseteq E(G)$ ,如果  $G$  的每个顶点都是  $S$  中某条边的端点,则称  $S$  是图  $G$  的一个边覆盖,也叫做  $S$  覆盖了  $G$ 。 $G$  的边数最少的边覆盖的边数叫做  $G$  的边覆盖数,记为  $\beta'(G)$ 。

给定一个图  $G$ ,图  $G$  的一条边称为割边是指删去该边后,使得余下的图的连通分支数增加, $G$  的割点可以类似定义。 $G$  的一个块是指  $G$  的一个不含割点的极大子图。而图  $G$  的一个末块是指仅包含  $G$  的一个割点的块,并且包含在末块中  $G$  的割点称为一个末点。分别用  $c'(G)$  和  $eb(G)$  表示  $G$  的割边数和末块数。

显然,对于一个有  $n$  个顶点的图  $G, G$  包含至多  $n-1$  条割边及  $n-2$  个割点,包含  $n-1$  条割边的唯一连通图是  $n$  个顶点的树,包含  $n-2$  个割点的唯一连通图是  $n$  个顶点的路。如果对于一个图  $G$  加上一些限制条件, $G$  的割边数与割点数的上界问题就成为不平凡的。在文献[2-3]中,Rao 确定了  $n$  个顶点、 $m$  条边的图  $G$  的割边数与割点数的上界范围;文献[4-5]对于阶数为  $n$  的  $d$ -正则图给出了割边数的上界。

设  $M \subseteq E(G)$ ,若  $M$  中任意两条边都不相邻,则称  $M$  为图  $G$  的边独立集或匹配。图  $G$  中一个边数最多的匹配称为图  $G$  的一个最大匹配,而一个图  $G$  的最大匹配的边数称为它的匹配数,记为  $\alpha'(G)$ 。关于图的匹配数,已经有广泛的研究[6-9]。

若图  $G$  的一个至少有 2 个顶点的子图  $C$  在包含的意义下是一个极大完全子图,则称  $C$  为图  $G$  的一个团, $G$  的一个有  $m$  个顶点的团叫做  $G$  的一个  $m$ -团; $D$  是  $V(G)$  的一个子集,若对图  $G$  的任意一个团  $C$ ,都有  $D \cap V(C) \neq \emptyset$ ,则称  $D$  是  $G$  的一个团横贯集, $G$  的元素个数最少的一个团横贯集称为  $G$  的最小团横贯集, $G$  的最小团横贯集的顶点数称为  $G$  的团横贯数,记为  $\tau_c(G)$ 。

确定一个图的团横贯数的界是有趣的。Andreae, Schughart 与 Tuza<sup>[10]</sup>研究了线图及线图的补图的团横贯

\* 收稿日期:2013-09-10 修回日期:2014-02-21 网络出版时间:2014-5-8 14:38

资助项目:国家自然科学基金(No. 11171207);重庆师范大学青年基金(No. 2011XLQ29)

作者简介:汪定国,男,讲师,博士,研究方向为图论与组合最优化,E-mail:wangdg2955@sina.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140508.1438.002.html

数;在文献[11]中,Shan、Cheng 与 Kang 对于连通  $k$ -正则图  $G$  得到了  $\tau_c(G)$  的上界及可达下界;Bacso 与 Tuza<sup>[12]</sup> 对于 3-正则图给出了  $\tau_c(G)$  的一个紧的上界。其它还有很多的研究,在此不再赘述。

本文继续研究无三角形 3-正则图及它的线图的这些参数的界,并且刻画达到这些界的极值图。

## 1 无三角形 3-正则图的割边数

本节对连通无三角形 3-正则图的割边数与末块数分别呈现一个紧的上界,并且刻画达到这些界的极值图。

为了刻画达到这些上界的极值图,需要如下的定义与构造。

**定义 1**  $v$  是图  $G$  中的一个顶点, $F$  是一个图,称在  $G$  的顶点  $v$  上粘附一个  $F$  是指将  $F$  的某个顶点与  $G$  的顶点  $v$  合并成一个顶点的  $G$  与  $F$  的不交并。

**构造** 将完全二部图  $K_{3,3}$  中的任意一条边进行一次剖分所得到的图记为  $L_7$ (见图 1(a))。显然,在所有的只有一个顶点的度为 2,其余顶点的度都为 3 的无三角形的图中, $L_7$  是顶点数最少的一个图。从而在无三角形的 3-正则图中, $L_7$  是顶点数最少的末块。

设  $\mathcal{T}'$  是每个非树叶顶点的度为 3 的树的集合,令  $\mathcal{H}'$  是如下的无三角形的 3-正则图的集合:将  $\mathcal{T}'$  中的每棵树的树叶顶点上粘附一个  $L_7$ ,使得每个树叶顶点都是一个  $L_7$  的末点。并且,令  $\mathcal{T}$  是  $\mathcal{T}'$  的一个子集合: $\forall T \in \mathcal{T}$ ,在  $T$  的正常 2-着色中,它的所有树叶顶点具有相同的颜色。相应地,将  $\mathcal{T}$  中每棵树的树叶上粘附一个  $L_7$ ,使得每个树叶顶点都是一个  $L_7$  的末点,这样得到的图的集合记为  $\mathcal{H}$ ,显然有  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$ 。由  $\mathcal{H}'$  的构造可知, $\mathcal{H}'$  中的每个图都是无三角形的 3-正则图。

用  $I_{14}$  表示在图  $K_2$  的每个顶点上粘附一个  $L_7$  使得它的每个顶点都是一个  $L_7$  的末点而得到的无三角形的 3-正则图(见图 1(b))。

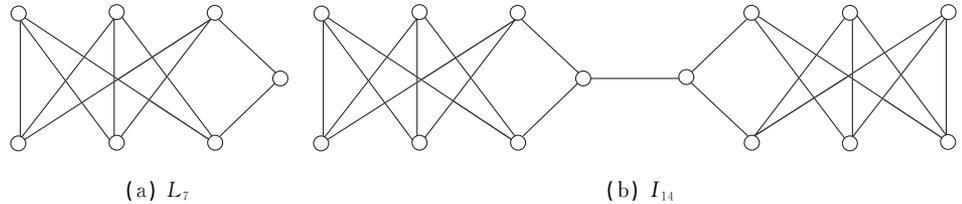


图 1  $L_7$  与  $I_{14}$

Fig. 1  $L_7$  and  $I_{14}$

首先对连通无三角形 3-正则图的末块数给出一个紧的上界。

**定理 1** 如果  $G$  是一个阶数为  $n$  的连通无三角形的 3-正则图,则  $eb(G) \leq (n+2)/8$ ,并且等式成立的充要条件是  $G \in \mathcal{H}'$ 。

**证明** 如果  $G$  没有割边,那么  $eb(G) = 0$ ,结论显然成立。因此,可以假设  $G$  至少有一条割边,这意味着  $G$  至少有 2 个末块。令  $G'$  是将  $G$  的每个末块收缩成一个顶点而得到的图。因为  $G$  是连通图,所以  $G'$  是连通的,并且  $G$  的每个末块被收缩成为  $G'$  中的一个 1-度顶点。设  $n' = |V(G')|$ ,  $m' = |E(G')|$ ,则  $m' \geq n' - 1$ 。由于任意一个图中所有顶点的度数和等于边数的 2 倍,可得

$$3n' - 2eb(G) = 2m' \geq 2n' - 2 \quad (1)$$

从而有

$$n' \geq 2eb(G) - 2 \quad (2)$$

由前面图的构造可知,每个末块至少有 7 个顶点,于是有

$$n' \leq n - 6eb(G) \quad (3)$$

结合这些不等式有  $2eb(G) - 2 \leq n' \leq n - 6eb(G)$ ,从而得到  $eb(G) \leq (n+2)/8$ 。

下面证明:对于一个阶数为  $n$  的连通无三角形的 3-正则图  $G$ , $eb(G) = (n+2)/8$  当且仅当  $G \in \mathcal{H}'$ 。

首先假设  $G \in \mathcal{H}'$ , $\mathcal{T}'$  中顶点数最少的树有 2 个顶点。由这棵树所产生的  $\mathcal{H}'$  中的图有 14 个顶点、2 个末块并且有  $eb(G) = (n+2)/8$ 。对任意的  $\mathcal{T}'$  中顶点数大于 2 的树  $T$ , $T$  中最长道路的倒数第 2 个顶点有 2 个树叶邻点,删去这 2 个邻点,将产生一个  $\mathcal{T}'$  中阶数比  $|V(T)|$  小的树  $T'$ 。设  $G$  与  $G'$  是  $\mathcal{H}'$  中分别由树  $T$  与  $T'$  所对应的图。显然  $G$  的顶点数比  $G'$  的顶点数多 8 个, $G$  的末块数比  $G'$  的末块数多 1 个。通过对  $n$  用数学归纳法不难得知: $eb(G) = (n+2)/8$ 。

反之,对于一个阶数为  $n$  的连通无三角形的 3-正则图  $G$ ,假设  $eb(G) = (n+2)/8$ ,于是不等式(1)~(3)都取等号。而  $3n' - 2eb(G) = 2m' = 2n' - 2$  意味着  $G' \in \mathcal{T}'$ ;  $n = n' - 6eb(G)$  说明  $G$  的每个末块是  $L_7$ ,所以  $G \in \mathcal{H}'$ 。证毕

接下来对连通无三角形的 3-正则图的割边数给出一个紧的上界。

**定理 2** 如果  $G$  是一个阶数为  $n$  ( $n \geq 10$ ) 的连通无三角形的 3-正则图,则  $c'(G) \leq (n-10)/4$ , 并且等式成立的充要条件是  $G \in H'$ .

**证明** 对  $n$  用数学归纳法证明。

如果  $c'(G) = 0$ , 结论是平凡的, 所以令  $c'(G) \geq 1$ . 因为  $L_7$  是  $G$  的顶点数最少的末块, 于是  $I_{14}$  是只有一条割边的最小的连通无三角形的 3-正则图, 从而  $n \geq 14$ . 如果  $c'(G) \geq 1$ , 则结论显然成立. 现在令  $G$  的顶点数  $n > 14$ , 割边数  $c'(G) \geq 2$ , 并且假设结论对于顶点数小于  $n$  的连通无三角形 3-正则图成立。

设  $e$  是  $G$  的一条割边, 那么  $G - e$  只有 2 个连通分支, 不妨记为  $G_1$  与  $G_2$ . 在  $G$  中用  $L_7$  代替  $G[V(G_2)]$  ( $G[V(G_1)]$ ), 最后得到的图记为  $G'_1$  ( $G'_2$ ). 显然,  $G$  的割边由  $G_1$  与  $G_2$  的割边再加上  $e$  组成. 而  $e$  既是  $G'_1$  的割边, 也是  $G'_2$  的割边, 并且增加的  $L_7$  不包含割边, 所有有  $c'(G) = c'(G'_1) + c'(G'_2) - 1$ . 对于  $i = 1, 2$ , 令  $n_i = |V(G'_i)|$  可得  $n = n_1 + n_2 - 14$ .

如果  $G[V(G_1)]$  与  $G[V(G_2)]$  都不同构于  $L_7$ , 那么  $G'_1$  和  $G'_2$  都比  $G$  的顶点数少, 通过归纳假设, 有  $c'(G) = c'(G'_1) + c'(G'_2) - 1 \leq \frac{n_1 - 10}{4} + \frac{n_2 - 10}{4} - 1 = \frac{n - 10}{4}$ . 于是结论成立. 否则,  $G$  的每条割边都关联一个  $L_7$  的末点, 由  $c'(G) \geq 2$  知,  $c'(G) = eb(G)$ . 如果  $c'(G) = 2$ , 由  $G$  没有三角形知  $n \geq 20$ , 结论成立. 如果  $c'(G) \geq 3$ , 那么  $n \geq 22$ , 由定理 1 有  $c'(G) = eb(G) \leq (n+2)/8 \leq (n-10)/4$ , 于是结论成立。

下面证明: 对于一个  $n$  ( $n \geq 10$ ) 阶连通无三角形的 3-正则图  $G$ ,  $c'(G) = (n-10)/4$ , 当且仅当  $G \in H'$ .

设  $G \in H'$ ,  $\tau'$  中顶点数最少的树有 2 个顶点. 由这棵树所产生的  $H'$  中的图有 14 个顶点、1 条割边, 满足  $c'(G) = (n-10)/4$ . 对任意的  $\tau'$  中顶点数大于 2 的树  $T$ ,  $T$  中最长道路的倒数第 2 个顶点有 2 个树叶邻点, 删去这 2 个邻点将产生一个  $\tau'$  中阶数比  $|V(T)|$  小的树  $T'$ . 设  $G$  与  $G'$  是  $H'$  中分别由树  $T$  和  $T'$  所对应的图. 显然  $G$  的顶点数比  $G'$  的顶点数多 8 个,  $G$  的割边数比  $G'$  的割边数多 2 条. 通过对  $n$  用数学归纳法易得  $c'(G) = (n-10)/4$ .

反之, 对于一个阶数为  $n$  ( $n \geq 10$ ) 的连通无三角形的 3-正则图  $G$ , 假设  $c'(G) = (n-10)/4$ , 下证  $G \in H'$ . 如果  $c'(G) = 1$ , 那么  $n = 14$ , 显然有  $G = I_{14} \in H'$ . 如果  $G$  中有一条割边不关联末块  $L_7$  的末点, 则可以用数学归纳法证明结论. 如前同样令  $G'_1$  ( $G'_2$ ) 是在  $G$  中用  $L_7$  代替  $G[V(G_2)]$  ( $G[V(G_1)]$ ) 而得到的图, 于是归纳假设将要求对于图  $G'_1$  和  $G'_2$  来说, 若关于割边数的等式成立, 必有  $G'_1, G'_2 \in H'$ , 由  $G'_1$  和  $G'_2$  的构造方法可知  $G \in H'$ . 如果  $c'(G) = eb(G)$ , 那么由定理 1 知  $(n-10)/4 = (n+2)/8$ , 从而  $n = 22$ . 此时, 由  $G$  的条件可得,  $G$  是通过在星  $T = K_{1,3}$  的每个树叶顶点上粘附一个  $L_7$  而得到的图. 显然有  $G \in H'$ . 证毕

## 2 无三角形 3-正则图的匹配数

本节对连通无三角形 3-正则图的匹配数给出一个下界, 并且刻画达到这个下界的极值图. 下面先介绍一个关于匹配的基本概念以及一些重要的引理.

**定义 1** 图  $G$  的一个顶点子集  $S$  的亏量定义为  $o(G-S) - |S|$ , 记为  $def_G(S)$  或者简单地记为  $def(S)$ , 其中记  $o(H)$  表示图  $H$  中奇分支的数目.

**引理 1**<sup>[13]</sup> 对于每个图  $G = (V, E)$ ,  $\alpha'(G) = \min_{S \subseteq V} \left( \frac{1}{2} (n - def(S)) \right)$ . 而且, 若存在一个匹配, 使得集合  $S$  的顶点与  $G-S$  的不同的奇分支的顶点配对, 并且  $G-S$  的每个奇分支中至多余下一个非饱和顶点, 那么  $\alpha'(G) = \frac{1}{2} (n - def(S))$ .

**引理 2**<sup>[5]</sup> 设  $G$  是一个阶数为  $n$  的  $(2r+1)$ -正则图, 令  $S$  是  $V(G)$  的一个子集. 若  $G-S$  的每个奇分支与  $S$  之间的边数是 1 条或者至少  $2r+1$  条, 则  $def(S) \leq 2reb(G)/(2r+1)$ .

**引理 3**<sup>[5]</sup> 如果  $T$  是阶数为  $n$ , 并且每个非树叶顶点的度数为  $2r+1$  的树, 那么  $\alpha'(T) \geq (n-1)/(2r+1)$ , 并且等式成立当且仅当  $T \in \tau_r$  ( $\tau_r$  的构造请参考文献[5]).

**推论 1** 如果  $T$  是阶数为  $n$  并且每个非树叶顶点的度数为 3 的树, 那么  $\alpha'(T) \geq (n-1)/3$ , 并且等式成立当且仅当  $T \in \tau$ .

根据上面的这些引理可以得到如下结果。

**定理 3** 如果  $G$  是一个阶数为  $n$  的连通无三角形的 3-正则图, 那么  $\alpha'(G) \geq (11n-2)/24$ , 并且等式成立当且仅当  $G \in \mathcal{H}$ 。

**证明** 对于一个 3-正则图来说, 奇数个顶点与奇数个顶点之间的割边数一定是一个奇数, 即这个数目是 1 或 3。于是由定理 1 和引理 2 知, 对任意  $S \subseteq V(G)$ , 有

$$def(S) \leq \frac{2eb(G)}{3} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{n+2}{8} = \frac{n+2}{12} \quad (4)$$

因此有

$$\frac{1}{2}(n - def(S)) \geq \frac{1}{2} \left( n - \frac{n+2}{12} \right) = \frac{11n-2}{24} \quad (5)$$

从而根据引理 1 可得  $\alpha'(G) \geq (11n-2)/24$ 。

下面证明: 对于一个阶数为  $n$  的连通无三角形的 3-正则图  $G$ ,  $\alpha'(G) = (11n-2)/24$  当且仅当  $G \in \mathcal{H}$ 。

假设  $G \in \mathcal{H}$ , 并设在  $\mathcal{T}$  中对应的图为  $T$ 。令  $X$  与  $Y$  是  $T$  的二部顶点集, 其中  $Y$  包含所有的树叶。若令  $S = X$ , 则  $o(G-S) = |Y|$ 。因为  $Y$  中的每个顶点或者是  $G-S$  的一个孤立点, 或者是  $G-S$  的一个奇分支  $L_7$  的末点, 所以  $def(S) = |Y| - |X|$ 。对于以  $X$  中的一个顶点为根的树  $T$ , 将  $S$  中的每个顶点与它的儿子顶点之一配对, 这个儿子顶点或者是  $G-S$  的一个奇分支, 或者在  $G-S$  的一个奇分支中。当这个奇分支是  $L_7$  时, 将余下的顶点两两配对, 这就产生一个正好  $def(S)$  个顶点未被饱和的匹配。

下面只需归纳地比较  $def(S)$  与  $\alpha'(G)$  的数值即可。当  $T = K_{1,3}$  时,  $def(S) = 2$ 。加入末块以后共 22 个顶点,  $(11 \times 22 - 2)/24 = 10 = \alpha'(G)$ , 结论成立。对于阶数较大的图  $G \in \mathcal{H}$ , 令树  $T$  是  $\mathcal{T}$  中对应的图。设  $T$  是由对应于图  $G' \in \mathcal{H}$  的树  $T'$  经过扩充以后得到的。在扩充  $T'$  的时候,  $|X|$  增加 2 个,  $|Y|$  就增加 4 个, 从而  $def(S)$  增加 2 个。比较  $G$  与  $G'$ , 减少一个末块的同时, 4 个新的末块将产生, 从而顶点数目增加 24 个。如果  $|X|$  增加  $2k$  个, 有  $\alpha'(G) = \alpha'(G') + 2k + 3 \times 3k$ ,  $|V(G)| = n = n' + 24k = |V(G')| + 24k$ 。通过归纳假设可得

$$\alpha'(G') = (11n' - 2)/24 \Leftrightarrow \alpha'(G) - 11k = [11(n - 24k) - 2]/24 \Leftrightarrow \alpha'(G) = (11n - 2)/24$$

则结论成立。

反之, 对于一个阶数为  $n$  的连通无三角形 3-正则图  $G$ , 假设  $\alpha'(G) = (11n-2)/24$ , 则不等式(4)、(5)取等号。由定理 1 知,  $eb(G) = (n+2)/8$  意味着  $G \in \mathcal{H}'$ 。因此,  $G$  的末块是  $L_7$ 。令  $G'$  是将图  $G$  中的每个末块收缩为一个顶点后得到的图, 那么由  $G \in \mathcal{H}'$  知  $G'$  是一棵树。若令  $n' = |V(G')|$  与  $m' = |E(G')|$ , 由每个末块有 7 个顶点可得  $n = n' + 6eb(G)$ 。将公式  $eb(G) = (n+2)/8$  代入并化简可得  $2eb(G) = n' + 2$ 。

最后证明  $G' \in \mathcal{T}$ 。由推论 1 知, 只需证明  $G'$  有包含  $(n'-1)/3$  条边的匹配即可。注意到  $\alpha'(G') \geq \alpha'(G) - 3eb(G)$ , 并且有条件  $\alpha'(G) = (11n-2)/24$ , 从而有

$$\alpha'(G') \geq (11n-2)/24 - (3n+6)/8 = (n-10)/12 = (n'-1)/3$$

这样便得到  $G \in \mathcal{H}$ 。

证毕

### 3 无三角形 3-正则图的线图的团横贯数

本节对连通无三角形 3-正则图的线图的团横贯数给出一个上界, 并且刻画达到这个界的极值图。为了刻画达到上界的极值图, 需要下面的引理。

**引理 4**<sup>[14]</sup> 对于每个阶数为  $n$  的图  $G$ ,  $\beta'(G) + \alpha'(G) = n$ 。

由引理 4 可以得到下面的结果。

**定理 4** 如果  $G$  是一个阶数为  $n$  的连通无三角形 3-正则图, 则  $\tau_c(L(G)) \leq (13|E(G)| + 3)/36$ , 并且等式成立的充要条件是  $G \in \mathcal{H}$ 。

**证明** 对于一个阶数为  $n$  的连通无三角形的 3-正则图  $G$ , 令  $M$  是  $G$  的一个最大匹配。对于  $G$  中每个  $M$ -非饱和顶点, 在  $G$  中取一条与之关联的边, 并将所有这样的边作成的集合记为  $M_0$ , 则  $|M_0| = n - 2|M|$ 。因为  $G$  是没有三角形的 3-正则图, 所以  $L(G)$  中的所有团都是 3-团, 并且每个团都是由  $G$  中关联于同一个顶点的边在  $L(G)$  中对应的顶点而形成的。从而  $M \cup M_0$  所对应的  $L(G)$  中的顶点集是  $L(G)$  的一个团横贯集。由定理 3 有

$$\tau_c(L(G)) \leq |M \cup M_0| = n - |M| \leq n - (11n-2)/24 = (13n+2)/24 \leq (13|E(G)| + 3)/36$$

下面证明: 对于一个阶数为  $n$  的连通无三角形的 3-正则图  $G$ ,  $\tau_c(L(G)) = (13|E(G)| + 3)/36$  当且仅当  $G \in \mathcal{H}$ 。

首先,若  $G \in \mathcal{H}$ , 由定理 2 知  $\alpha'(G) = (11n-2)/24$ 。并且对应于  $G$  中的每个顶点关联的三条边, 在  $L(G)$  中一定是一个 3-团, 所以  $L(G)$  的每一个团横贯集对应于  $G$  中的边集是  $G$  的一个边覆盖。于是由引理 4 知

$$\tau_c(L(G)) \geq \beta'(G) = n - \alpha'(G) = n - (11n-2)/24 = (13n+2)/24 = [(13|E(G)|) + 3]/36$$

又由前面所证  $\tau_c(L(G)) \leq [(13|E(G)|) + 3]/36$  得知,  $\tau_c(L(G)) = [(13|E(G)|) + 3]/36$ 。

其次,若  $\tau_c(L(G)) = [(13|E(G)|) + 3]/36$ , 那么  $G$  的最大匹配  $M$  的边数为  $(11n-2)/24$ , 即  $|M| = (11n-2)/24$ , 再由定理 2 可得  $G \in \mathcal{H}$ 。从而结论得证。 证毕

### 参考文献:

- [1] Bollobas B. Modern graph theory[M]. Newyork; Springer-Verlag, 2001.
- [2] Rao A R. An extremal problem in graph theory[J]. Israel J Math, 1968(6): 261-266.
- [3] Rao A R. Some extremal problems and characterizations in the theory of graphs[D]. India: Indian Statistical Institute, 1969.
- [4] Achuthan N, Rao A R. On the number of cut edges in a regular graph[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2003(27): 5-12.
- [5] Suil O, West D B. Balloons, cut-edges, matching, and total domination in regular graphs of odd degree[J]. J Graph Theory, 2010(64): 116-131.
- [6] Biedl T, Demaine E D, Duncan C A, et al. Tight bounds on maximal and maximum matchings[J]. Discrete Math, 2004, 285(1/2/3): 7-15.
- [7] Hobbs A M, Scheichel E. On the maximum number of independent edges in cubic graphs[J]. Discrete Math, 1982, 42(2/3): 317-320.
- [8] Henning M A, Yeo A. Tight lower bounds on the size of a maximum matching in a regular graph[J]. Graphs and Combinatorics, 2007, 23(6): 647-657.
- [9] Suil O, West D B. Matching and edge-connectivity in regular graphs[J]. European Journal of Combinatorics, 2011, 32(2): 324-329.
- [10] Andreae T, Schughart M. Clique-transversal sets of line graphs and complements of line graphs[J]. Discrete Math, 1991, 88(1): 11-20.
- [11] Shan E F, Cheng T C E, Kang L Y. Bounds on the clique-transversal number of regular graphs[J]. Science in China A: Mathematics, 2008, 51(5): 851-863.
- [12] Bacsó G, Tuza Z. Clique-transversal sets and weak 2-colorings in graphs of small maximum degree[J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2009, 11(2): 15-24.
- [13] Berge C. Sur le couplage maximum d'un graphe[J]. C R Acad Sci Paris, 1958, 247(2): 258-259.
- [14] Gallai T. Uber extreme punktund kantenmengen[J]. Ann Univ Sci Budapest Eotvos Sect Math, 1959(2): 133-138.

## Operations Research and Cybernetics

### Bounds on Some Parameters in Triangle-free Cubic Graphs

WANG Ding-guo<sup>1</sup>, SHANG Er-fang<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. School of Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** A cut-edge in a graph  $G$  is an edge whose removal increases the number of connected components of the graph. A matching of  $G$  is a set of pairwise independent edges of  $G$ . The matching number is the number of edges in a maximum matching of  $G$ . A vertices set is called a clique-transversal set of  $G$  if it meets all cliques of  $G$ . The clique-transversal number is the minimum cardinality of a clique-transversal set of  $G$ . In this paper, for a connected triangle-free cubic graph  $G = (V(G), E(G))$  of order  $n$ , firstly, we give an upper bound  $(n-10)/4$  on the number of cut-edges. Secondly, we get a lower bound  $(11n-2)/24$  on the matching number. Thirdly, we present an upper bound  $(13|E(G)| + 3)/36$  on the clique-transversal number for the line graph of  $G$ . Meanwhile, we characterize the extremal graph sachieving these bounds.

**key words:** cut-edges; cubic graphs; triangle-free; matching number; clique-transversal number