DOI:10.11721/cqnuj20140415

关于矩阵族的一致相随性探讨*

邓　勇
(喀什师范学院 数学系,新疆 喀什 844006)

摘要:矩阵的对角化问题是高等代数中一个重要而基本的内容,通常文献只讨论一个给定方阵的可对角化条件。但在理论与应用中往往会大量涉及矩阵族的同时三角化问题。因此,研究矩阵族可同时三角化的条件将是一个不可回避的课题。另外有文献虽引入了相似矩阵可同时对角化的概念及判定条件,但实际上矩阵族同时三角化和同时对角化在论证上差异却很大。为此,在已有研究的基础上,引入了矩阵族的一致相随定义,利用特征分析技术研究了矩阵族可同时三角化问题,得到了一致相随存在性的一个定理及其证明,最后例举了一致相随关系的两个应用。

关键词:可交换矩阵族;一致相随;不变子空间;三角化;Schur 分解

中图分类号:O151　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2014)04-0078-04

在矩阵理论中,通过相似变换把矩阵化成比较简单的形式是处理复杂问题时经常采用的一种重要方法。然而矩阵族可同时三角化问题,在理论与应用中却更具有研究价值。文献[1]通过引入循环矩阵自身所具有的特性,研究了相似族矩阵的对角化问题,给出了相似族矩阵可对角化的一个条件。文献[2-3]则主要讨论了两个矩阵可同时三角化的条件。本文在此基础上,采用不同于已有文献的传统方法,从不变子空间这一解构线性算子的工具入手,将文献[3]中两个矩阵可同时三角化问题推广到矩阵族可同时三角化上,得到其存在性的一个定理。为方便叙述,文中讨论的矩阵都是复数域 $\mathbf{C}$ 上的 $n\times n$ 阶矩阵,符号 $\boldsymbol{U}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的共轭转置矩阵,$\boldsymbol{U}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{U}$ 的逆矩阵,$\|\cdot\|$ 表示向量的范数,$M_n(\mathbf{C})$表示复数域 $\mathbf{C}$ 上的 n 阶方阵集合。

1 预备知识

定义 1　矩阵族 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 称为可交换的,如果 $\mathscr{F}$ 中任何两个矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_j$ 均满足 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_i$。

定义 2　称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 关于 $\boldsymbol{U}$ 上(下)相随,如果存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,使得 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$ 均为上(下)三角形矩阵。在不致引起混淆的情况下,也称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是上(下)相随的。把矩阵这种上相随与下相随关系统称为相随[2]。

定义 3　矩阵族 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 称为上(下)一致相随矩阵族,如果存在一个共同的酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,一并使得所有 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{U}(i=1,\cdots,m)$ 为上(下)三角形矩阵。把矩阵族的上一致相随与下一致相随关系统称为一致相随。

定义 4　若子空间 $\mathscr{W}\subseteq\mathbf{C}^n$ 是所有 $\boldsymbol{A}_i\in\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\},i=1,2,\cdots,m$ 的不变子空间,则称 $\mathscr{W}$ 是一个 $\mathscr{F}$-不变子空间[4]。

显然,$\mathscr{F}$-不变子空间必定存在。例如,$\mathbf{C}^n$ 就是 $\mathscr{W}$ 的一个 $\mathscr{F}$-不变子空间。

2 主要结果

引理 1　(不变子空间基本定理)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 阶复矩阵,若 $\chi\subseteq\mathbf{C}^n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个不变子空间且 $\chi\neq\{\mathbf{0}\}$,则 χ 中必有一特征向量 $\boldsymbol{x}$,使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$,其中 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值。

证明　设 $\dim\chi=r,0<r\leqslant n$。若 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{x}\in\chi$,则向量集$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{x}\}$属于 χ 且必定线性相关。事实上,

* **收稿日期:**2014-03-01　　**网络出版时间:**2014-7-3　23:03
资助项目:新疆维吾尔自治区高校科研计划重点项目(No. XJEDU2008I31)
作者简介:邓勇,男,教授,研究方向为线性代数及数值计算,E-mail: dengy-ks@sohu.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140703.2303.015.html

因 r 维子空间 χ 容不下 $r+1$ 个线性无关的向量,故存在不全为零的数 $c_0,c_1,\cdots,c_r$ 使得 $c_0\boldsymbol{x}+c_1\boldsymbol{Ax}+\cdots+c_r\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。令 s 是满足 $c_s\neq0$ 的最大指标,显然 $0<s\leqslant r$。以 c_i 为系数生成一个 r 次多项式,并分解因式为 $c_0+c_1t+\cdots+c_rt^r=c_s(t-\mu_1)\cdots(t-\mu_s)$,其中每个 $\mu_j\in\mathbf{C}$。同样,矩阵多项式也有相同形式的分解式[5],即

$$\boldsymbol{0}=(c_0\boldsymbol{I}+c_1\boldsymbol{A}+\cdots+c_r\boldsymbol{A}^r)\boldsymbol{x}=c_s(\boldsymbol{A}-\mu_1\boldsymbol{I})\cdots(\boldsymbol{A}-\mu_s\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}$$

因此,等号右边的矩阵乘法算式中至少有一个 μ_j 和某个向量 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ 使 $(\boldsymbol{A}-\mu_j\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$。换句话说,$\boldsymbol{A}$ 必定有一特征向量 $\boldsymbol{v}\in\chi$ 对应特征值 μ_j。　　证毕

引理 2　可交换矩阵族 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 至少存在一个 $\mathscr{F}$-不变子空间。

证明　设 λ 是 $\boldsymbol{A}_i$ 的一个特征值。显然,$\boldsymbol{A}_i$ 的特征空间 $N(\boldsymbol{A}_i-\lambda\boldsymbol{I})=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}$ 是 $\boldsymbol{A}_i$ 的一个不变子空间[4]。对于 $i\neq j$ 和 $\forall\,\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{A}_i-\lambda\boldsymbol{I})$,由

$$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j)\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}_j(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x})$$

可知 $\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{A}_i-\lambda\boldsymbol{I})$,即 $N(\boldsymbol{A}_i-\lambda\boldsymbol{I})$ 也是 $\boldsymbol{A}_j$ 的不变子空间。从而 $N(\boldsymbol{A}_i-\lambda\boldsymbol{I})$ 就是可交换矩阵族 $\mathscr{F}$ 的一个 $\mathscr{F}$-不变子空间。

根据引理 1,$\boldsymbol{A}_j$ 中必有一特征向量 $\boldsymbol{x}$,使得 $\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}$。说明可交换矩阵族 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 中任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_j$ 必有一共同的特征向量。　　证毕

定理 1　(最小 $\mathscr{F}$-不变子空间定理)设 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 是可交换矩阵族。若 $\mathscr{W}\neq\{\boldsymbol{0}\}$ 是它的一个最小维度的 $\mathscr{F}$-不变子空间(未必唯一存在),则对 $\forall\,\boldsymbol{A}_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots,m$,$\mathscr{W}$ 中所有非零向量都是 $\boldsymbol{A}_i$ 的特征向量。

证明　因为 $\mathscr{W}\neq\{\boldsymbol{0}\}$ 是一个 $\mathscr{F}$-不变子空间,所以 $\mathscr{W}$ 中必有一特征向量 $\boldsymbol{y}$,使得 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}=\lambda_i\boldsymbol{y}$。令 $\mathscr{W}_0=\{\boldsymbol{y}\in\mathscr{W}\mid A_i\boldsymbol{y}=\lambda_i\boldsymbol{y}\}$,也就是说,$\mathscr{W}_0=\mathscr{W}\cap N(\boldsymbol{A}_i-\lambda_i\boldsymbol{I})$,说明 $\mathscr{W}_0$ 仍是 $\boldsymbol{A}_i$ 的一个子空间[4]。

若 $\mathscr{W}$ 中有一个非零向量不是 $\boldsymbol{A}_i,i=1,2,\cdots,m$ 共同的特征向量,则 $\mathscr{W}_0\neq\mathscr{W}$,于是 $\dim\mathscr{W}_0\leqslant\dim\mathscr{W}$。设 $\boldsymbol{y}\in\mathscr{W}_0$ 不是 $\boldsymbol{A}_i,i=1,2,\cdots,m$ 共同的特征向量。因为 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_j\in\mathscr{F}$ 是可交换矩阵,所以

$$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j)\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{A}_\mathrm{i}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}_j(\lambda_i\boldsymbol{y})=\lambda_i(\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{y})$$

即 $\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{y}\in\mathscr{W}_0$。换句话说,$\mathscr{W}_0$ 是一个 $\mathscr{F}$-不变子空间。然而 $\mathscr{W}_0$ 比 $\mathscr{W}$ 的维度小,这与假设相矛盾。　　证毕

定理 1 说明,可交换矩阵族 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 必定存在一个最小维度的 $\mathscr{F}$-不变子空间。因此,$\mathscr{F}$ 的每个成员 $\boldsymbol{A}_i,i=1,2,\cdots,m$ 至少拥有一个共同的特征向量(未必对应相同的特征值)。

定理 2　可交换矩阵族 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 必定是一致上(下)相随矩阵族。即存在一个共同的酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,对 $\forall\,\boldsymbol{A}_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots,m$,都有 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{U}$ 为上(下)三角形矩阵。

证明　仅给出一致上相随的证明,至于一致下相随的情况类似可证。

设 $\boldsymbol{x}_1$ 是所有 $\boldsymbol{A}_i\in\mathscr{F}$ 的共同单位特征向量,即 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_1=\lambda_i\boldsymbol{x}_1,i=1,\cdots,m$ 且 $\|\boldsymbol{x}_1\|=1$。将 $\boldsymbol{x}_1$ 扩充为一个酉矩阵 $\boldsymbol{U}_1$,可得 $\boldsymbol{U}_1=[\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{y}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{y}_{n-1}]=[\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{Y}]$,其中 $\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{y}_{n-1}]$,$\boldsymbol{y}_j^*\boldsymbol{x}_1=0,j=1,\cdots,n-1$。通过计算,可得

$$\boldsymbol{U}_1^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{U}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^*\\\boldsymbol{Y}^*\end{bmatrix}\boldsymbol{A}_i[\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{Y}]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^*\\\boldsymbol{Y}^*\end{bmatrix}[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{A}_iY]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^*\\\boldsymbol{Y}^*\end{bmatrix}[\lambda_i\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}]=\begin{bmatrix}\lambda_i&\boldsymbol{x}_1^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i&\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}_i\end{bmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}_1^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}$。

因为 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_j$ 是可交换矩阵,所以 $\boldsymbol{U}_1^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_1^*\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{U}_1$ 也是可交换矩阵,从而 $\boldsymbol{B}_i$ 和 $\boldsymbol{B}_j$ 也是可交换矩阵,因此,矩阵族 $\{\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_m\}$ 构成一个 $(n-1)\times(n-1)$ 阶可交换矩阵族。

同样地,设 $\boldsymbol{x}_2$ 是所有 $\boldsymbol{B}_i\in\{\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_m\}$ 的共同单位特征向量,即 $\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{x}_2=\mu_i\boldsymbol{x}_2,i=1,\cdots,m$ 且 $\|\boldsymbol{x}_2\|=1$。运用上述相同的方式可产生一个 $(n-1)\times(n-1)$ 阶酉矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$($\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$ 的第一列为 $\boldsymbol{x}_2$),使得 $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2^*\boldsymbol{B}_i\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$ 成为一个上三角形矩阵。为简化符号,将上三角形矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2^*\boldsymbol{B}_i\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$ 中不影响后续程序的分块以 $*$ 表示为 $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2^*\boldsymbol{B}_i\widetilde{\boldsymbol{U}}_2=\begin{bmatrix}\mu_i&*\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}_i\end{bmatrix}$,其中 $\{\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_m\}$ 是新产生的 $(n-2)\times(n-2)$ 阶可交换矩阵族。为结合 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{U}_1$ 和 $(n-1)\times(n-1)$ 阶矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$,可令 $\boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix}1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\widetilde{\boldsymbol{U}}_2\end{bmatrix}$。

前面两步的计算程序可表示成 $\boldsymbol{U}_2^*\boldsymbol{U}_1^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \widetilde{U}_2^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_i & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \widetilde{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i & * & *\\ \boldsymbol{0} & \mu_i & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_i\end{bmatrix}$。由于可交换矩阵族中矩阵的阶数逐次递减,故重复上述过程,经有限步运算之后即可归纳得到酉矩阵 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_{n-1}\cdots\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_1$,使得 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{U}(\boldsymbol{A}_i\in\mathscr{F})$ 均为上三角形矩阵。 证毕

3 应用举例

例1 若 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 为正规一致相随矩阵族,则 $\mathscr{F}=\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_m\}$ 必为可同时对角化矩阵族。

证明 任给 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j\in\mathscr{F}$,因 $\mathscr{F}$ 是一致相随矩阵族,即 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{A}_j$ 可同时三角化,故存在一个酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,使得 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{U}$ 同为上三角矩阵。而 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{A}_j$ 又同为正规矩阵,从而 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{U}$ 也为正规矩阵[6],分别记为 $\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{B}_j$。显然,$\boldsymbol{B}_i^*$ 与 $\boldsymbol{B}_j^*$ 均为下三角矩阵。下面用归纳法证明 $\boldsymbol{B}_i$ 为对角矩阵。

当 $n=1$ 时结论显然成立;

假设结论对小于 n 的情形成立,下面考虑 n 的情形。为此,令 $\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & a\end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{C}_i$ 是上三角矩阵,则 $\boldsymbol{B}_i^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_i^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\alpha}^* & a\end{bmatrix}$,由 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_i^*=\boldsymbol{A}_i^*\boldsymbol{A}_i$,可得 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_i^*+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{C}_i^*\boldsymbol{C}_i$,$a^2=a^2+\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha}$,故 $\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha}=0$,即 $\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量,于是得 $\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_i^*=\boldsymbol{C}_i^*\boldsymbol{C}_i$,从而 $\boldsymbol{C}_i$ 也是 $n-1$ 阶正规上三角矩阵。由归纳假设知,$\boldsymbol{C}_i$ 是对角矩阵,于是 $\boldsymbol{B}_i$ 为对角矩阵,进而 $\boldsymbol{A}_i$ 可对角化。类似可证 $\boldsymbol{B}_j$ 也是对角矩阵,进而 $\boldsymbol{A}_j$ 也可对角化。 证毕

例2 设 M 是 $M_n(\mathbf{C})$ 的子空间且 M 中任何矩阵两两可交换,证明 M 的最大维度是 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$。

证明 对 n 用数学归纳法。

当 $n=1$ 时,结论显然成立;

假设结论对小于 n 的情况成立,考虑 n 的情形:由于 M 中的矩阵两两可交换,所以 M 是一致相随矩阵族,即其中所有矩阵可同时上三角化。为方便起见,不妨设 M 中每个矩阵都是上三角的。对每个 $\mathbf{A}\in M$,截取 $\mathbf{A}$ 左上角的 $n-1$ 阶子矩阵,并把这个矩阵记作 $f(\mathbf{A})$;再截取 $\mathbf{A}$ 右下角的 $n-1$ 阶子矩阵,记作 $g(\mathbf{A})$。因此,所有的 $f(\mathbf{A})$ 两两可交换,所有的 $g(\mathbf{A})$ 两两可交换[6]。因 f 和 g 都可看作是 M 到交换子空间 $M_{n-1}(\mathbf{C})$ 的线性映射,故由归纳假设可得 $\dim f(M)\leqslant\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]$,$\dim g(M)\leqslant\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]$。不难看出 $ker(f)$ 中的元素形如 $(\boldsymbol{0}_{n\times(n-1)},\boldsymbol{\alpha})$,$ker(g)$ 中的元素形如 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}_{(n-1)\times n}\end{bmatrix}$,这里的 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维向量。若它俩可交换,则有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$,即 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$,于是 $ker(f)\perp ker(g)$。又 $\dim(ker(f))+\dim(ker(g))\leqslant n$,由秩—零度定理可得

$$\dim M=\dim(ker(f)+\dim f(M))=\dim(ker(g)+\dim g(M))\leqslant$$
$$\frac{[\dim(ker(f))+\dim(ker(g))]}{2}+\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+1\leqslant\frac{n}{2}+\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]+1\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$$

最后,根据归纳法原理可知,M 的最大维度是 $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$。 证毕

本文仅对矩阵族的一致相随性条件进行了论证。实际上,求使矩阵族可同时三角化的酉矩阵同样值得研究,可在以后继续进行深入讨论。

参考文献:

[1] 李宏年.相似族矩阵可对角化的一个充要条件[J].青海大学学报:自然科学版,2011,29(2):73-74.

Li H N. A necessary and sufficient condition on diagonalization for similar family matrix[J]. Journal of Qinghai University:Natural Science,2011,29(2):73-74.

[2] 宛凌宇.矩阵的相随关系及其性质[J].杭州师范大学学报:

自然科学版,2011,10(6):543-545.
Wan L Y. Accompanied relation and properties of matrix [J]. Journal of Hangzhou Normal University: Natural Sciences,2011,10(6):543-545.
[3] 张宝环,宛凌宇. 矩阵间一类新型关系初探[J]. 廊坊师范学院学报:自然科学版,2011,11(6):5-8.
Zhang B H,Wan L Y. Research on a new relation between matrixes[J]. Journal of Lang Fang Teachers: Natural Science,2011,11(6):5-8.
[4] Sheldon Axler,Linear Algebra Done Right [M]. Springer-Verlag,Germany Press,1997.
[5] 王鄂芳,石生明. 高等代数[M]. 第三版. 北京:高等教育出版社,2003.
Wang E F,Shi S M. Advanced algebra[M]. 3rd edition. Beijing: Higher Education Press,2003.
[6] 陈惠汝,余巧生. 矩阵同时相似于对角矩阵问题的研究[J]. 重庆三峡学院学报,2009,25(3):125-128.
Chen H R,Yu Q S. The research for simultaneous diagonal matrix of matrices[J]. Journal of Chongqing Three Gorges University,2009,25(3):125-128.
[7] 张贤科,许甫华. 高等代数学[M]. 北京:清华大学出版社,1998.
Zhang X K,Xu P H. Advanced algebra[M]. Beijing: Tsinghua University Press,1998.

The Discussion of Consistent Accompany on Family of Matrices

DENG Yong
(Department of Mathematics, Kashi Normal University, Kashi Xinjiang 844006, China)

Abstract: The diagonalization of matrix is an important and basic content in advanced algebra, but the diagonalizable conditions of given a square matrix have only discussed in common advanced algebra textbooks and literatures. However, a set of matrices were often heavily involved in theories and applications. Therefore, people look for conditions that a set of matrices triangularization simultaneously will be an unavoidable topic. Although the concepts and judged conditions of triangularization simultaneously on a set of matrices were introduced in [1], but see from the surface, triangularization and diagonalization simultaneously on a set of matrices seem to be similar themes of commutative matrix family. However, there are larger differences about their argumentations in fact. Clearly, we discuss the conditions of simultaneously triangularization on a set of matrices must be another way. To this end, The definition was introduced about consistent accompany of matrix family based on literatures [2-3], use it to study the problems of the matrix family similar triangulation simultaneously, obtained an existence theorem and its proof, and then given two of applications on consistent accompany.

Key words: commutative family of matrices; consistent accompany; invariant subspace; triangulation; Schur decomposition

(责任编辑 黄 颖)