DOI:10.11721/cqnuj20140311

von Neumann 代数下 Markov 对偶过程的若干性质*

张一进[1]，李扬荣[2]
(1. 重庆邮电大学 数理学院，重庆 400065；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715)

摘要：本文引入 Markov 算子半群的理论，利用分析和代数的方法研究了 Markov 对偶过程的 Q-矩阵和最小 Q-函数的若干性质。主要结论有：对偶分支 Q-矩阵是忠实的、次随机单调的及正则的、零流出的、对偶的；对偶分支矩阵的最小 Q-函数 $F(t)$ 是唯一且忠实的，非随机单调的及对偶的；M 是 von Neumann 代数，M_{*sa} 是 M 的前对偶 M_* 的自伴，T 是 M_* 上的 Markov 积分半群，$g\in M_{*+}$，$\eta\in\mathbf{R}$，使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\sup dist(A_t(T)f,[-g,g])<\eta$，那么 M 上的正则线性形式的锥体 M_{*+} 在 M_{*sa} 中是强规则的。

关键词：对偶分支 Q-矩阵；最小 Q-函数；对偶；渐近行为

中图分类号：O177.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2014)03-0052-03

1 预备知识

Markov 对偶分支过程[1]是非常重要的时间连续 Markov 链，状态空间 $E=\mathbf{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$，其 Q-矩阵 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 定义为

$$q_{ij}=\begin{cases}ia_{i-j+1}-(j+1)a_{i-j},i\geqslant j-1\\0,\text{否则}\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a_k=\sum_{j=0}^{k}b_j,k\geqslant 0,b_j$ 是分支过程 Q- 矩阵 $\widetilde{Q}$ 的序列，且 $a_0\leqslant 0,a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_k\geqslant\cdots\geqslant 0,a_{-1}=0$。

定义 1[1]　一个 Q-矩阵 $Q=(q_{ij};i,j\in\mathbf{Z}^+)$ 称为次随机单调的，如果当 $i\neq 0$ 及 $j\neq i+1$ 时，满足 $\sum\limits_{k=j}^{\infty}q_{ik}\leqslant\sum\limits_{k=j}^{\infty}q_{i+1,k}$。

定义 2[2]　Q-矩阵 $Q=(q_{ij})$ 称为对偶的，如果 Q 满足不等式 $\sum\limits_{k=0}^{j}q_{ik}\geqslant\sum\limits_{k=0}^{j}q_{i+1,k},j\neq i$。

定义 3[4]　一族无限维非负矩阵 $S(t)=(s_{ij}(t))$ 称为对偶函数，如果 $S(t)$ 满足 $\lim\limits_{i\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{j}s_{ik}(t)=0,\forall j\in E,t\geqslant 0$。

文中未给出定义的名词术语请参阅相关参考文献。

2 主要结论及其证明

2.1 定理 1 及其证明

定理 1　以下命题成立：1)对偶分支 Q-矩阵 Q 是忠实的；2)对偶分支 Q-矩阵 Q 是次随机单调的；3)对偶分支 Q-矩阵 Q 是正则的；4)对偶分支 Q-矩阵 Q 是零流出的；5)对偶分支 Q-矩阵 Q 是对偶的。

证明　1) 令 $P(t)$ 和 $\widetilde{P}(t)$ 分别是对偶分支过程和分支过程的转移函数，有

$$\sum_{k=j}^{\infty}P_{ik}(t)=\sum_{k=0}^{i}\widetilde{P}_{jk}(t),i,j\in\mathbf{Z}^+\tag{2}$$

---

* **收稿日期**：2013-06-12　　**网络出版时间**：2014-5-8 14:38
资助项目：国家自然科学基金(No. 11201512)；重庆邮电大学自然科学基金(No. A2011-19)
作者简介：张一进，男，讲师，研究方向为随机过程，E-mail: zhanyyj@cqupt.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140508.1438.012.html

根据参考文献[6]，由于 0 对于分支过程而言是一个吸收状态，那么 $\widetilde{P}_{0j}(t)=\delta_{0j}$，$\forall j\geqslant 0, t\geqslant 0$，而 $\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}(t)=\sum_{k=0}^{i}\widetilde{P}_{0k}(t)=\sum_{k=0}^{i}\delta_{0k}=1$，故 $P(t)$ 是忠实的。

2）由 $P(t)$ 的忠实性，并对(2)式两边在 $t=0^{+}$ 时求导，可以得到 $-\sum_{k=0}^{j-1}q_{ik}=\sum_{k=0}^{i}\tilde{q}_{jk}$，$i\geqslant 0, j\geqslant 1$。所以 $q_{ij}=\sum_{k=0}^{i}(\tilde{q}_{jk}-\tilde{q}_{j+1,k})$，$i\geqslant 0, j\geqslant 0$。其中 $\widetilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})$ 是分支过程 Q-矩阵。令 $a_k=-\sum_{j=0}^{k}b_j$，$k\in\mathbf{Z}^{+}$，可证 $\sum_{k=j}^{\infty}q_{ik}\leqslant\sum_{k=j}^{\infty}q_{i+1,k}$，$\forall j\neq i+1$，故 Q 是次随机单调的。

3）显然 Q 是保守的，向上自由跳跃的[1]，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_{i,i+1}}=\frac{1}{|a_0|}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$。由文献[2]的推论 2 知，$Q$ 是正则的。$F(t)$ 为矩阵 Q 的最小 Q-函数，Ω 为 $F(t)$ 作为 l_∞ 空间上弱星连续半群的弱星生成元，则：a) $Q_1^{*}\subset\Omega\subset Q_\infty$；b) $\Omega=Q_\infty$ 当且仅当 Q 是零出的[5]，即对某个(从而对所有的)$\lambda>0$，$\lambda I-Q_\infty$ 是单射。

4）在 Q 中，$a_0\leqslant 0$，$a_k\leqslant a_{k+1}\leqslant 0(\forall k\geqslant 0)$，而 Q 是保守的，有 $(a_1-2a_0)+(2a_0-3a_{-1})=0$，即 $a_{-1}=\frac{a_1}{3}\leqslant 0$，那么 $R=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q_{n,n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)a_0-(n+2)a_{-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a_0-a_{-1})n+a_0-2a_{-1}}=\infty$，由文献[3]知 Q 是零流出的[5]。

5）因为 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_k\geqslant\cdots\geqslant 0$，则

a）当 $j<i$ 时，有 $\sum_{k=0}^{j}(q_{ik}-q_{i+1,k})=\sum_{k=0}^{j}[(k+1)a_{i-k}-ka_{i-k+1}]=\sum_{k=0}^{j}[k(a_{i-k}-a_{i-k+1})+a_{i-k}]\geqslant 0$；

b）当 $j=i+1$ 时，有 $\sum_{k=0}^{i+1}(q_{ik}-q_{i+1,k})=\sum_{k=0}^{i-1}(q_{ik}-q_{i+1,k})+(q_{i,i+1}-q_{i+1,i+1})\geqslant 0$。

则根据定义 2 可得，Q 是对偶的。　　证毕

2.2　定理 2 及其证明

定理 2　对偶分支矩阵的最小 Q-函数 $F(t)$ 具有如下性质：1）$F(t)$ 是唯一且忠实的；2）$F(t)$ 是非随机单调的；3）$F(t)$ 是对偶的。

证明　1）由定理 1 知，矩阵 Q 是正则的，根据文献[1]知，对偶分支矩阵的最小 Q-函数 $F(t)$ 是忠实的，即是前向方程的唯一解，并且 $F(t)$ 是唯一的 Q-函数。

$$|\langle T(t-h)^{*}x^{*},x\rangle-\langle T(t)^{*}x^{*},x\rangle|=|\langle x^{*},T(t-h)x\rangle-\langle x^{*},T(t)x\rangle|=|\langle x^{*},T(t-h)x-T(t)x\rangle|$$

2）由文献[6]知 Q-矩阵 Q 的最小转移函数是单调的充要条件是：Q 是零流出的并且是随机单调的，由定理 1 中结论 1）和 3）知，$F(t)$ 是非随机单调的。

3）因为对偶分支 Q-矩阵 Q 是保守的，由文献[6]的命题 2.4 知，Q-函数 $F(t)$ 对偶应满足条件 $\sum_{k=0}^{j}f_{ik}(t)\geqslant\sum_{k=0}^{j}f_{i+1,k}(t)$，$i,j\in E$，即 $\sum_{k=0}^{j}f_{ik}(t)$ 是关于状态 i 的递减函数，因此 $\lim_{i\to+\infty}\sum_{k=0}^{j}f_{ik}(t)$ 存在，即 $\lim_{i\to+\infty}f_{ik}(t)=0$，则函数 $F(t)$ 的 Feller 性[7]和对偶性是等价的。而 $F(t)$ 是 Feller 的，所以也是对偶的。　　证毕

综上得到以下定理及其证明。

2.3 定理 3 及其证明

定理 3　设 M 是 von Neumann 代数，M_{*sa} 是 M 的前对偶 M_{*} 的自伴，T 是 M_{*} 上的 Markov 积分半群[1]，$g\in M_{*+}$，$\eta\in\mathbf{R}$，使得 $\lim_{x\to\infty}\sup dist(A_t(T)f,[-g,g])<\eta$，那么 M 上的正则线性形式的锥体 M_{*+} 在 M_{*sa} 中是强规则的[3]。

证明　令 $0\leqslant\mu,\nu\in M_{*}$ 且任意，$\rho=|\mu-\nu|$，$0\leqslant\chi\leqslant\nu+\rho$，有 $\gamma=\|\nu\rho\|$，$\chi_1=\gamma\chi$，$\nu_1=\gamma\nu$，$\rho_1=\gamma\rho$。

用 M 的 GNS 表示法有 $\pi_\lambda: M\to B(H)$。设 $\xi\in\Xi(H)$ 是 π_λ 的归一化循环向量[1]，则 $\chi_1(a)=(\xi|S^{*}\pi_\lambda(a)\xi)$，$\nu_1(a)=(\xi|T^{*}\pi_\lambda(a)\xi)$，$\rho_1(a)=(\xi|U^{*}\pi_\lambda(a)\xi)$。

由于 $\psi-\chi_1$ 是自伴，范数由 M 的自伴 M_{*sa} 的单位球确定，所以得到

$$|\psi(a)-\chi_1(a)|\leqslant 2(\rho_1(a+)+\rho_1(a-))\leqslant 6\|\rho_1\|^2$$

$$|\gamma^{-1}\psi(a)-\chi(a)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\|\rho\|^{-1}\leqslant 2\sqrt{\|\nu+\mu\|\|\rho\|}(a\in M)$$

而 $0\leqslant\gamma^{-1}\psi\leqslant\nu$，则有 $dist(\chi,[0,v])\leqslant\sqrt{2\|\nu+\mu\|\|\nu-\mu\|}$。平直的向前演算，得到 $dist_H([0,\mu],[0,v])\leqslant\sqrt{2\|\nu+\mu\|\|\nu-\mu\|}$。这就证明了 M_{*+} 在 M_{*sa} 中是强规则的。 证毕

参考文献：

[1] Anderson W J. Continuous-time markov chains springer series instatistics[M]. New York:Springer-Verlag,1991.

[2] Chen A Y,Phil P,Zhang H J,et al. Uniqueness criteria for continuouns-time Markov chains with general transition structure[J]. J Adv Appl Prob,2005,37(4):1056-1074.

[3] Chen A Y,Phil P,Zhang H J,et al. The collision branching process[J]. Journal of Appl Prob,2004,41(4):1033-1048.

[4] Li Y R. Markov integrated semigroups and their applications to continuous-time Markov chains[J]. Integr Equ Oper Theory,2008,60(2):247-269.

[5] 张一进，李扬荣，杨春德. 对偶分支 q-矩阵生成的 Markov 积分半群[J]. 西南大学学报：自然科学版，2010，32(4)：120-123.

Zhang Y J,Li Y R,Yang C D. Markov integrated semigroups gene rated by dual branching q-matrix[J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition, 2010, 32(4): 120-123.

[6] Li Y R. Dual and feller-reuter-riley transition functions[J]. J Math Anal Appl,2006,313(2):461-474.

[7] 张一进，赵文强. 对偶分支 q-矩阵生成的 Markov 积分半群的 Feller 性[J]. 重庆工商大学学报：自然科学版，2011，28(6)：580-582.

Zhang Y J,Zhao W Q. Feller property of Markov integrated semigroups generated by dual branching q-matrix[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University: Natural Science Edition,2011,28(6):580-582.

Some Properties of Markov Dual Branching Process with von Neumann Algebras

ZHANG Yi-jin[1], LI Yang-rong[2]

(1. School of Mathematics and Physics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065;
2 School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper, with introduction of the theory of operator semigroup, some properties of Q-Matrix and minimal Q-function of Markov dual branching process are studied by the method of analysis and algebras. Some important results are obtained, such as Dual Branching Q-Matrix is honest, substochastic monotone, regular, zero-exit and dual; minimal Q-function of Markov dual branching matrix is unique and honest, not stochastic monotone, dual; M is von Neumann algebra, M_{*sa} is predual M_* of M, T is a Markov integrated semigroup on M_*, $g\in M_{*+}$, $\eta\in\mathbf{R}$, such that $\lim_{x\to\infty}\sup dist(A_t(T)f,[-g,g])<\eta$, then the cone M_{*+} of positive normal linear forms on M is strongly normal in M_{*sa}

Key words: dual branching Q-Matrix; minimal Q-function; dual; Feller; asymptotic behavior

（责任编辑 黄 颖）