运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140404

强 α-预不变凸函数*

王海英，符祖峰
(安顺学院 数理学院，贵州 安顺 561000)

摘要:研究了一类重要的广义凸函数—强 α-预不变凸函数,讨论了它与 α-预不变凸函数、严格 α-预不变凸函数及半严格 α-预不变凸函数之间的关系,并在中间点的强 α-预不变凸性下得到了它的 3 个重要的性质定理,同时给出了强 α-预不变凸函数在优化中的两个重要应用,这些结果在一定程度上完善了对强 α-预不变凸函数的研究。

关键词:强 α-预不变凸函数;α-预不变凸函数;严格 α-预不变凸函数;半严格 α-预不变凸函数

中图分类号:O151. 2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2014)04-0016-05

凸性和广义凸性理论在数理经济学、管理科学、数学规划等领域中起着非常重要的作用,事实上凸函数相对来说是很少的,而广义凸函数具有许多类似于凸函数的性质,因此人们对广义凸性及其应用的研究工作有着越来越大的兴趣,并已经取得了许多重要的成果[1-13]。其中一个非常重要的推广是 1988 年 Weir 和 Jeyakwmar[1] 引入了预不变凸函数。2001 年 Yang 和 Li[2] 引入了严格预不变凸函数和半严格预不变凸函数,研究了它们与预不变凸函数之间的关系。2006 年 Tang 和 Yang[3] 引入了强预不变凸函数,研究了强预不变凸函数与预不变凸函数、严格预不变凸函数及半严格预不变凸函数之间的关系。同年 M. A. Noor[4] 引入了下面的 α-不变凸集,α-预不变凸函数、严格 α-预不变凸函数及半严格 α-预不变凸函数的概念。接下来,Fan 和 Guo[5] 引入了强 α-预不变凸函数,但对此函数的性质没有很好的展开研究,本文针对强 α-预不变凸函数的性质进行研究,着重讨论强 α-预不变凸函数与 α-预不变凸函数、严格 α-预不变凸函数及半严格 α-预不变凸函数之间的关系,得到了强 α-预不变凸函数的 3 个重要的充要条件,从而完善了对此类广义凸函数的研究,这些结果也丰富了广义凸性理论。

1 预备知识

设 H 是定义了内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$ 的实 Hilbert 空间。集合 K 是 H 的一个非空子集,$F:K\to H$ 和 $\alpha:K\times K\to R\backslash\{0\}$ 是两个实值函数,$\eta:K\times K\to H$ 是向量值函数。

定义 1[4]　如果 $\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有 $y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)\in K$,则称 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集,也称为 $\alpha\eta$-连通集。

定义 2[4]　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集,若 $\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有 $F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)$,则称函数 F 是 K 上关于 η 和 α 的 α-预不变凸函数。

定义 3[4]　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集,若 $\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,当 $x\neq y$ 有

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))<(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)$$

则称函数 F 是 K 上关于 η 和 α 的严格 α-预不变凸函数。

定义 4[4]　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集,若 $\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,当 $f(x)\neq f(y)$ 有

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))<(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)$$

则称函数 F 是 K 上关于 η 和 α 的半严格 α-预不变凸函数。

定义 5[5]　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集,若 $\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,存在 $\beta>0$ 有

* **收稿日期**:2013-06-28　**修回日期**:2013-08-17　**网络出版时间**:2014-7-3 23:03
资助项目:贵州省自然科学基金资助项目(No. 20100056);贵族省高校优秀科技创新人才支持计划(No. 黔教合 KY 字[2012]101)
作者简介:王海英,女,副教授,研究方向为非线性泛函分析和最优化理论,E-mail: why8206@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140703.2303.004.html

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$

则称函数 F 是 K 上关于 η 和 α 的强 α-预不变凸函数。

注 1　根据定义 2 与定义 5，有强 α-预不变凸函数是 α-预不变凸函数；若 $\forall x,y\in K$，当 $x\neq y$ 有 $\eta(x,y)\neq 0$，则强 α-预不变凸函数是严格 α-预不变凸函数和半严格 α-预不变凸函数。但是，反之不成立。

例 1　设 $F(x)=-|x|$，$\alpha(x,y)=1$，$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,x>0,y>0\\x-y,x<0,y<0\\y-x,x>0,y<0\\y-x,x<0,y>0\end{cases}$，则 F 是关于 α 和 η 的 α-预不变凸函数；但对 $\forall\beta>0$，当 $x=2\beta,y=\beta,\lambda=\frac{1}{2}$，却有

$$F[y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)]=F\left(\frac{3}{2}\beta\right)=-\frac{3}{2}\beta>\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(y)-\frac{1}{4}\beta\|\eta(x,y)\|^2=-\frac{3}{2}\beta-\frac{1}{4}\beta^3$$

即 F 不是关于 α 和 η 的强 α-预不变凸函数。

例 2　设 $F(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x|$，$\alpha(x,y)=1$，$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,x>0,y>0\\x-y,x<0,y<0\\-x-y,x>0,y<0,x+y\neq0\\-x-y,x<0,y>0,x+y\neq0\\\frac{1}{2}y,x+y=0\end{cases}$，则 F 是关于 α 和 η 的严格 α-预不变凸函数；但对于 $\forall\beta>0$，当 $x=\frac{4}{\sqrt{\beta}},y=\frac{2}{\sqrt{\beta}},\lambda=\frac{1}{2}$，却有

$$F[y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)]=F\left(\frac{3}{\sqrt{\beta}}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{\sqrt{\beta}}>\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(y)-\frac{1}{4}\beta\|\eta(x,y)\|^2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}$$

即 F 不是关于 α 和 η 的强 α-预不变凸函数。

例 3　设 $F(x)=\begin{cases}1,x=0\\0,x\neq0\end{cases}$，$x\in[-1,6]\cup[-6,-2]$，$\alpha(x,y)=1$，$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,x\in[-1,6],y\in[-1,6]\\x-y,x\in[-6,-2],y\in[-6,-2]\\-4-y,x\in[-1,6],y\in[-6,-2]\\-y,x\in[-6,-2],y\in[-1,6],y\neq0\\\frac{1}{6}x,x\in[-6,-2],y=0\end{cases}$，则 F 是关于 α 和 η 的半严格 α-预不变凸函数；但对于 $\forall\beta>0$，当 $x=1,y=2,\lambda=\frac{1}{2}$，却有

$$F[y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)]=F\left(\frac{3}{2}\right)=0>\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(y)-\frac{1}{4}\beta\|\eta(x,y)\|^2=-\frac{1}{4}\beta$$

即 F 不是关于 α 和 η 的强 α-预不变凸函数。

下面的讨论中将用到条件 C，先来介绍这个条件的内容。

条件 C[6]　$\forall x,y\in k$，$\forall\lambda\in(0,1)$，η 和 α 满足关系式

$$\eta(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)\eta(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$$

2 主要结果

定理 1[7]　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，η 满足条件 C 且 $\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$，则 $F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数，当且仅当 $F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是 α-预不变凸函数，且存在常数 $\gamma>0$ 使得对于 $\forall x,y\in K$，存在 $\bar{\lambda}\in(0,1)$ 满足

$$F(y+\bar{\lambda}\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\bar{\lambda})F(y)+\bar{\lambda}F(x)-\gamma\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x,y)\|^2\tag{1}$$

证明　必要性显然。下证充分性。反证法，假设 $F:K\to\mathbf{R}$ 不是强 α-预不变凸函数，则对于 $\forall\beta>0$，$\exists x,y\in$

K 及 $\lambda\in(0,1)$ 使得

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))>(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2 \tag{2}$$

选取 γ_1,γ_2 且 $0<\gamma_1<\lambda<\gamma_2<1$ 使得 $\lambda=\bar{\lambda}\gamma_1+(1-\bar{\lambda})\gamma_2$。令

$$\bar{x}=y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),\ \bar{y}=y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)$$

因为 $F:K\to\mathbf{R}$ 是 α-预不变凸函数,有

$$F(\bar{x})\leqslant\gamma_1F(x)+(1-\gamma_1)F(y),\ F(\bar{y})\leqslant\gamma_2F(x)+(1-\gamma_2)F(y) \tag{3}$$

由条件 $\alpha(x,y)=\alpha(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$,有

$$\alpha(x,y)=\alpha(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)) \tag{4}$$

由条件C,有

$$\eta(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=(\gamma_1-\gamma_2)\eta(x,y) \tag{5}$$

由(4)、(5)式,有 $\bar{y}+\bar{\lambda}\alpha(\bar{x},\bar{y})\eta(\bar{x},\bar{y})=y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+\bar{\lambda}\alpha(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))$

$$\eta(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)+\bar{\lambda}(\gamma_1-\gamma_2)\alpha(x,y)\eta(x,y)=$$
$$y+[\gamma_2+\bar{\lambda}(\gamma_1-\gamma_2)]\alpha(x,y)\eta(x,y)=y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)$$

结合(1)式,有 $F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=F(\bar{y}+\bar{\lambda}\alpha(\bar{x},\bar{y})\eta\,\bar{x},\bar{y}))\leqslant$

$$(1-\bar{\lambda})F(\bar{y})+\bar{\lambda}F(\bar{x})-\gamma\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(\bar{x},\bar{y})\|^2 \tag{6}$$

从而,由(3)、(6)式,有

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\gamma\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})(\gamma_1-\gamma_2)^2\ \|\eta(x,y)\|^2=\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-$$
$$\gamma\frac{(\gamma_2-\lambda)(\lambda-\gamma_1)}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}(\gamma_1-\gamma_2)^2\ \|\eta(x,y)\|^2=\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\gamma(\gamma_2-\lambda)(\lambda-\gamma_1)\|\eta(x,y)\|^2=$$
$$\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2\left(令\ \beta=\frac{\gamma(\gamma_2-\lambda)(\lambda-\gamma_1)}{\lambda(1-\lambda)}>0\right)$$

这与(2)式矛盾。所以假设不成立,$F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数。 证毕

定理2[7] 设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集,η 满足条件C且 $\forall x,y\in K$,当 $x\neq y$,有 $\eta(x,y)\neq0$ 及

$$\alpha(x,y)=\alpha(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

则 $F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数当且仅当 $F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是严格 α-预不变凸函数,且存在常数 $\gamma>0$ 使得对于 $\forall x,y\in K$,存在 $\bar{\lambda}\in(0,1)$ 满足

$$F(y+\bar{\lambda}\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\bar{\lambda})F(y)+\bar{\lambda}F(x)-\gamma\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x,y)\|^2 \tag{7}$$

证明 必要性显然。下证充分性。

1)当 $x\neq y$。反证法,假设 $F:K\to\mathbf{R}$ 不是强 α-预不变凸函数,则对于 $\forall\beta>0$,$\exists x,y\in K$ 及 $\lambda\in(0,1)$ 使得

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))>(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2 \tag{8}$$

选取 γ_1,γ_2,且满足 $0<\gamma_1<\lambda<\gamma_2<1$,使得 $\lambda=\bar{\lambda}\gamma_1+(1-\bar{\lambda})\gamma_2$。令 $\bar{x}=y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y)$,$\bar{y}=y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y)$。因为 $F:K\to\mathbf{R}$ 是 α-预不变凸函数,有

$$F(\bar{x})<\gamma_1F(x)+(1-\gamma_1)F(y),\ F(\bar{y})<\gamma_2F(x)+(1-\gamma_2)F(y) \tag{9}$$

由条件 $\alpha(x,y)=\alpha(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$,有

$$\alpha(x,y)=\alpha(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

由条件C,有 $\eta(y+\gamma_1\alpha(x,y)\eta(x,y),y+\gamma_2\alpha(x,y)\eta(x,y))=(\gamma_1-\gamma_2)\eta(x,y)$。

类似定理1中的方法,可得 $\bar{y}+\bar{\lambda}\alpha(\bar{x},\bar{y})\eta(\bar{x},\bar{y})=y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)$。结合(7)式,有

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=F(\bar{y}+\bar{\lambda}\alpha(\bar{x},\bar{y})\eta\,\bar{x},\bar{y}))\leqslant$$
$$(1-\bar{\lambda})F(\bar{y})+\bar{\lambda}F(\bar{x})-\gamma\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(\bar{x},\bar{y})\|^2 \tag{10}$$

从而,由(9)、(10)式有

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))<\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\gamma\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})(\gamma_1-\gamma_2)^2\ \|\eta(x,y)\|^2=$$
$$\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\gamma\frac{(\gamma_2-\lambda)(\lambda-\gamma_1)}{(\gamma_1-\gamma_2)^2}(\gamma_1-\gamma_2)^2\ \|\eta(x,y)\|^2=$$

$$\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\gamma(\gamma_2-\lambda)(\lambda-\gamma_1)\|\eta(x,y)\|^2=$$

$$\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2(\text{令 }\beta=\frac{\gamma(\gamma_2-\lambda)(\lambda-\gamma_1)}{\lambda(1-\lambda)}>0)$$

这与(8)式矛盾，所以假设不成立，$F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数。

2)当 $x=y$，有 $F(x)=F(y)$。因为 η 满足条件 C，从而由 $x=y$ 得 $\eta(x,y)=0$，所以存在常数 $\gamma>0$ 使得对于 $\forall x,y\in K$，当 $x=y$ 有 $F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$，$\forall\lambda\in(0,1)$，从而 $F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数。　　证毕

定理 3[7]　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，η 满足条件 C 且

$$\alpha(x,y)=\alpha(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$

则 $F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数，当且仅当 $F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是半严格 α-预不变凸函数，且存在常数 $\gamma>0$ 使得对于 $\forall x,y\in K$，存在 $\bar{\lambda}\in(0,1)$ 满足

$$F(y+\bar{\lambda}\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\bar{\lambda})F(y)+\bar{\lambda}F(x)-\gamma\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x,y)\|^2\tag{11}$$

证明　必要性显然。下证充分性。只需证明对于 $\forall\lambda\in(0,1)$ 及 $\forall x,y\in K$，$\exists\beta>0$ 有

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)-\gamma\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$

若 $x\neq y$，由(11)式，对于 $\forall x,y\in K$ 且 $\eta(x,y)\neq0$ 有

$$F(y+\bar{\lambda}\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\bar{\lambda})F(y)+\bar{\lambda}F(x)-\gamma\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x,y)\|^2<\bar{\lambda}F(x)+(1-\bar{\lambda})F(y)\tag{12}$$

由文献[8]中的定理 1 和(12)式知 $F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是 α-预不变凸函数，从而由定理 1 知，$F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数。　　证毕

注 2　定理 1、定理 2 和定理 3 不但给出了强 α-预不变凸函数的 3 个充要条件，而且将文献[3]中强预不变凸函数的相应结论推广到强 α-预不变凸函数。

考虑下面的优化问题：(P) $\min F(x)$，其中 $F:K\to\mathbf{R}$，K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集。

定理 4　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，$F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数，则(P)的局部最优点也是其全局唯一的最优点。

证明　1)存在性。设 $\bar{x}$ 是关于(P)的局部最优点，则存在关于 $\bar{x}$ 的一个邻域 $N_\varepsilon(\bar{x})$，不存在 $x\in K\cap N_\varepsilon(\bar{x})$，使得

$$F(x)\leqslant F(\bar{x})\tag{13}$$

如果 $\bar{x}$ 不是(P)的全局最优点，则 $\exists\hat{x}\in K$，使得 $F(\hat{x})<F(\bar{x})$。又因为 $F:K\to\mathbf{R}$ 是强 α-预不变凸函数，则存在常数 $\beta>0$，$\forall\lambda\in(0,1)$，有

$$F(\bar{x}+\lambda\alpha(\hat{x},\bar{x})\eta(\hat{x},\bar{x}))\leqslant\lambda F(\bar{x})+(1-\lambda)F(\hat{x})-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(\hat{x},\bar{x})\|^2<\lambda F(\bar{x})+(1-\lambda)F(\hat{x})<F(\bar{x})\tag{14}$$

当 $\lambda>0$ 且充分小时

$$\bar{x}+\lambda\eta(\hat{x},\bar{x})\in K\cap N_\varepsilon(\bar{x})\tag{15}$$

根据(14)、(15)式得 $F(\bar{x}+\lambda\eta(\hat{x},\bar{x}))<F(\bar{x})$，此与(13)式矛盾。

2)唯一性。设 $x_0,x_1\in K$ 为(P)的两相异全局最优点，则 $F(x_0)=F(x_1)$。由于 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，所以对于 $\forall\lambda\in[0,1]$有 $x_0+\lambda\alpha(x_1,x_0)\eta(x_1,x_0)\in X$。又因为 $F:K\to R$ 是强 α-预不变凸函数，所以

$$F(x_0+\lambda\alpha(x_1,x_0)\eta(x_1,x_0))\leqslant\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_0)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x_1,x_0)\|^2<F(x_0)$$

这与 x_0 是(P)的全局最优点矛盾，因此(P)的全局最优点唯一。　　证毕

定理 5　设 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，$F:K\to\mathbf{R}$ 关于 η 和 α 是强 α-预不变凸函数，则(P)的最优解集是 α-不变凸集。

证明　设 x,y 是(P)的解，因为 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集，则对于 $\forall\lambda\in[0,1]$有 $z=y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)\in K$。又因为 $F:K\to\mathbf{R}$ 是强 α-预不变凸函数，所以

$$F(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\lambda)F(y)+\lambda F(x)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2<F(x)$$

于是 $z=y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)\in K$ 也是(P)的最优解，故(P)的最优解集是 α-不变凸集。　　证毕

参考文献：

[1] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bull Austral Math Soc, 1988, 38: 177-189.

[2] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258: 287-308.

[3] Tang W M, Yang X M. The sufficiency and necessity conditions of strongly preinvex functions[J]. Journal of Operation Research, 2006, 10(3): 50-58.

[4] Noor M A, Noor K I. Some characterizations of strongly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 316: 697-706.

[5] Fan L Y, Guo Y L. On strongly α-preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 330: 1412-1425.

[6] Noor M A. On generalized preinvex functions and monotonicities[J]. Journal of Inequality Pure Applied Mathematics, 2004, 5(4): 1-9.

[7] 刘彩平. 几类广义不变凸函数及其性质[D]. 重庆：重庆师范大学，2008.

Liu C P. Some kinds of generalized invex functions and their properties[D]. Chongqing: Chongqing Normal University, 2008.

[8] 王海英，符祖峰，吴永武. 半严格 α-预不变凸函数的一些性质[J]. 安顺学院学报，2012，14(3)：130-132.

Wang H Y, Fu Z F, Wu Y W. Some characterizations of semistrictly α-preinvex functions[J]. Journal of Anshun University, 2012, 14(3): 130-132.

[9] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258: 287-308.

[10] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Characterizations and applications of prequasiinvex functions[J]. Journal of Optimization Theory Applications, 2001, 110(3): 645-668.

[11] Luo H Z, Xu Z K. On characterizations of prequasi-invex functions[J]. Journal of Optimization Theory Applications, 2004, 120(2): 429-439.

[12] 刘彩平. 半严格不变凸函数[J]. 运筹学学报，2007，11(4)：85-92.

Liu CP. Semistrictly invex functions[J]. Operations Research Transactions, 2007, 11(4): 85-92.

[13] 王海英，武慧虹. 半连续函数的预不变凸性[J]. 河南科技大学学报：自然科学版，2011，32(3)：75-78.

Wang H Y, Wu H H. Preinvex functions of semi-continuous functions[J]. Journal of Henan University of Science and Technology: Natural Science, 2011, 32(3): 75-78.

Operations Research and Cybernetics

The Strongly α-preinvex Functions

WANG Haiying, FU Zufeng

(School of Science, Anshun College, Anshun Guizhou 561000, China)

Abstract: One important type of generalized convex functions termed as strongly α-preinvex functions is studied. The relationships among strongly α-preinvex functions and α-preinvex functions, and strictly α-preinvex functions and semistrictly α-preinvex functions have been discussed. Three important theorems of properties have obtained for it on the middle point strongly α-preinvexity. We also present two important applications in terms of strongly α-preinvex functions in mathematical programming. These results complete the researches for the strongly α-preinvex functions to some extent.

Key words: strongly α-preinvex functions; α-preinvex functions; strictly α-preinvex functions; semistrictly α-preinvex functions

(责任编辑　黄　颖)