运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140406

基于轻微利他均衡的古诺博弈研究*

王能发
(贵州财经大学 数学与统计学院,贵阳 550025)

摘要:在博弈论中有一个很重要的假设,那就是人是完全理性的,这一假设近乎苛刻。本文利用轻微利他均衡的思想,建立了基于轻微利他的古诺博弈模型。研究发现,如果局中人都表现出轻微利他的有限理性行为,则对博弈各方均有利,是互惠的。进一步讨论了局中人表现出轻微利他程度有差异的情况,结果发现:利他程度弱的局中人总体利润高于利他程度强的局中人。这一研究丰富了前人已有的成果,并在实践中有较强的指导意义。

关键词:轻微利他均衡;古诺博弈;有限理性;互惠

中图分类号:O225;F224.32 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)04-0026-04

古诺[1]于 1838 年,在特定的双寡头垄断竞争模型中就提出了纳什[2-3]后来所定义的博弈均衡,因此后人也称之为古诺-纳什博弈模型。这一研究成果已经成为公认的博弈论的经典文献之一。

在这些经典的博弈论文献中有一个重要的假设,那就是人是完全理性的,或者说是完全利己的。在现实中,从完全个体利益出发的利己行为最终并不能真正实现个体利益的最大化,著名的囚徒困境模型早已是例证。于是很多学者提出不完全理性,例如,1958 年 Simon[4]提出“有限理性”的概念。1975 年,Selten[5]提出 Nash 平衡点的精炼问题,把完全理性看成是有限理性的极限。以及近来赫伯特·金迪斯的专著《理性的边界—博弈论与各门行为科学的统一》专门讨论了理性的问题[6]。

相应地,基于不同的前提假设,古诺博弈模型得到了不断的改进和推广[7-12],例如两个寡头推广到多个寡头,需求由线性到非线性,边际成本由相同、不变修正为不同、动态变化等[13]。

2008 年 Marco 和 Morgan 提出轻微利他均衡[14]。所谓的轻微利他,指博弈的局中人不是完全利己的,在关心自身利益的同时,对于对手的利益也是关切的,他会对对手的利益赋予正的权重 ε,当然这种关切是轻微的,因为权重 $0<\varepsilon<1$。也就是说,关心自身的利益要胜过关心对手的利益。至于所赋予的权重值 ε 大小,取决于他对对手的关切程度。围绕两位学者提出的轻微利他均衡概念,文献[15]通过细致的论证,在理论上证明了满足一定的条件,非合作博弈的轻微利他平衡点是存在的。文献[16]则考虑了轻微利他平衡点的稳定性。

本文利用 Marco 和 Morgan 提出的轻微利他均衡思想[14],考虑局中人不是完全理性和利己的,而是利他的有限理性行为,当然这种利他的有限理性行为是轻微利他的,并且进一步讨论了每个局中人轻微利他的强弱程度不一致时的情况,结果会对模型产生何种影响。

1 模型的建立与分析

假设有 n 个局中人,即 n 个企业,他们生产并销售同一种产品。考虑他们无固定成本,生产的边际成本为同一个常数 c,其中 $c<a$,a 是一个正常数,即该产品的市场最高价格。并设第 i 个企业的产量为 $q_i(i=1,\cdots,n)$,市场的逆需求函数为 $p=a-\sum_{i=1}^{n}q_i$(即价格是产量的函数)。又假设企业 i 的支付函数即为利润函数 $\pi_i=\left(a-\sum_{k=1}^{n}q_k\right)q_i-cq_i=\left(a-c-\sum_{k=1}^{n}q_k\right)q_i$。

下面考虑每个企业轻微利他无差异的情形,即每个企业利他的程度是一致的。于是根据文献[14],有如下

* 收稿日期:2013-03-11 网络出版时间:2014-7-3 23:03
资助项目:国家自然科学基金(No. 11161015);贵州省科技厅自然科学基金(No.[2011]J2096)
作者简介:王能发,男,讲师,研究方向为博弈论与非线性分析,E-mail:nengfa_wang@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140703.2303.006.html

定义。

定义 1　(轻微利他均衡)企业 i 的 ε-利他支付函数为

$$\pi_{i\varepsilon}(q_i,q_{\hat{i}})=\pi_i+\varepsilon\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\pi_j=\left(a-c-\sum_{i=1}^{n}q_i\right)q_i+\varepsilon\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\left(a-c-\sum_{i=1}^{n}q_i\right)q_j$$

如果存在 $q^*=(q_1^*,\cdots,q_n^*)\in[0,\infty)$，使 $\forall i\in N$，有 $\pi_{i\varepsilon}(q_i^*,q_{\hat{i}}^*)=\max\limits_{x_i\in[0,+\infty)}\pi_{i\varepsilon}(x_i,q_{\hat{i}}^*)$，则称 $q^*=(q_1^*,\cdots,q_n^*)$ 是一个轻微利他均衡，其中 $q_{\hat{i}}^*=(q_1^*,q_2^*,\cdots,q_{i-1}^*,q_{i+1}^*,\cdots,q_n^*)$。

从 ε-利他支付函数可看出，每个企业在最大化自身利润的同时稍稍考虑了其他企业的利润 ε，$0<\varepsilon<1$，即利他是轻微的。

于是由一阶条件得

$$\frac{\partial\pi_{i\varepsilon}}{\partial q_i}=a-c-\sum_{j\in N\setminus\{i\}}q_j-2q_i-\varepsilon\sum_{j\in N\setminus\{i\}}q_j=(a-c)-(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}q_i-(1-\varepsilon)q_i=0,i=1,\cdots,n$$

$$q_i^*=\frac{a-c}{n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)},i=1,\cdots,n$$

当 $\varepsilon=0$，即完全理性或完全利己时，也即经典的纳什博弈模型[2-3]，$q_i^*=\dfrac{a-c}{n+1}$，$i=1,\cdots,n$；当 $\varepsilon=1$，即垄断时 $q_i^*=\dfrac{a-c}{2n}$，$i=1,\cdots,n$。

定理 1　当 $0<\varepsilon<1$，n 个企业的总生产量 Q 有 $Q_1<Q_\varepsilon<Q_0$。

证明　由于企业 i 的产量 $q_i^*=\dfrac{a-c}{n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)}$，$i=1,\cdots,n$，则 n 个企业的总生产量 Q_ε 为

$$Q_\varepsilon=q_1^*+\cdots+q_n^*=\frac{n(a-c)}{n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)}$$

因 $\dfrac{\mathrm{d}Q_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}=\dfrac{-n(n-1)(a-c)}{[n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)]^2}<0$，则当 $0<\varepsilon<1$ 时，故有 $Q_1<Q_\varepsilon<Q_0$。　证毕

定理 2　当 $0<\varepsilon<1$，n 个企业的总利润 TR 有 $TR_0<TR_\varepsilon<TR_1$。

证明　由于企业 i 的利润

$$\pi_i^*=[a-c-(q_1^*+q_2^*+\cdots+q_n^*)]q_i^*=\left[a-c-\frac{n(a-c)}{n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)}\right]\cdot\frac{a-c}{n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)}=$$

$$\frac{1+(n-1)\varepsilon}{[n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)]^2}(a-c)^2,i=1,\cdots,n$$

则 n 个企业的总利润 TR_ε 为

$$TR_\varepsilon=\pi_1^*+\cdots+\pi_n^*=\frac{n[1+(n-1)\varepsilon]}{[n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)]^2}(a-c)^2$$

因 $\dfrac{\mathrm{d}TR_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}=\dfrac{n(n-1)^2(1-\varepsilon)[n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)]}{[n(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)]^4}>0$，则当 $0<\varepsilon<1$ 时，故有 $TR_0<TR_\varepsilon<TR_1$。　证毕

定理 1 和定理 2 表明：$\varepsilon=0$，即完全理性或完全利己时，产量最多，但总体利润最低；$\varepsilon=1$，即垄断时，产量最少，利润却最高；$0<\varepsilon<1$ 时，产量和利润介于二者之间。在这样一个反垄断时代，这一结论为企业走出“反垄断”提供了一条很好的出路，那就是轻微利他，说明了利他也是利己的，也即互惠的。

2 模型的改进

下面考虑每个企业轻微利他有差异的情形，即每个企业利他的程度是不一致的。这里稍微复杂一些，先考虑 2 人博弈的情形，然后再考虑 n 人的情形。

1)考虑 2 人博弈的情形。

企业 1 的 ε_1-利他支付函数为 $\pi_{1\varepsilon_1}(q_1,q_2)=[a-c-(q_1+q_2)]q_1+\varepsilon_1[a-c-(q_1+q_2)]q_2$；

企业 2 的 ε_2-利他支付函数为 $\pi_{2\varepsilon_2}(q_1,q_2)=[a-c-(q_1+q_2)]q_2+\varepsilon_2[a-c-(q_1+q_2)]q_1$。

由一阶条件得 $\begin{cases}\dfrac{\partial\pi_{1\varepsilon_1}}{\partial q_1}=a-c-2q_1-q_2-\varepsilon_1q_2=0\\ \dfrac{\partial\pi_{2\varepsilon_2}}{\partial q_2}=a-c-q_1-2q_2-\varepsilon_2q_1=0\end{cases}$，则 $q_1^*=\dfrac{(a-c)(1-\varepsilon_1)}{4-(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}$，$q_2^*=\dfrac{(a-c)(1-\varepsilon_2)}{4-(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}$。于是显然

有定理3。

定理3 当$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1$时,有:产量$q_1^*>q_2^*$,利润$\pi_1^*>\pi_2^*$。

这一定理表明:当$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1$时,即企业1考虑企业2的利益程度弱于企业2考虑企业1的利益程度,也即企业1相对自私些,企业2相对无私些,有企业1的产量q_1^*大于企业2的产量q_2^*。又由于市场价格一样,自然企业1的利润π_1^*也高于企业2的利润π_2^*。换句话说,自私的企业产量还是多些,利润也高些,无私的企业产量还是少些,利润也低些。

2)考虑n人博弈的情形。

企业i的ε_i-利他支付函数为

$$\pi_{i\varepsilon_i}(q_i,q_{\bar{i}})=[a-c-(q_1+q_2+\cdots+q_n)]q_i+\varepsilon_i\sum_{j\in N\setminus\{i\}}[a-c-(q_1+q_2+\cdots+q_n)]q_j,i=1,\cdots,n$$

由一阶条件得

$$\frac{\partial\pi_{i\varepsilon_i}}{\partial q_i}=a-c-\sum_{j\in N\setminus\{i\}}q_j-2q_i-\varepsilon_i\sum_{j\in N\setminus\{i\}}q_j=(a-c)-(1+\varepsilon_i)\sum_{k=1}^{n}q_k-(1-\varepsilon_i)q_i=0,i=1,\cdots,n$$

即$\begin{cases}2q_1+(1+\varepsilon_1)q_2+(1+\varepsilon_1)q_3+\cdots+(1+\varepsilon_1)q_n=(a-c)\\(1+\varepsilon_2)q_1+2q_2+(1+\varepsilon_2)q_3+\cdots+(1+\varepsilon_2)q_n=(a-c)\\(1+\varepsilon_3)q_1+(1+\varepsilon_3)q_2+2q_3+\cdots+(1+\varepsilon_3)q_n=(a-c)\\\cdots\cdots\\(1+\varepsilon_n)q_1+(1+\varepsilon_n)q_2+(1+\varepsilon_n)q_3+\cdots+2q_n=(a-c)\end{cases}$,由Cramer法则,有

$$q_i^*=\frac{a-c}{1-\varepsilon_i}\cdot\frac{1+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_1}+\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_2}+\cdots+\dfrac{\varepsilon_n-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_n}}{1+\dfrac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}+\dfrac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}+\cdots+\dfrac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}},i=1,\cdots,n$$

定理4 当$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\cdots<\varepsilon_n<1$时,有产量$q_1^*>q_2^*>\cdots>q_n^*$,利润$\pi_1^*>\pi_2^*>\cdots>\pi_n^*$。

证明 当$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1$时,

$$q_1^*-q_2^*=\frac{a-c}{1+\dfrac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}+\cdots+\dfrac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}}\cdot\left(\frac{1+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}+\cdots+\dfrac{\varepsilon_n-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_n}}{1-\varepsilon_1}-\frac{1+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1}+\cdots+\dfrac{\varepsilon_n-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_n}}{1-\varepsilon_2}\right)=$$

$$\frac{(a-c)(n-1)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\left(1+\dfrac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}+\cdots+\dfrac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\right)}>0$$

则$q_1^*>q_2^*$。同理可得$q_2^*>q_3^*$,$q_3^*>q_4^*$,…。从而有$q_1^*>q_2^*>\cdots>q_n^*$,由于市场价格一样,故利润有$\pi_1^*>\pi_2^*>\cdots>\pi_n^*$。 证毕

这一定理再次表明:自私的企业产量还是多些,利润也高些,无私的企业产量还是少些,利润也低些。

3 结束语

文章基于轻微利他的程度一致时,发现产量和利润介于完全自私和垄断之间,这有很强的理论指导意义,特别是为企业走出"反垄断"提供了一条很好的出路。同样基于轻微利他的程度不一致时,自私的总会得到更多的好处即利润,无私的还是"吃亏"些。然而,利他程度在现实如何把握和度量呢?这是下一步应该考虑的课题。

参考文献:

[1] Cournot A A. Reachers sur les principles mathematiques de la theorie richesses[M]. Paris: Edward Elgar Publishing, 1838.

[2] Nash J. Equilibrium points in n-person games[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1950, 36(1): 48-49.

[3] Nash J. Non-cooperative games[J]. Ann of Math 1951, 54(2): 286-295.

[4] Simon H A. 管理决策新科学[M]. 李柱流,译. 北京:中国社会科学出版社,1982.

Simon H A. The new science of management decision[M]. Li Z L. Beijing: China Social Publishing House, 1982.

[5] Selten R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games[J]. Inter J of Game Theory, 1975, 4(1): 25-55.

[6] 赫伯特·金迪斯.理性的边界—博弈论与各门行为科学的统一[M].董志强,译.上海:格致出版社,2011.
Herbert Gintis. Rational boundaries — the unity of game theory and behavioral sciences[M]. Dong Z Q. Shanghai: Truth & Wisdom Press,2011.

[7] Agiza H N, Hegazi A S, Elsadany A A. The dynamics of bowley's model with bounded rationality[J]. Chaos, Solitons and Fractals,2001,12(9):1705-1717.

[8] Agiza H N, Hegazi A S, Elsadany A A. Complex dynamics and synchronization of a duopoly game with bounded rationality[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2002,58(1):133-146.

[9] 易余胤,盛昭瀚,肖条军.具溢出效应的有限理性双寡头博弈的动态演化[J].系统工程学报,2004,19(3):244-250.
Yi Y Y, Sheng Z H, Xiao T J. The dynamic evolution of bounded rationality and spillover effect of duopoly game [J]. Journal of Systerms Engineering, 2004, 19(3): 244-250.

[10] 姚洪兴,徐峰.双寡头有限理性广告竞争博弈模型的复杂性分析[J].系统工程理论与实践,2005,25(12):32-37.
Yao H X, Xu F. Complex dynamics analysis for a duopoly advertising model with bounded rationality[J]. Systerms Engineering-Theory & Practice,2005,25(12):32-37.

[11] 张骥骧,达庆利,王延华.寡占市场中有限理性博弈模型分析[J].中国管理科学,2006,14(5):109-113.
Zhang J X, Da Q L, Wang Y H. Oligopoly market game with bounded rationality analysis[J]. Chinese Journal of Management Science,2006,14(5):109-113.

[12] 罗琴,丁占文.一个基于有限理性的资源寡头博弈的动态调整模型[J].统计与决策,2009,278(2):14-16.
Luo Q, Ding Z W. Based on a dynamic adjustment model of resource bounded rationality of oligopoly game[J]. Statistics and Decision,2009,278(2):14-16.

[13] 单海燕,王文平.多个企业同时博弈的动态古诺模型的研究[J].统计与决策,2009,296(20):59-61.
Shan H Y, Wang W P. Study on dynamic Cournot model with multiple companies and game[J]. Statistics and Decision,2009,296(20):59-61.

[14] Marco G, Morgan J. Slightly altruistic equilibria[J]. J Optim Theory Appl,2008,137(2):347-362.

[15] 王能发.非合作博弈的轻微利他平衡点的存在性[J].经济数学,2011,28(4):11-14.
Wang N F. The existence of slightly altruistic equilibrium point in noncooperative games[J]. Journal of Quantitative Economics,2011,28(4):11-14.

[16] 杨哲,蒲勇健.利他扰动与 Nash 均衡点集的利他稳定性[J].经济数学,2011,28(4):6-10.
Yang Z, Pu Y J. Altruistic perturbation and altruistic stability of the set of Nash equilibrium points[J]. Journal of Quantitative Economics,2011,28(4):6-10.

Operations Research and Cybernetics

Research on Cournot Game Based on Slightly Altruistic Equilibria

WANG Nengfa

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

Abstract: There is an important hypothesis in the field of Classic economy and game theory, which says that man is totally selfish. This paper builds a Cournot game model on the basis of " slightly altruistic equilibria" raised by Marco and Morgan. The players were found mutually beneficial if they are slightly altruistic equilibria. Otherwise, the selfish one will get more. This study enriches the existing achievement, and has a strong guiding significance in practice.

Key words: slightly altruistic equilibria; cournot game; bounded rationality; reciprocal

(责任编辑　黄　颖)