DOI:10.11721/cqnuj20140416

布尔代数的 I-V 模糊子代数*

许宏伟, 刘卫锋
(郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015)

摘要:研究了布尔代数的 I-V (Interval valued) 模糊子代数及其相关性质,推广了相关文献中布尔代数的模糊子代数的结果。首先,通过将 I-V 模糊集应用于布尔代数,定义了布尔代数的 I-V 模糊子代数的概念,得到了布尔代数的 I-V 模糊子代数的两个简化判定定理;然后,讨论了布尔代数的 I-V 模糊子代数与(模糊)子代数之间的关系,证明了布尔代数上的 I-V 模糊集是 I-V 模糊子代数的充要条件是 I-V 模糊集的截集是布尔代数的子代数,布尔代数上的 I-V 模糊集是 I-V 模糊子代数的充要条件是 I-V 模糊集的上下隶属函数均为布尔代数的模糊子代数;其次,讨论了布尔代数的 I-V 模糊子代数的交、同态等性质,证明了布尔代数的 I-V 模糊子代数的交、同态像和同态逆像等也是布尔代数的 I-V 模糊子代数;最后,讨论了布尔代数直积上的 I-V 模糊子代数。

关键词:布尔代数;模糊子代数;I-V 模糊子代数;子代数
中图分类号:O174 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)04-0082-05

目前,布尔代数的相关模糊理论研究取得了一系列的研究成果。其中,文献[1]引入了布尔代数的模糊子代数,模糊理想和模糊商布尔代数等概念,并讨论了相关性质;文献[2]讨论了布尔代数上的模糊同余关系与布尔代数的模糊理想之间的关系,给出了商布尔代数的同构定理;文献[3]讨论了布尔代数的模糊子代数的直积以及模糊商布尔代数的直积特征;文献[4]研究了布尔代数的$(\in,\in,\vee q)$-模糊子代数、$(\in,\in,\vee q)$-模糊理想和$(\in,\in,\vee q)$-模糊商布尔代数;文献[5]讨论了布尔代数的直觉模糊子代数、直觉模糊理想和直觉模糊商布尔代数;文献[6-7]引入了布尔代数的直觉 $T-S$ 模糊子代数、直觉 $T-S$ 模糊理想、直觉 $T-S$ 模糊子代数直积等概念,并讨论它们的相关性质;文献[8]在布尔代数中引入了(λ,μ)模糊子代数的概念,讨论了其相关性质;文献[9]研究了布尔代数的$(\in,\in,\vee q_{(\lambda,\mu)})$-模糊理想及广义模糊理想;文献[10]定义了 R-模糊布尔代数,讨论了其性质以及与模糊布尔代数的关系。

在上述研究基础上,本文将 I-V 模糊集的思想应用于布尔代数,提出了布尔代数的 I-V 模糊子代数的概念,并对其相关性质进行了研究,得到了布尔代数的 I-V 模糊子代数的两个简化判断定理,讨论了布尔代数的 I-V 模糊子代数与(模糊)子代数之间的关系,证明了布尔代数的 I-V 模糊子代数的交、同态像和同态逆像等也是布尔代数的 I-V 模糊子代数。本文研究进一步丰富和完善了布尔代数上的模糊理论。

1 相关概念

定义 1[11] 具有两个二元代数运算$+$,$\cdot$的代数系统$\langle R,+,\cdot,0,1\rangle$称为布尔代数,若 R 中至少含有两个不同元,且下面公理成立:1)交换律:$\forall a,b\in R$,$a+b=b+a$,$ab=ba$,(其中 ab 为 $a\cdot b$);2)结合律:$\forall a,b,c\in R$,$(a+b)+c=a+(b+c)$,$(ab)c=a(bc)$;3)分配律:$\forall a,b,c\in R$,$a(b+c)=ab+ac$,$a+bc=(a+b)(a+c)$;4)0-1律:$\exists 0,1\in R$,$\forall a\in R$,$a+0=a$,$a1=a$;5)互补律:$\forall a\in R$,$\exists \bar{a}\in R$,$a+\bar{a}=1$,$a\bar{a}=0$。

定义 2[11] 设$\langle R,+,\cdot,0,1\rangle$为布尔代数,$\forall a,b\in R$,如果 $a+b=b$,则称 a 不大于 b,记为 $a\leqslant b$。

布尔代数$\langle R,+,\cdot,0,1\rangle$有时记为$\langle R,+,\cdot,^{-},0,1\rangle$。为表示方便,以后用 R,R' 分别表示布尔代数$\langle R,+,\cdot,^{-},0,1\rangle$,$\langle R',+,\cdot,0',1'\rangle$。

定理 1[11] 设$\langle R,+,\cdot,^{-},0,1\rangle$为布尔代数,$\forall a,b\in R$,有:1) $a0=0$,$a+1=1$,$aa=a$,$a+a=a$;2) $\overline{ab}=\bar{a}+$

* **收稿日期**:2013-03-11 **修回日期**:2013-03-24 **网络出版时间**:2014-7-3 23:03
资助项目:航空科学基金(No. 2013ZD55006);河南省教育厅科学技术研究重点项目(No. 14A630017)
作者简介:许宏伟,男,副教授,研究方向为应用数学,E-mail:xhwzzia@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140703.2303.016.html

$\overline{b}$，$\overline{a+b}=\overline{a}\,\overline{b}$，$\overline{\overline{a}}=a$，$\overline{1}=0$，$\overline{0}=1$。

定义 3[12]　称 $\overline{a}=[a^-,a^+]\subseteq[0,1]$ 为区间数。令 $D[0,1]=\{[a^-,a^+]\mid 0\leqslant a^-\leqslant a^+\leqslant 1\}$ 表示所有 $[0,1]$ 内的区间数组成的集合。

设 $a\in[0,1]$，令 $a=[a,a]$，则 $a\in D[0,1]$。

定义 4[12]　设 $\overline{a}_i\in D[0,1]$，其中 $\overline{a}_i=[a_i^-,a_i^+]$，$i\in I$，$I$ 是指标集。定义 $\bigwedge\limits_{i\in I}\overline{a}_i=[\bigwedge\limits_{i\in I}a_i^-,\bigwedge\limits_{i\in I}a_i^+]$，$\bigvee\limits_{i\in I}\overline{a}_i=[\bigvee\limits_{i\in I}a_i^-,\bigvee\limits_{i\in I}a_i^+]$；设 $\overline{a},\overline{b}\in D[0,1]$，其中 $\overline{a}=[a^-,a^+]$，$\overline{b}=[b^-,b^+]$，定义 $\overline{a}\leqslant\overline{b}\Leftrightarrow a^-\leqslant b^-$，$a^+\leqslant b^+$，$\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow a^-=b^-$，$a^+=b^+$。

定义 5[12]　论域 X 上的一个 I-V 模糊集为 $\overline{A}:X\to D[0,1]$，即指集合 $\overline{A}=\{(x,\overline{A}(x)=[A^-(x),A^+(x)]\mid x\in X)\}$，其中 $A^+(x)$，$A^-(x)$ 是 X 上的两个模糊集，分别称为 I-V 模糊集 $\overline{A}$ 的上下隶属函数，且 $A^-(x)\leqslant A^+(x)$，$\forall x\in X$。论域 X 上的全体 I-V 模糊集记为 $F_I(X)$。

定义 6[12]　设 $\overline{A},\overline{B}\in F_I(X)$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$ 分别定义为 $(\overline{A}\cap\overline{B})(x)=\overline{A}(x)\wedge\overline{B}(x)$，$(\overline{A}\cup\overline{B})(x)=\overline{A}(x)\vee\overline{B}(x)$，$\forall x\in X$。

定义 7　设 $\overline{A}$ 是 X 上的 I-V 模糊集，$[s,t]\in D[0,1]$，称 $\overline{A}_{[s,t]}=\{x\in X\mid\overline{A}(x)\geqslant[s,t]\}$ 为 $\overline{A}$ 的上截集。

定义 8[1]　设 $A:R\to[0,1]$ 为布尔代数 R 的模糊集，若 $\forall a,b\in R$，下面条件成立：1) $A(a+b)\geqslant A(a)\wedge A(b)$；2) $A(ab)\geqslant A(a)\wedge A(b)$；3) $A(\overline{a})\geqslant A(a)$。则称 A 是 R 的模糊子代数。

2 主要结论

定义 9　设 $\overline{A}:R\to D[0,1]$ 为布尔代数 R 的 I-V 模糊集，若 $\forall a,b\in R$，下面条件成立：1) $\overline{A}(a+b)\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)$；2) $\overline{A}(ab)\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)$；3) $\overline{A}(\overline{a})\geqslant\overline{A}(a)$。则称 $\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。

当 $\forall a\in R$，$A^-(a)=A^+(a)$ 时，布尔代数 R 的 I-V 模糊子代数就退化为文献[1]中的布尔代数的模糊子代数，因此布尔代数的 I-V 模糊子代数是布尔代数的模糊子代数的一个推广。

定理 2　设 $\overline{A}:R\to D[0,1]$ 为布尔代数 R 的 I-V 模糊集，则 $\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数的充要条件为定义 9 中的条件 1) 和 3) 成立。

证明　必要性，显然。

充分性。只需证明定义 9 中条件 2) 成立即可。由于 $\forall a,b\in R$，有

$$\overline{A}(ab)=\overline{A}(\overline{\overline{a}+\overline{b}})\geqslant\overline{A}(\overline{a}+\overline{b})\geqslant\overline{A}(\overline{a})\wedge\overline{A}(\overline{b})\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)$$

即定义 9 中条件 2) 成立。　　证毕

定理 3　设 $\overline{A}:R\to D[0,1]$ 为布尔代数 R 的 I-V 模糊集，则 $\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数的充要条件为定义 9 中的条件 2) 和 3) 成立。

证明　必要性，显然。

充分性。只需证明定义 9 中条件 1) 成立即可。由于 $\forall a,b\in R$，有

$$\overline{A}(a+b)=\overline{A}(\overline{\overline{a}\,\overline{b}})\geqslant\overline{A}(\overline{a}\,\overline{b})\geqslant\overline{A}(\overline{a})\wedge\overline{A}(\overline{b})\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)$$

即定义 9 中条件 1) 成立。　　证毕

定理 4　设 $\overline{A}:R\to D[0,1]$ 为 R 的 I-V 模糊子代数，则：1) $\overline{A}(0)=\overline{A}(1)$；2) $\overline{A}(0)\geqslant\overline{A}(a)$，$\forall a\in R$。

证明　1) 由于 $\overline{A}(0)=\overline{A}(\overline{1})\geqslant\overline{A}(1)$，又 $\overline{A}(1)=\overline{A}(\overline{0})\geqslant\overline{A}(0)$，所以 $\overline{A}(0)=\overline{A}(1)$。

2) $\forall a\in R$，$\overline{A}(0)=\overline{A}(a\,\overline{a})\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(\overline{a})\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(a)=\overline{A}(a)$。　　证毕

定理 5　设 $\overline{A}:R\to D[0,1]$ 为 R 的 I-V 模糊集，则 $\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数的充要条件是，$\forall[s,t]\in D[0,1]$，当 $A_{[s,t]}=\{a\in R\mid\overline{A}(a)\geqslant[s,t]\}\neq\varnothing$ 时，$A_{[s,t]}$ 是 R 的子代数。

证明　必要性。已知 $\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。

对 $\forall[s,t]\in D[0,1]$，若 $A_{[s,t]}\neq\varnothing$，则 $\forall a,b\in A_{[s,t]}$，有 $\overline{A}(a)\geqslant[s,t]$，$\overline{A}(b)\geqslant[s,t]$，于是有 $\overline{A}(a+b)\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)\geqslant[s,t]$，所以 $a+b\in A_{[s,t]}$；又因为 $\forall a\in A_{[s,t]}$，有 $\overline{A}(\overline{a})\geqslant\overline{A}(a)\geqslant[s,t]$，所以 $\overline{a}\in A_{[s,t]}$。因此，$A_{[s,t]}\neq\varnothing$ 是 R 的子代数。

充分性。已知当 $A_{[s,t]}\neq\varnothing$ 时，$A_{[s,t]}$ 是 R 的子代数。

$\forall a,b\in R$,令 $\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)=[s,t]$,则 $\overline{A}(a)\geqslant[s,t]$,$\overline{A}(b)\geqslant[s,t]$,于是 $a,b\in A_{[s,t]}$,又 $A_{[s,t]}$ 是 R 的子代数,所以 $a+b\in A_{[s,t]}$,即有 $\overline{A}(a+b)\geqslant[s,t]=\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)$;类似地,可以证明 $\overline{A}(\overline{a})\geqslant\overline{A}(a)$。因此,$\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。 证毕

定理 6 设 $\overline{A}$,$\overline{B}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数,则 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。

证明 $\forall a,b\in R$,则

$$(\overline{A}\cap\overline{B})(a+b)=\overline{A}(a+b)\wedge\overline{B}(a+b)\geqslant(\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b))\wedge(\overline{B}(a)\wedge\overline{B}(b))=(\overline{A}(a)\wedge\overline{B}(a))\wedge(\overline{A}(b)\wedge\overline{B}(b))=(\overline{A}\cap\overline{B})(a)\wedge(\overline{A}\cap\overline{B})(b)$$

$$(\overline{A}\cap\overline{B})(\overline{a})=\overline{A}(\overline{a})\wedge\overline{B}(\overline{a})\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{B}(a)=(\overline{A}\cap\overline{B})(a)$$

所以,$\overline{A}\cap\overline{B}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。 证毕

例 1 设 $\overline{A}$,$\overline{B}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数,则 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 未必是 R 的 I-V 模糊子代数。

集代数 $R=\langle 2^{\{a,b,c\}},\cup,\cap,^{-},\varnothing,\{a,b,c\}\rangle$ 为布尔代数,定义 R 上两个 I-V 模糊集 $\overline{A}$,$\overline{B}$ 如下

$$\overline{A}(\varnothing)=\overline{A}(\{a,b,c\})=\overline{A}(\{a\})=\overline{A}(\{b,c\})=[0.6,0.9],\overline{A}(\{b\})=\overline{A}(\{a,c\})=\overline{A}(\{c\})=\overline{A}(\{a,b\})=[0.5,0.8]$$

$$\overline{B}(\varnothing)=\overline{B}(\{a,b,c\})=\overline{B}(\{b\})=\overline{B}(\{a,c\})=[0.6,0.9],\overline{B}(\{a\})=\overline{B}(\{b,c\})=\overline{B}(\{c\})=\overline{B}(\{a,b\})=[0.4,0.7]$$

可以验证 $\overline{A}$,$\overline{B}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。

由于 $(\overline{A}\cup\overline{B})(\{a\}\cup\{b\})=[0.5,0.8]\leqslant[0.6,0.9]=(\overline{A}\cup\overline{B})(\{a\})\wedge(\overline{A}\cup\overline{B})(\{b\})$,所以 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 不是 R 的 I-V 模糊子代数。

定理 7 设 $\overline{A}_i$,$i\in I$(I 是指标集)是 R 的 I-V 模糊子代数,则 $\bigcap\limits_{i\in I}\overline{A}_i$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。

定理 8 设 $\overline{A}(x)=[A^{-}(x),A^{+}(x)]$ 是 R 的 I-V 模糊集,则 $\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数的充要条件是,$A^{-}(x)$,$A^{+}(x)$ 是 R 的模糊子代数。

证明 必要性。$\forall a,b\in R$,则

$$[A^{-}(a+b),A^{+}(a+b)]=\overline{A}(a+b)\geqslant\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)=[A^{-}(a),A^{+}(a)]\wedge[A^{-}(b),A^{+}(b)]=[A^{-}(a)\wedge A^{-}(b),A^{+}(a)\wedge A^{+}(b)]$$

于是,$A^{-}(a+b)\geqslant A^{-}(a)\wedge A^{-}(b)$,$A^{+}(a+b)\geqslant A^{+}(a)\wedge A^{+}(b)$。又 $[A^{-}(\overline{a}),A^{+}(\overline{a})]=\overline{A}(\overline{a})\geqslant\overline{A}(a)=[A^{-}(a),A^{+}(a)]$。于是,$A^{-}(\overline{a})\geqslant A^{-}(a)$,$A^{+}(\overline{a})\geqslant A^{+}(a)$。所以,$A^{-}(x)$,$A^{+}(x)$ 是 R 的模糊子代数。

充分性。$\forall a,b\in R$,则

$$\overline{A}(a+b)=[A^{-}(a+b),A^{+}(a+b)]\geqslant[A^{-}(a)\wedge A^{-}(b),A^{+}(a)\wedge A^{+}(b)]=\overline{A}(a)\wedge\overline{A}(b)$$

$$\overline{A}(\overline{a})=[A^{-}(\overline{a}),A^{+}(\overline{a})]\geqslant[A^{-}(a),A^{+}(a)]=\overline{A}(a)$$

所以,$\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。 证毕

定理 9 布尔代数 R 的每一个子代数均可表示为 R 的一个 I-V 模糊子代数的上截集。

证明 设 S 是 R 的一个子代数,$\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊集,其中 $\overline{A}(x)=\begin{cases}a,x\in S\\0,\text{否则}\end{cases}$,$a(\neq 0)\in D[0,1]$。显然,$\overline{A}_{[a,a]}=\{x\in X\mid\overline{A}(x)\geqslant[a,a]\}=S$。

事实上,$\forall x\in S$,则 $\overline{A}(x)=[a,a]$,于是 $x\in\overline{A}_{[a,a]}$,所以 $S\subseteq\overline{A}_{[a,a]}$。另一方面,$\forall x\in\overline{A}_{[a,a]}$,则 $\overline{A}(x)\geqslant[a,a]$,于是 $\overline{A}(x)=[a,a]$,即 $x\in S$,所以 $\overline{A}_{[a,a]}\subseteq S$,从而 $\overline{A}_{[a,a]}=S$。

下面证明 $\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。首先 $\forall x,y\in R$,则:1) 若 $x,y\in S$,则 $xy\in S$,即有 $\overline{A}(xy)=a=a\wedge a=\overline{A}(x)\wedge\overline{A}(y)$;2) 若 $x,y\notin S$,则 $\overline{A}(x)=\overline{A}(y)=0$,即有 $\overline{A}(xy)\geqslant 0=0\wedge 0=\overline{A}(x)\wedge\overline{A}(y)$;3) 若 $x\in S,y\notin S$,则 $\overline{A}(x)=a$,$\overline{A}(y)=0$,即有 $\overline{A}(xy)\geqslant 0=0\wedge a=\overline{A}(x)\wedge\overline{A}(y)$;4) 若 $x\notin S,y\in S$,证明同 3)。

其次 $\forall x\in R$,则:1) 若 $x\in S$,则 $\overline{x}\in S$,即有 $\overline{A}(\overline{x})=a=\overline{A}(x)$;2) 若 $x\notin S$,则 $\overline{x}\notin S$,即有 $\overline{A}(\overline{x})=0=\overline{A}(x)$。于是,$\overline{A}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。 证毕

定理 10 设 S 是布尔代数 R 的子集,令 $\overline{\chi}_S:R\to D[0,1]$ 为 R 的 I-V 模糊集,其中 $\overline{\chi}_S(x)=\begin{cases}1,x\in S\\0,\text{否则}\end{cases}$,则 $\overline{\chi}_S$ 为 R 的 I-V 模糊子代数的充要条件为 S 是 R 的子代数。

证明 充分性。由定理 9 可知 $\overline{\chi}_S$ 为 R 的 I-V 模糊子代数。

必要性。设 $\overline{\chi}_S$ 为 R 的 I-V 模糊子代数。令 $x,y\in S$,则 $\overline{\chi}_S(x)=1=\overline{\chi}_S(y)$,于是 $\overline{\chi}_S(xy)\geqslant\overline{\chi}_S(x)\wedge\overline{\chi}_S(y)=1\wedge 1=1$,即 $xy\in S$。令 $x\in S$,则 $\overline{\chi}_S(x)=1$,于是 $\overline{\chi}_S(\overline{x})\geqslant\overline{\chi}_S(x)=1$,即 $\overline{x}\in S$。所以 S 是 R 的子代数。 证毕

定理 11 设 $\overline{A}$ 是布尔代数 R 的 I-V 模糊子集,则 $R_{\overline{A}}=\{x\in R\mid\overline{A}(x)=\overline{A}(0)\}$ 是 R 的子代数。

证明　$\forall x,y\in R_{\overline{A}}$，则 $\overline{A}(x)=\overline{A}(0)=\overline{A}(y)$，于是 $\overline{A}(xy)\geqslant\overline{A}(x)\wedge\overline{A}(y)=\overline{A}(0)\wedge\overline{A}(0)=\overline{A}(0)$，又 $\overline{A}(0)\geqslant\overline{A}(xy)$，所以 $\overline{A}(xy)=\overline{A}(0)$，即 $xy\in S$。

$\forall x\in R_{\overline{A}}$，则 $\overline{A}(\bar{x})\geqslant\overline{A}(x)=\overline{A}(0)$，又 $\overline{A}(0)\geqslant\overline{A}(\bar{x})$，于是 $\overline{A}(\bar{x})=\overline{A}(0)$，即 $\bar{x}\in R_{\overline{A}}$。所以，$R_{\overline{A}}$ 是 R 的子代数。　　证毕

定理 12　设 f 是布尔代数 R 到 R' 的同态满射，若 $\bar{\nu}$ 是 R' 的 I-V 模糊集，则 $\bar{\nu}$ 是 R' 的 I-V 模糊子代数的充要条件为 $f^{-1}(\bar{\nu})$ 是 R 的 I-V 模糊子代数，其中 $f^{-1}(\bar{\nu})(a)=\bar{\nu}(f(a))$，$\forall a\in R$。

证明　必要性。已知 $\bar{\nu}$ 是 R' 的 I-V 模糊子代数。于是 $\forall a,b\in R$，则

$$f^{-1}(\bar{\nu})(a+b)=\bar{\nu}(f(a+b))=\bar{\nu}(f(a)+f(b))\geqslant\bar{\nu}(f(a))\wedge\bar{\nu}(f(b))=f^{-1}(\bar{\nu})(a)\wedge f^{-1}(\bar{\nu})(b)$$

$$f^{-1}(\bar{\nu})(\bar{a})=\bar{\nu}(f(\bar{a}))=\bar{\nu}(\overline{f(a)})\geqslant\bar{\nu}(f(a))=f^{-1}(\bar{\nu})(a)$$

所以，$f^{-1}(\bar{\nu})$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。

充分性。已知 $f^{-1}(\bar{\nu})$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。$\forall a',b'\in R'$，由于 f 是 R 到 R' 的满射，因此存在 $a,b\in R$，使得 $f(a)=a'$，$f(b)=b'$，从而有 $\overline{a'}=\overline{f(a)}=f(\bar{a})$，于是　$\bar{\nu}(a'b')=\bar{\nu}(f(a)f(b))=\bar{\nu}(f(ab))=$

$$f^{-1}(\bar{\nu})(ab)\geqslant f^{-1}(\bar{\nu})(a)\wedge f^{-1}(\bar{\nu})(b)=\bar{\nu}(f(a))\wedge\bar{\nu}(f(b))=\bar{\nu}(a')\wedge\bar{\nu}(b')$$

$$\bar{\nu}(\overline{a'})=\bar{\nu}(f(\bar{a}))=f^{-1}(\bar{\nu})(\bar{a})\geqslant f^{-1}(\bar{\nu})(a)=\bar{\nu}(f(a))=\bar{\nu}(a')$$

所以，$\bar{\nu}$ 是 R' 的 I-V 模糊子代数。　　证毕

定理 13　f 是布尔代数 R 到 R' 的同态满射，若 $\bar{\mu}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数，则 $f(\bar{\mu})$ 是 R' 的 I-V 模糊子代数，其中 $f(\bar{\mu})(a')=\sup\{\bar{\mu}(a)\mid f(a)=a'\}$，$\forall a'\in R'$。

证明　由于 f 是 R 到 R' 的满射，因此 $\forall a',b'\in R'$，$\exists a,b\in R$，使得 $f(a)=a'$，$f(b)=b'$。于是

$$f(\bar{\mu})(a'b')=\sup\{\bar{\mu}(x)\mid f(x)=a'b'\}\geqslant\sup\{\bar{\mu}(ab)\mid f(ab)=a'b'\}=\sup\{\bar{\mu}(ab)\mid f(a)f(b)=a'b'\}\geqslant$$

$$\sup\{\bar{\mu}(a)\mid f(a)=a'\}\wedge\sup\{\bar{\mu}(b)\mid f(b)=b'\}=f(\bar{\mu})(a')\wedge f(\bar{\mu})(b')$$

$$f(\bar{\mu})(\overline{a'})=\sup\{\bar{\mu}(\bar{x})\}\mid f(\bar{x})=(\overline{a'})\geqslant\sup\{\bar{\mu}(\bar{a})\mid f(\bar{a})=(\overline{a'})\}\sup\{\bar{\mu}(a)\mid f(a)=a'\}=f(\bar{\mu})(a')$$

所以，$f(\bar{\mu})$ 是 R' 的 I-V 模糊子代数。　　证毕

定理 14　设 $\bar{\sigma}$ 是布尔代数 R 的一个 I-V 模糊集，$\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}$ 是 $R\times R$ 的一个 I-V 模糊集，其中 $\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(a,b)=\bar{\sigma}(a)\wedge\bar{\sigma}(b)$，则 $\bar{\sigma}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数的充要条件是 $\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}$ 是 $R\times R$ 的 I-V 模糊子代数。

证明　必要性。已知 $\bar{\sigma}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数，于是，$\forall a,a',b,b'\in R$，有

$$\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}[(a,a')+(b,b')]=\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(a+b,a'+b')=\bar{\sigma}(a+b)\wedge\bar{\sigma}(a'+b')\geqslant$$

$$[\bar{\sigma}(a)\wedge\bar{\sigma}(b)]\wedge[\bar{\sigma}(a')\wedge\bar{\sigma}(b')]=[\bar{\sigma}(a)\wedge\bar{\sigma}(a')]\wedge[\bar{\sigma}(b)\wedge\bar{\sigma}(b')]=\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(a,a')\wedge\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(b,b')$$

$$\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}\ \overline{(a,a')}=\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(\bar{a},\overline{a'})=\bar{\sigma}(\bar{a})\wedge\bar{\sigma}(\overline{a'})\geqslant\bar{\sigma}(a)\wedge\bar{\sigma}(a')=\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(a,a')$$

故 $\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}$ 是 $R\times R$ 的 I-V 模糊子代数。

充分性。已知 $\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}$ 是 $R\times R$ 的 I-V 模糊子代数，于是 $\forall a,b\in R$，有

$$\bar{\sigma}(a+b)=\bar{\sigma}(a+b)\wedge\bar{\sigma}(a+b)=\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(a+b,a+b)=\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}[(a,b)+(b,a)]\geqslant$$

$$\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(a,b)\wedge\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(b,a)=[\bar{\sigma}(a)\wedge\bar{\sigma}(b)]\wedge[\bar{\sigma}(b)\wedge\bar{\sigma}(a)]=\bar{\sigma}(a)\wedge\bar{\sigma}(b)$$

$$\bar{\sigma}(\bar{a})=\bar{\sigma}(\bar{a})\wedge\bar{\sigma}(\bar{a})=\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(\bar{a},\bar{a})=\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}\ \overline{(a,a)}\geqslant\overline{\mu_{\bar{\sigma}}}(a,a)=\bar{\sigma}(a)\wedge\bar{\sigma}(a)=\bar{\sigma}(a)$$

故 $\bar{\sigma}$ 是 R 的 I-V 模糊子代数。　　证毕

定理 15　设 $\bar{\mu},\bar{\nu}$ 分别是布尔代数 R,R' 的 I-V 模糊子代数，则 $(\bar{\mu}\times\bar{\nu})(a,b)=\bar{\mu}(a)\wedge\bar{\nu}(b)$，$\forall(a,b)\in R\times R'$ 是 $R\times R'$ 的 I-V 模糊子代数。

证明　$\forall(a,b),(a',b')\in R\times R'$，则 $(\bar{\mu}\times\bar{\nu})[(a,b)+(a',b')]=(\bar{\mu}\times\bar{\nu})(a+a',b+b')=\bar{\mu}(a+a')\wedge\bar{\nu}(b+b')\geqslant$

$$[\bar{\mu}(a)\wedge\bar{\mu}(a')]\wedge[\bar{\nu}(b)\wedge\bar{\nu}(b')]=[\bar{\mu}(a)\wedge\bar{\nu}(b)]\wedge[\bar{\mu}(a')\wedge\bar{\nu}(b')]=(\bar{\mu}\times\bar{\nu})(a,b)\wedge(\bar{\mu}\times\bar{\nu})(a',b')$$

$$(\bar{\mu}\times\bar{\nu})\overline{(a,b)}=(\bar{\mu}\times\bar{\nu})(\bar{a},\bar{b})=\bar{\mu}(\bar{a})\wedge\bar{\nu}(\bar{b})\geqslant\bar{\mu}(a)\wedge\bar{\nu}(b)=(\bar{\mu}\times\bar{\nu})(a,b)$$

故 $\bar{\mu}\times\bar{\nu}$ 是 $R\times R'$ 的 I-V 模糊子代数。　　证毕

参考文献：

[1] 孙绍权. 布尔代数的 Fuzzy 子代数和 Fuzzy 理想[J]. 模糊系统与数学，2006，20(1)：90-94.
Sun S Q. Fuzzy subalgebras and Fuzzy ideals of Boolean algebra[J]. Fuzzy Systems and Mathematics，2006，20(1)：90-94.

[2] 孙绍权,谷文祥. 布尔代数上的 Fuzzy 同余关系[J]. 模糊系统与数学,2005,19(4):34-38.
Sun S Q, Gu W X. Fuzzy congruence relations on Boolean algebra[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2005, 19(4): 34-38.

[3] 孙绍权,孙中品. 布尔代数的 Fuzzy 子代数的直积[J]. 青岛科技大学学报:自然科学版,2006,27(5):467-470.
Sun S Q, Sun Z P. Direct product of Fuzzy subalgebras of Boolean algebra[J]. Journal of Qingdao University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2006, 27(5): 467-470.

[4] 孙中品,孙绍权. 布尔代数的 $(\in,\in\vee q)$-Fuzzy 子代数和 $(\in,\in\vee q)$-Fuzzy 理想[J]. 青岛科技大学学报:自然科学版,2006,27(3):275-278.
Sun Z P, Sun S Q. $(\in,\in\vee q)$-Fuzzy subalgebras and $(\in,\in\vee q)$-Fuzzy ideals of Boolean algebra[J]. Journal of Qingdao University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2006, 27(3): 275-278.

[5] 陈权,孙绍权. 布尔代数的直觉模糊子代数和直觉模糊理想[J]. 青岛科技大学学报:自然科学版,2008,29(1):80-83.
Chen Q, Sun S Q. Intuitionistic Fuzzy subalgebras and intuitionistic Fuzzy ideals of Boolean algebra[J]. Journal of Qingdao University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2008, 29(1): 80-83.

[6] 陈露. 布尔代数的直觉 *T-S* 模糊子代数的直积[J]. 西北大学学报:自然科学版,2011,41(5):781-785.
Chen L. Direct product of intuitionistic *T-S* Fuzzy subalgebras of Boolean algebras[J]. Journal of Northwest University: Natural Science Edition, 2011, 41(5): 781-785.

[7] 陈露. 布尔代数的直觉 *T-S* 模糊子代数及理想[J]. 数学的实践与认识,2010,40(18):218-223.
Chen L. Intuitionistic *T-S* Fuzzy subalgebras and ideals in Boolean algebras[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2010, 40(18): 218-223.

[8] 王丰效. 布尔代数的 (λ,μ) 模糊子代数[J]. 高校应用数学学报(A 辑),2011,26(4):495-500.
Wang F X. On (λ,μ) Fuzzy subalgebras in Boolean algebras [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities (Ser. A), 2011, 26(4): 495-500.

[9] 刘春芝,廖祖华,姜雪. 布尔代数的 $(\in,\in\vee q_{(\lambda,\mu)})$-模糊理想[J]. 江南大学学报:自然科学版,2011,10(6):737-740.
Liu C Z, Liao Z H, Jiang X. $(\in,\in\vee q_{(\lambda,\mu)})$-Fuzzy ideals of Boolean algebra[J]. Journal of Jiangnan University: Natural Science Edition, 2011, 10(6): 737-740.

[10] 陈华新. 基于蕴涵算子上的模糊布尔代数[J]. 江南大学学报:自然科学版,2011,10(6):741-744.
Chen H X. Fuzzy Boolean algebras based on implication operator[J]. Journal of Jiangnan University: Natural Science Edition, 2011, 10(6): 741-744.

[11] 吕家俊,朱月秋,孙耕田. 布尔代数[M]. 济南:山东教育出版社,1982.
Lu J J, Zhu Y Q, Sun G T. Boolean algebra[M]. Jinan: Shandong Education Press, 1982.

[12] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1975, 8(3): 199-249.

I-V Fuzzy Subalgebras of Boolean Algebras

XU Hongwei, LIU Weifeng

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: I-V (Interval valued) fuzzy subalgebras of Boolean algebra and its properties were discussed, and some results about fuzzy subalgebras of Boolean algebras in the related references were generalized. Firstly, I-V fuzzy sets was applied to Boolean algebras, and I-V fuzzy subalgebras of Boolean algebra was defined and two simplified judging theorems of I-V fuzzy subalgebras were given. Secondly, the relation between interval valued fuzzy subalgebras and (fuzzy) subalgebras of Boolean algebra were discussed, and it was proved that I-V fuzzy sets of Boolean algebras was I-V fuzzy algebras if and only if the cut sets of I-V fuzzy sets was subalgebras of Boolean subalgebras, and I-V fuzzy sets of Boolean algebras was I-V fuzzy algebras if and only if lower and upper membership functions were subalgebras of Boolean subalgebras. Thirdly, the natures about intersection, homomorphism of I-V fuzzy subalgebras of Boolean subalgebras were discussed, and it is stated that intersection, images and inverse-images under Boolean algebra homomorphism of I-V fuzzy subalgebras of Boolean algebra are respectively I-V fuzzy subalgebras of Boolean algebra. Lastly, I-V fuzzy subalgebras of direct product of Boolean algebras were discussed.

Key words: Boolean algebras; fuzzy subalgebras; I-V fuzzy subalgebras; subalgebras

(责任编辑　黄　颖)