2014 年 7 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jul. 2014
第 31 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 31 No. 4

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140405

具有超矩形约束的三次规划的全局最优性条件*

周雪刚
(广东金融学院 应用数学系,广州 510521)

摘要:研究了一类具有超矩形约束的特殊三次规划问题,利用目标函数的三次上估计函数与下估计函数推导出该问题的全局最优必要性与充分性条件。首先,构造如下形式的三次上估计函数与下估计函数 $h(x)=l(x)-l(\bar{x})+f(\bar{x})$,其中 $f(x)$ 是目标函数,$l(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+(b+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q})\bar{x})^{\mathrm{T}}x$。接着利用三次上估计函数建立判断一个可行点是全局最优点的全局最优必要性条件。然后利用三次下估计函数建立判断一个可行点是全局最优点的全局最优充分性条件:$\tau_i p_i(x_i)+\tau_i\min\{\gamma_i p_i(u_i),\gamma_i p_i(v_i)\}\geqslant 0,\forall i\in I,\bar{\tau}_i p_i(\bar{x}_i)\leqslant 0$ 与 $p_i(\bar{x}_i)=0,\forall i\in J$。一些实例说明了这些全局最优必要性与充分性条件的有效性与可行性。

关键词:三次规划;全局最优性条件;三次上、下估计函数
中图分类号:O221 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)04-0021-05

本文主要研究如下具有超矩形约束的三次规划问题(CP)
$$\begin{cases}\min & f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x+b^{\mathrm{T}}x\\ \text{s. t.} & x\in D=\prod_{i=1}^{n}[u_i,v_i],x\in\mathbf{R}^n\end{cases}$$
,其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实对称方阵,对任意的 $i=1,2,\cdots,n,\alpha_i,u_i,v_i\in\mathbf{R},u_i\leqslant v_i,b\in\mathbf{R}^n$,$D$ 被称为超矩形约束。

全局优化在经济、工程、管理等科学中有广泛的应用,三次规划是一类重要的全局优化问题,三次规划在三次多项式近似优化、凸规划、工程设计[1-3]等方面有着广泛应用。全局最优化问题的一个主要的困难在于获得一局部极小点后如何判断该局部极小点是否为全局最优解,而经典的 KKT 等局部最优性条件只能用来判断一个可行点是局部极小点,不能用来判断该点是全局最优点,因而全局最优性条件的研究对全局优化问题的研究也是至关重要的,近年来对一些特殊全局优化问题的全局最优化条件的研究已取得了一些进展[4-8]。

本文首先构造具有超矩形约束的三次目标函数的三次上、下估计函数,接着利用三次上估计函数建立全局最优必要性条件,然后利用三次下估计函数建立全局最优充分性条件。

1 三次估计函数

首先介绍本文后面将要用到的一些基本记号,$\mathbf{R}$ 表示实线性空间,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间,对于向量 $x,y\in\mathbf{R}^n$,$x\geqslant y\Leftrightarrow x_i\geqslant y_i(i=1,2,\cdots,n)$,单位矩阵用 $\boldsymbol{E}$ 表示,$\boldsymbol{S}^n$ 表示 n 阶实对称矩阵,用 $diag(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 表示对角线元素为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的对角矩阵。

定义 1 设 $D\in\mathbf{R}^n$,如果对任意 $x\in D$ 有三次函数 $h(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 满足 $h(x)\geqslant f(x)$ 且 $h(\bar{x})=f(\bar{x})$,则称三次函数 $h(x)$ 是函数 $f(x)$ 在点 $\bar{x}\in D$ 的三次上估计函数;如果对任意 $x\in D$ 有三次函数 $h(x)$ 满足 $h(x)\leqslant f(x)$ 且 $h(\bar{x})=f(\bar{x})$,则称三次函数 $h(x)$ 是函数 $f(x)$ 在点 $\bar{x}\in D$ 的三次下估计函数。本文后面构造特殊的三次估计函数 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+d^{\mathrm{T}}x$,其中 $\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n)$。下面以结论是明显的。

引理 1 对 $\forall x\in D$,若存在一个实对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q}$ 是负半定矩阵,设 $l(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+$

* 收稿日期:2013-06-03 修回日期:2013-12-03 网络出版时间:2014-7-3 23:03
资助项目:广东省自然科学基金博士科研启动基金(No. S2013040012506/2013);广东金融学院科研项目(No. 2012RCYJ005/2012)
作者简介:周雪刚,男,讲师,博士,研究方向为最优化理论与算法、模糊优化,E-mail: zhouxg@aliyun.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140703.2303.005.html

$(b+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q})\overline{x})^{\mathrm{T}}x$,则函数 $h(x)=l(x)-l(\overline{x})+f(\overline{x})$ 是函数 $f(x)$ 在 D 上关于点 $\overline{x}$ 的三次上估计函数。

引理2 对 $\forall x\in D$,如果存在一个实对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q}$ 是正半定矩阵,设 $l(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+(b+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q})\overline{x})^{\mathrm{T}}x$,则函数 $h(x)=l(x)-l(\overline{x})+f(\overline{x})$ 是函数 $f(x)$ 在 D 上关于点 $\overline{x}$ 的三次下估计函数。

为了获得问题(CP)的全局最优性条件,定义如下后文将要用到的符号与函数。设 $l(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+d^{\mathrm{T}}x$,其中 $\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n)$,$d=b+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q})\overline{x}$,并设

$$p_i(x_i)=\frac{1}{3}\alpha_i(x_i-\overline{x}_i)^2+\frac{1}{2}q_i(x_i-\overline{x}_i)+(d_i+q_i\overline{x}_i+\alpha_i x_i\overline{x}_i),\ t_i=-\frac{1}{2}\overline{x}_i-\frac{3q_i}{4\alpha_i}$$

显然,当 $\alpha_i>0$ 时,t_i 是 $p_i(x_i)$ 的最小值点,当 $\alpha_i<0$ 时,t_i 是 $p_i(x_i)$ 的最大值点。设 $I=\{i\mid\overline{x}_i=u_i$ 或者 $v_i\}$,$J=\{i\mid\overline{x}_i\in(u_i,v_i)\}$。对 $\forall i\in I$,定义

$$\breve{x}_i=\begin{cases}v_i,若\ \overline{x}_i=u_i\\u_i,若\ \overline{x}_i=v_i\end{cases},\gamma_i=\begin{cases}1,若\ \overline{x}_i=u_i\\-1,若\ \overline{x}_i=v_i\end{cases},\tilde{\tau}_i=\gamma_i w_i,\tilde{x}_i=\begin{cases}\overline{x}_i,若\ t_i\leqslant u_i\ 与\ \alpha_i>0\ 或\ t_i\geqslant v_i\ 与\ \alpha_i<0\ 或\ \alpha_i=0\\\breve{x}_i,若\ t_i\leqslant u_i\ 与\ \alpha_i<0\ 或\ t_i\geqslant v_i\ 与\ \alpha_i>0\\t_i,若\ t_i\in(u_i,v_i)且\ \alpha_i\neq 0\end{cases}$$

$$w_i=\begin{cases}0,若\ t_i\in(u_i,v_i),\alpha_i<0,\overline{x}_i=u_i\\0,若\ t_i\in(u_i,v_i),\alpha_i>0,\overline{x}_i=v_i\\0,若\ \alpha_i=0\\1,其它\end{cases},\tau_i=\begin{cases}1,若\ t_i\in(u_i,v_i),\alpha_i<0,\overline{x}_i=u_i\\1,若\ t_i\in(u_i,v_i),\alpha_i>0,\overline{x}_i=v_i\\1,若\ \alpha_i=0\\0,其它\end{cases}$$

对 $\forall i\in J$ 定义

$$\hat{x}_i=\begin{cases}\overline{x}_i,若\ t_i\leqslant u_i\ 与\ \alpha_i>0\ 或\ t_i\geqslant v_i\ 与\ \alpha_i<0\ 或\ q_i\geqslant 0\ 与\ \alpha_i=0\\u_i,若\ t_i\in(u_i,\overline{x}_i]与\ \alpha_i>0\\v_i,若\ t_i\in[\overline{x}_i,v_i)与\ \alpha_i<0\end{cases},\hat{\tau}_i=\begin{cases}1,若\ t_i\in(u_i,\overline{x}_i]与\ \alpha_i>0\\-1,若\ t_i\in[\overline{x}_i,v_i)与\ \alpha_i<0\\0,其它\end{cases}$$

根据文献[7]的推论4可知,当可行点 $\overline{x}\in D$ 是问题(CP)全局最优点,则对 $\forall i\in J$,如下5种情况不会发生:1) $t_i\geqslant v_i,\alpha_i>0$;2) $t_i\in(\overline{x}_i,v_i),\alpha_i>0$;3) $t_i\leqslant u_i,\alpha_i<0$;4) $t_i\in(u_i,\overline{x}_i),\alpha_i<0$;5) $q_i<0,\alpha_i=0$。不失一般性,如果没有特别声明,下面假设所讨论的 $\overline{x}\in D$ 都不会发生上面5种情况。

2 全局最优必要性条件与三次上估计函数

这一节利用三次上估计函数构建问题(CP)的全局最优必要性条件。

定理1 若对任意 $x\in D$ 存在矩阵 $\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n)$,$q_i\in\mathbf{R}$ 使得 $\mathbf{A}-\boldsymbol{Q}$ 是负半定的,设 $l(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+d^{\mathrm{T}}x$,其中 $d=b+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q})\overline{x}$。如果 $\overline{x}$ 是(CP)的全局最优点,则有

$$\tilde{\tau}_i p_i(\tilde{x}_i)+\tau_i\min\{\gamma_i p_i(u_i),\gamma_i p_i(v_i)\}\geqslant 0,\ \forall i\in I \tag{1}$$

$$\hat{\tau}_i p_i(\hat{x}_i)\leqslant 0,\ p_i(\overline{x}_i)=0,\ \forall i\in J \tag{2}$$

证明 设 $h(x)=l(x)-l(\overline{x})+f(\overline{x})$,由引理1知 $h(x)$ 是 $f(x)$ 在 $\overline{x}\in D$ 的三次上估计函数,则对 $\forall x\in D$ 有

$$f(x)-f(\overline{x})\leqslant l(x)-l(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{3}x_i^3+\frac{1}{2}x\boldsymbol{Q}x+d^{\mathrm{T}}x-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{3}\overline{x}_i^3-\frac{1}{2}\overline{x}\boldsymbol{Q}\overline{x}-d^{\mathrm{T}}\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i)(x_i-\overline{x}_i)$$

由于 $\overline{x}$ 是(CP)的全局最优点,所以对 $\forall x\in D$ 有 $\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i)(x_i-\overline{x}_i)\geqslant 0$,这等价于对所有 i 有下式成立

$$p_i(x_i)(x_i-\overline{x}_i)\geqslant 0,\ \forall x_i\in[u_i,v_i] \tag{3}$$

否则,存在 i_0 与 x_{i_0} 使得(3)式不成立,设取 $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$,其中 $x_{i_0}^*=x_{i_0}$ 与 $x_i^*=\overline{x}_i(i\neq i_0)$,则有 $l(x^*)-l(\overline{x})=p_{i_0}(x_{i_0})(x_{i_0}-\overline{x}_{i_0})<0$,与 $\overline{x}$ 是(CP)的全局最优点矛盾。下面分3种情况 $\overline{x}_i=u_i$、$\overline{x}_i=v_i$ 与 $\overline{x}_i\in(u_i,v_i)$ 证明(3)式与条件(1)或(2)等价。

1)设 $\overline{x}_i=u_i$,则 $i\in I$ 且(3)式等价于:对所有的 $x_i\in[u_i,v_i]$ 有

$$p_i(x_i)=\frac{1}{3}\alpha_i(x_i-\overline{x}_i)^2+\frac{1}{2}q_i(x_i-\overline{x}_i)+(d_i+q_i\overline{x}_i+\alpha_i x_i\overline{x}_i)\geqslant 0 \tag{4}$$

如果 $\alpha_i>0$,则 $p_i(x_i)$ 的最小值点为 t_i。当 $t_i\leqslant u_i$ 时,(4)式成立当且仅当 $p_i(u_i)\geqslant 0$ 成立。

取 $\tilde{x}=u_i,\gamma_i=1,w_i=1,\tilde{\tau}_i=1,\tau_i=0$,则 $p_i(u_i)\geqslant 0$ 等价于(1)式。因此(4)式与(1)式等价。当 $t_i\geqslant v_i$ 时,则(4)式成立当且仅当 $p_i(v_i)\geqslant 0$ 成立。设 $\tilde{x}=v_i,\gamma_i=1,w_i=1,\tilde{\tau}_i=1,\tau_i=0$,则(1)式为 $p_i(v_i)\geqslant 0$,则(4)式等价于(1)式。当 $t_i\in(u_i,v_i)$时,取 $\tilde{x}=t_i,\gamma_i=1,w_i=1,\tilde{\tau}_i=1,\tau_i=0$,则(4)式成立当且仅当(3)式成立。因而当 $\alpha_i>0$ 时,(3)式与(1)式等价。同理可证当 $\alpha_i<0$ 或 $\alpha_i=0$ 时的情况。

2)设 $\bar{x}_i=v_i$,则 $i\in I$,类似于上面的证明可得(3)式与(1)式等价。

3)当 $\bar{x}_i\in(u_i,v_i)$时,则 $i\in J$,则(3)式等价于

$$\begin{cases}p_i(x_i)\leqslant 0,x_i\in[u_i,\bar{x}_i)\\ p_i(x_i)\geqslant 0,x_i\in(\bar{x}_i,v_i]\end{cases}\tag{5}$$

讨论 $\alpha_i>0$ 与 $t_i\in(u_i,\bar{x}_i]$的情形,其它情形可类似分析。此时(5)式等价于 $p_i(\bar{x}_i)=0$ 与 $p_i(u_i)\leqslant 0$ 同时成立,即 $p_i(\bar{x}_i)=0$ 与 $\hat{\tau}_i p_i(\hat{x}_i)\leqslant 0$,其中 $\hat{\tau}_i=1,\hat{x}_i=u_i$,因此(3)式与(2)式等价。　　证毕

定义 2[10]　设矩阵 $\boldsymbol{A}\in S^n$ 对任意 $i=1,2,\cdots,n$ 满足 $|a_{ii}|\geqslant\sum\limits_{j\neq i,j=1}^{n}|a_{ij}|$,则称该矩阵为对角占优矩阵。

众所周知,主对角线元素非负的对角占优矩阵一定是正半定的。对任意 i 定义 $\bar{\boldsymbol{A}}=diag(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n)$,其中 $\bar{a}_i=a_{ii}+\sum\limits_{j\neq i,j=1}^{n}|a_{ij}|(i=1,2,\cdots,n)$,设 η 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根,设 $\boldsymbol{Q}_\lambda=\lambda\bar{\boldsymbol{A}}+(1-\lambda)(\eta\boldsymbol{E})=diag(q_{1\lambda},\cdots,q_{n\lambda})$,其中 $\lambda\in[0,1]$,$q_{i\lambda}=\lambda\bar{a}_i+(1-\lambda)\eta$,则有如下结论成立。

定理 2　设 $l(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\lambda x+d^{\mathrm{T}}x$,其中 $d=b+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q}_\lambda)\bar{x}$。如果 $\bar{x}$ 是(CP)的全局最优点,则有

$$\tilde{\tau}_i p_i(\tilde{x}_i)+\tau_i\min\{\gamma_i p_i(u_i),\gamma_i p_i(v_i)\}\geqslant 0,\forall i\in I\tag{6}$$

$$\hat{\tau}_i p_i(\hat{x}_i)\leqslant 0,p_i(\bar{x}_i)=0,\forall i\in J\tag{7}$$

其中 $p_i(x_i)=\frac{1}{3}\alpha_i(x_i-\bar{x}_i)^2+\frac{1}{2}q_{i\lambda}(x_i-\bar{x}_i)+(d_i+q_{i\lambda}\bar{x}_i+\alpha_i x_i\bar{x}_i)$,$t_i=-\frac{1}{2}\bar{x}_i-\frac{3q_{i\lambda}}{4\alpha_i}$。

证明　根据 η 定义可知 $\boldsymbol{A}-\eta\boldsymbol{E}$ 是负半定的,同时 $\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{A}$ 是主对角线元素非负的对角占优矩阵,因此 $\boldsymbol{A}-\bar{\boldsymbol{A}}$ 是负半定的。因而,对任意 $\lambda\in[0,1]$有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q}_\lambda$ 是负半定的,根据定理 1 可知,如果 $\bar{x}$ 是(CP)的全局最优点,则(6)式和(7)式必成立。　　证毕

例 1　考虑如下(CP)问题 $\begin{cases}\min & f(x)=\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x+b^{\mathrm{T}}x\\ \mathrm{s.\,t.} & x\in D=\prod\limits_{i=1}^{3}[-1,1]\end{cases}$,其中 $\alpha_1=1,\alpha_2=-3,\alpha_3=6,b=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}=diag(-1,-2,-3)$。该问题有全局最小值点 $\bar{x}=(-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 与局部最小点 $x_1=(-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$。简单计算得 $\bar{\boldsymbol{A}}=diag(-1,-2,-3)$,$\eta=-1$,因而对所有 $\lambda\in[0,1]$有 $\boldsymbol{Q}_\lambda=diag(-1,-1-\lambda,-1-2\lambda)$,$d=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q}_\lambda)\bar{x}+b=(1,-2+\lambda,4-2\lambda)^{\mathrm{T}}$,$t_1=1.25$,$t_2=-(3+\lambda)/4$,$t_3=(5+2\lambda)/8$,对于可行点 $\bar{x}$ 有 $I=\{1,2,3\}$,定理 2 中最优必要性条件(6)、(7)式为

$$\begin{cases}\tilde{\tau}_1 p_1(\tilde{x}_1)+\tau_1\min\{\gamma_1 p_1(u_1),\gamma_1 p_1(v_1)\}=p_1(v_1)=\frac{5.625}{3}\geqslant 0\\ \tilde{\tau}_2 p_2(\tilde{x}_2)+\tau_2\min\{\gamma_2 p_2(u_2),\gamma_2 p_2(v_2)\}=-p_2(t_2)=\frac{47}{16}-\frac{7}{8}\lambda-\frac{1}{16}\lambda^2\geqslant 0\\ \tilde{\tau}_3 p_3(\tilde{x}_3)+\tau_3\min\{\gamma_3 p_3(u_3),\gamma_3 pv(v_3)\}=p_3(t_3)=\frac{183}{32}-\frac{13}{8}\lambda-\frac{1}{8}\lambda^2\geqslant 0\end{cases}$$

对于可行点 x_1 有 $I=\{1,2,3\}$,$d=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q}_\lambda)x_1+b=(1,-\lambda,4-2\lambda)^{\mathrm{T}}$,$t_1=1.25$,$t_2=(1-\lambda)/4$,$t_3=(5+2\lambda)/8$,因而定理 2 中最优必要性条件(6)、(7)式为

$$\begin{cases}\tilde{\tau}_1 p_1(\tilde{x}_1)+\tau_1\min\{\gamma_1 p_1(u_1),\gamma_1 p_1(v_1)\}=p_1(v_1)=\frac{5.625}{3}\geqslant 0\\ \tilde{\tau}_2 p_2(\tilde{x}_2)+\tau_2\min\{\gamma_2 p_2(u_2),\gamma_2 p_2(v_2)\}=\min\{p_2(u_2),p_2(v_2)\}=-2<0\\ \tilde{\tau}_3 p_3(\tilde{x}_3)+\tau_3\min\{\gamma_3 p_3(u_3),\gamma_3 pv(v_3)\}=p_3(t_3)=\frac{183}{32}-\frac{13}{8}\lambda-\frac{1}{8}\lambda^2\geqslant 0\end{cases}$$

3 全局最优充分性条件与三次下估计函数

这一节利用三次下估计函数构建问题(CP)的全局最优充分性条件。

定理3 若对$\forall\ x\in D$存在矩阵$\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n),q_i\in\mathbf{R}$使得$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q}$是正半定的，设$l(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+d^{\mathrm{T}}x$，其中$d=b+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q})\bar{x}$。如果下面2个条件成立

$$\tilde{\tau}_i p_i(\tilde{x}_i)+\tau_i\min\{\gamma_i p_i(u_i),\gamma_i p_i(v_i)\}\geqslant 0,\forall i\in I \tag{8}$$

$$\hat{\tau}_i p_i(\hat{x}_i)\leqslant 0,p_i(\bar{x}_i)=0,\forall i\in J \tag{9}$$

则$\bar{x}$是(CP)的全局最优点。

证明 设$h(x)=l(x)-l(\bar{x})+f(\bar{x})$，由引理2可知$h(x)$是$f(x)$在$\bar{x}\in D$的三次下估计函数，则对任意的$x\in D$有$f(x)-f(\bar{x})\geqslant l(x)-l(\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i)(x_i-\bar{x}_i)$。类似于定理1的证明，分$\bar{x}_i=u_i$、$\bar{x}_i=v_i$与$\bar{x}_i\in(u_i,v_i)$3种情况可证明，如果条件(8)、(9)成立，则对任意的$i=1,2,\cdots,n$与$x_i\in[u_i,v_i]$有$p_i(x_i)(x_i-\bar{x}_i)\geqslant 0$成立，即对任意的$x\in D$有不等式$f(x)-f(\bar{x})\geqslant 0$成立，因而$\bar{x}$是(CP)的全局最优点。 证毕

设$\tilde{\boldsymbol{A}}=diag(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)$，其中$\tilde{a}_i=a_{ii}-\sum_{j\neq i,j=1}^{n}|a_{ij}|(i=1,2,\cdots,n)$，设$\mu$是$\boldsymbol{A}$的最小特征根，设$\tilde{\boldsymbol{Q}}_\lambda=\lambda\tilde{\boldsymbol{A}}+(1-\lambda)(\mu\boldsymbol{E})=diag(\tilde{q}_{1\lambda},\cdots,\tilde{q}_{n\lambda})$，其中$\lambda\in[0,1]$，$\tilde{q}_{i\lambda}=\lambda\tilde{a}_i+(1-\lambda)\mu$，则有如下结论成立。

定理4 设$l(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{Q}}_\lambda x+d^{\mathrm{T}}x$，其中$d=b+(\boldsymbol{A}-\tilde{\boldsymbol{Q}}_\lambda)\bar{x}$。如果存在$\lambda\in[0,1]$使得下面的条件成立

$$\tilde{\tau}_i p_i(\tilde{x}_i)+\tau_i\min\{\gamma_i p_i(u_i),\gamma_i p_i(v_i)\}\geqslant 0,\forall i\in I \tag{10}$$

$$\hat{\tau}_i p_i(\hat{x}_i)\leqslant 0,p_i(\bar{x}_i)=0,\forall i\in J \tag{11}$$

其中$p_i(x_i)=\frac{1}{3}\alpha_i(x_i-\bar{x}_i)^2+\frac{1}{2}\tilde{q}_{i\lambda}(x_i-\bar{x}_i)+(d_i+\tilde{q}_{i\lambda}\bar{x}_i+\alpha_i x_i\bar{x}_i)$，$t_i=-\frac{1}{2}\bar{x}_i-\frac{3\tilde{q}_{i\lambda}}{4\alpha_i}$。则$\bar{x}$是(CP)的全局最优点。

例2 (CP)问题见例1。简单计算可行$\tilde{\boldsymbol{A}}=diag(-1,-2,-3)$，$\mu=-3$，则对任意的$\lambda\in[0,1]$有$\tilde{\boldsymbol{Q}}_\lambda=diag(-3+2\lambda,-3+\lambda,-3)$，对于可行点$\bar{x}=(-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$有$I=\{1,2,3\}$，$d=(\boldsymbol{A}-\tilde{\boldsymbol{Q}}_\lambda)\bar{x}+b=(-1+2\lambda,-\lambda,2)^{\mathrm{T}}$，$t_1=\frac{11-6\lambda}{4}$，$t_2=-\frac{5-\lambda}{4}$，$t_3=\frac{7}{8}$，因而有

$$\begin{cases}\tilde{\tau}_1 p_1(\tilde{x}_1)+\tau_1\min\{\gamma_1 p_1(u_1),\gamma_1 p_1(v_1)\}=p_1(v_1)=-\frac{2}{3}+2\lambda\\ \tilde{\tau}_2 p_2(\tilde{x}_2)+\tau_2\min\{\gamma_2 p_2(u_2),\gamma_2 p_2(v_2)\}=-p_2(t_2)=1+\lambda\geqslant 0\\ \tilde{\tau}_3 p_3(\tilde{x}_3)+\tau_3\min\{\gamma_3 p_3(u_3),\gamma_3 pv(v_3)\}=p_3(t_3)=\frac{43}{8}\geqslant 0\end{cases}$$

因此对于所有的$\lambda\in\left[\frac{1}{3},1\right]$，$\bar{x}$满足条件(10)、(11)，即$\bar{x}$是全局最优点。对于可行点$x_1$有$I=\{1,2,3\}$，$d=(\boldsymbol{A}-\tilde{\boldsymbol{Q}}_\lambda)\bar{x}+b=(-1+2\lambda,-2-\lambda,2)^{\mathrm{T}}$，$t_1=\frac{11-6\lambda}{4}$，$t_2=-\frac{1-\lambda}{4}$，$t_3=\frac{7}{8}$，因而

$$\begin{cases}\tilde{\tau}_1 p_1(\tilde{x}_1)+\tau_1\min\{\gamma_1 p_1(u_1),\gamma_1 p_1(v_1)\}=p_1(v_1)=-\frac{2}{3}+2\lambda\\ \tilde{\tau}_2 p_2(\tilde{x}_2)+\tau_2\min\{\gamma_2 p_2(u_2),\gamma_2 p_2(v_2)\}=-p_2(t_2)=-3-\lambda<0\\ \tilde{\tau}_3 p_3(\tilde{x}_3)+\tau_3\min\{\gamma_3 p_3(u_3),\gamma_3 pv(v_3)\}=p_3(t_3)=\frac{43}{8}\geqslant 0\end{cases}$$

因此对于所有的$\lambda\in[0,1]$，条件(10)、(11)式都不成立。

4 结论

本文研究具有超矩形约束的一类特殊三次规划问题(CP)的全局最优性条件，首先构造具有超矩形约束的问

题(CP)的三次上、下估计函数，接着利用三次上估计函数建立全局最优必要性条件，然后利用三次下估计函数建立全局最优充分性条件，一些实例说明了这些全局最优性条件的有效性与可行性。

参考文献：

[1] Canfield R A. Multipoint cubic surrogate function for sequential approximate optimization [J].Struct Multidiscip Optim，2004，27(5)：326-336.

[2] Nesterov Y. Accelerating the cubic regularization of Newtons method on convex problems[J]. Math Program，2008，112(1)：159-181.

[3] Lin C S ，Chang P R，Luh J Y S. Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots[J]. IEEE Transact Autom Control AC，1983，28(12)：1066-1074.

[4] 祁云峰，吴至友. 混合整数二次规划的全局充分性最优条件[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(5)：1-4.
Qi Y F，Wu Z Y. Sufficient global optimality conditions for mixed-integer quadratic minimization problem with inequality constraints[J]. Journal of Chongqing Normal University：Natural Science，2010，27(5)：1-4.

[5] 王杉林. 一类非凸二次规划问题的全局最优性充分条件[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2008，25(4)：5-7.
Wang S L. Global optimality conditions of non-convex quadratic problem with quadratic equality constraints[J]. Journal of Chongqing Normal Universit：Natural Science. 2008，25(4)：5-7.

[6] 张甲，田志远，李敬玉. 一类非凸二次规划问题的全局最优性条件[J]. 青岛大学学报：自然科学版，2010，23(3)：20-23.
Zhang J，Tian Z Y，Li J Y. Sufficient global optimality conditions for some nonconvex quadratic program problems [J]. Journal of Qingdao University：Natural Science Edition，2010，23(3)：20-23.

[7] WangY J，Liang Z. Global optimality conditions for cubic minimization problem with box or binary constraints [J]. Journal of Global Optimization，2010，47(4)：583-595.

[8] Wu Z Y，Rubinov A M. Global optimality conditions for some classes of optimization problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2010，145(1)：164-185.

[9] Zhou X G，Cao B Y. New global optimality conditions for cubic minimization problem with box or bivalent constraints[J]. Pacific Journal of Optimization，2012，8(3)：631-647.

[10] Dahl G. A note on diagonally dominant matrices [J]. Linear Algebra Appl，2000，317(3)：217-224.

Operations Research and Cybernetics

Global Optimality Conditions for Cubic Minimization over Box Constraints

ZHOU Xuegang

(Department of Applied Mathematics，Guangdong University of Finance，Guangzhou 510521，China)

Abstract：In this paper，global optimality necessary and sufficient conditions are presented for a class cubic programming problems involving rectangle constraints via cubic overestimators and underestimators. Firstly，we construct cubic overestimators and underestimators of objective function $h(x)=l(x)-l(\bar{x})+f(\bar{x})$，where $f(x)$ is objective function and $l(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\alpha_i x_i^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+(b+(\mathbf{A}-\boldsymbol{Q})\bar{x})^{\mathrm{T}}x$. Secondly，by utilizing cubic overestimators，we present some necessary global optimality conditions for a feasible point to be a global minimizer of cubic progamming problems involving rectangle constraints. Then，the following sufficient conditions are established for a feasible point to be a global minimizer of cubic progamming problems using cubic underestimators：$\tilde{\tau}_i p_i(\tilde{x}_i)+\tau_i\min\{\gamma_i p_i(u_i),\gamma_i p_i(v_i)\}\geqslant 0,\ \forall i\in I,\ \hat{\tau}_i p_i(\hat{x}_i)\leqslant 0,\ p_i(\bar{x}_i)=0,\ \forall i\in J$. Finally，some examples are used to illustrate effectiveness and feasibility of global optimality conditions.

Key words：cubic programming；global optimality conditions；cubic overestimators and underestimators

（责任编辑　黄　颖）