

Rosenau-RLW 方程的非线性守恒差分格式*

郑克龙¹, 周光亚²

(1. 西南科技大学 理学院, 四川 绵阳 621000; 2. 四川工程职业技术学院 基础部, 四川 德阳 618000)

摘要:对 Rosenau-RLW 方程的初边值问题研究差分数值计算方法,提出了一个带有加权系数 θ 的两层非线性差分格式。格式模拟了方程的两个守恒量,并利用差分分解的先验估计和能量方法分析了该格式的二阶收敛性与无条件稳定性。数值结果表明,适当调整加权系数 θ ,可以大幅提高格式的计算精度。

关键词:Rosenau-RLW 方程; 差分格式; 守恒; 收敛性; 稳定性

中图分类号:O241.82

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2014)04-0087-05

在对紧离散系统的研究中,波-波及波-墙相互作用的情形不能用著名的 KdV 方程来处理。为了克服这个不足之处,文献[1]提出了 Rosenau 方程

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = 0 \quad (1)$$

它通常用于描述紧离散系统和模拟无线电及计算机领域中通过一个 L-C 流程的长链传输线模型。Rosenau 方程也可以被看作是正则长波 (RLW) 方程

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0 \quad (2)$$

的变形,而 RLW 方程通常用于模拟非线性发散介质中的长波。在进行非线性扩散波的研究时,正则长波方程因其描述大量的物理现象而占有重要的地位,特别是它所描述的运动有与 KDV 方程相同的逼近界,而且能很好地模拟 KdV 方程的几乎所有应用^[2]。因此对方程(1)和方程(2)的研究引起了众多学者的关注^[3-10]。

作为对 Rosenau 方程(1)和 RLW 方程(2)的推广,文献[11-13]又进一步对 Rosenau-RLW 方程进行了数值研究。本文考虑如下 Rosenau-RLW 方程的初边值问题

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_x + \alpha uu_x = 0 \quad (3)$$

$$u(x_L, t) = u(x_R, t) = 0, u_{xx}(x_L, t) = u_{xx}(x_R, t) = 0, t \in [0, T] \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in [x_L, x_R] \quad (5)$$

其中 $\alpha > 0$ 是常数, $u_0(x)$ 是已知函数。问题(3)~(5)具有如下守恒律^[11-13]

$$Q(t) = \int_{x_L}^{x_R} u(x, t) dx = \int_{x_L}^{x_R} u_0(x) dx = Q(0) \quad (6)$$

$$E(t) = \|u\|_{L_2}^2 + \|u_x\|_{L_2}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2}^2 = E(0) \quad (7)$$

其中 $Q(0), E(0)$ 均为仅与初始条件有关的常数。

Li 和 Vu-Quoc 在文献[14]中指出“一定程度上,保持原问题守恒量的能力是评价一个数值方法优劣的标准”。文献[15]指出,守恒的差分格式可以较好地拟合问题本身所具有的守恒律,而且避免了其他非守恒差分格式的非线性“爆炸”,所以构造守恒的差分格式始终是一件非常有意义的工作。本文在保持二阶理论精度的情况下,在空间层引入加权系数 θ ,对问题(3)~(5)提出了一个新的两层非线性加权差分格式,格式合理地模拟了守恒量(6)和(7)。数值算例表明,适当地调整加权系数 θ ,能够使计算结果具有更小误差。

1 差分格式和守恒律

对区域 $[x_L, x_R] \times [0, T]$ 作网格剖分,取空间步长 $h = \frac{x_R - x_L}{J}$,时间步长为 $\tau, x_j = x_L + jh, j = 0, 1, 2, \dots, J$,

* 收稿日期:2013-04-24 修回日期:2013-05-04 网络出版时间:2014-7-3 23:03

资助项目:四川省科技厅应用基础研究项目(No. 2013JY0096);西南科技大学博士基金(No. 11zx7129)

作者简介:郑克龙,男,副教授,研究方向为应用数学, E-mail: zhengkelong@swust.edu.cn

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140703.2303.017.html>

$t_n = n\tau, n=0, 1, 2, \dots, N, N = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil$ 。在本文中,用 C 表示与时间步长和空间步长无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值);记 $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ 以及 $Z_h^0 = \{u = (u_j) \mid u_0 = u_J = 0, j=0, 1, 2, \dots, J\}$ 。

定义 $(u_j^n)_x = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, (u_j^n)_{\bar{x}} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}, (u_j^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}, (u_j^n)_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, u_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}, \langle u^n, v^n \rangle =$

$$h \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n v_j^n, \|u^n\|^2 = \langle u^n, u^n \rangle, \|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J-1} |u_j^n|。$$

对问题(3)~(5)考虑如下有限差分格式($\theta > 1/2$)

$$\frac{1-\theta}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)_t + \theta(u_j^n)_t - (u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}t} + (u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t} + (u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} + \frac{\alpha}{3}\{u_j^{n+\frac{1}{2}}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} + [(u_j^{n+\frac{1}{2}})^2]_{\hat{x}}\} = 0 \quad (8)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), j=0, 1, 2, \dots, J \quad (9)$$

$$u^n \in Z_h^0, (u_0^n)_{\bar{x}\bar{x}} = (u_J^n)_{\bar{x}\bar{x}} = 0, n=0, 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

由边界条件(4)可知,离散边界条件(10)的是合理的。差分格式(8)~(10)对守恒律(6)和(7)的数值模拟如下。

定理 1 设 $u_0 \in H_0^2[x_L, x_R]$, 则差分格式(8)~(10)关于以下离散能量是守恒的,即

$$Q^n = h \sum_{j=1}^{J-1} \left[\frac{1-\theta}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \theta u_j^n \right] = Q^{n-1} = \dots = Q^0 \quad (11)$$

$$E^n = \theta \|u^n\|^2 + (1-\theta)h \sum_{j=1}^{J-1} u_{j+1}^n u_j^n + \|u_x^n\|^2 + \|u_{xx}^n\|^2 = E^{n-1} = \dots = E^0 \quad (12)$$

其中 $n=1, 2, \dots, N$ 。

证明 (8)式两端乘以 h 后对 j 求和,结合边界条件(10)和分部求和公式^[12],然后对 n 递推可得(11)式。

将(8)式与 $2u^{n+\frac{1}{2}}$ (即 $u^{n+1} + u^n$)作内积,由边界条件(10)和分部求和公式^[12]得

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\theta)}{\tau} h \sum_{j=1}^{J-1} (u_{j+1}^{n+1} u_j^{n+1} - u_{j+1}^n u_j^n) + \frac{\theta}{\tau} (\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2) + \frac{1}{\tau} (\|u_x^{n+1}\|^2 - \|u_x^n\|^2) + \\ & \frac{1}{\tau} (\|u_{xx}^{n+1}\|^2 - \|u_{xx}^n\|^2) + 2\langle u_x^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}} \rangle + 2\langle \varphi(u^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\varphi(u^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\alpha}{3}\{u_j^{n+\frac{1}{2}}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} + [(u_j^{n+\frac{1}{2}})^2]_{\hat{x}}\}$, 又

$$\langle u_x^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}} \rangle = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(u^{n+\frac{1}{2}}), u^{n+\frac{1}{2}} \rangle &= \frac{\alpha}{3} h \sum_{j=1}^{J-1} \{u_j^{n+\frac{1}{2}}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} + [(u_j^{n+\frac{1}{2}})^2]_{\hat{x}}\} u_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{3} h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+\frac{1}{2}})^2 (u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} + \\ & \frac{\alpha}{3} h \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^{n+\frac{1}{2}})^2]_{\hat{x}} u_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{3} h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+\frac{1}{2}})^2 (u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} - \frac{\alpha}{3} h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+\frac{1}{2}})^2 (u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

于是将(14)、(15)式带入(13)式,然后递推可得(12)式。

证毕

2 差分格式的收敛性与稳定性

令问题(3)~(5)的解为 $v(x, t)$, 记 $v_j^n = v(x_j, t_n)$, 则差分格式(8)~(10)的截断误差为

$$r_j^n = \frac{1-\theta}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n)_t + \theta(v_j^n)_t - (v_j^n)_{\bar{x}\bar{x}t} + (v_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t} + (v_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} + \varphi(v_j^{n+\frac{1}{2}}) \quad (16)$$

由 Taylor 展开式可知,当 $h, \tau \rightarrow 0$ 时, $|r_j^n| = O(\tau^2 + h^2)$ 。

引理 1 设 $u_0 \in H_0^2[x_L, x_R]$, 则初边值问题(3)~(5)的解满足 $\|u\|_{L_2} \leq C, \|u_x\|_{L_2} \leq C, \|u_{xx}\|_{L_2} \leq C, \|u\|_{L_\infty} \leq C, \|u_x\|_{L_\infty} \leq C$ 。

证明 由(7)式得 $\|u\|_{L_2} \leq C, \|u_x\|_{L_2} \leq C, \|u_{xx}\|_{L_2} \leq C$ 。再由 Sobolev 不等式有 $\|u\|_{L_\infty} \leq C, \|u_x\|_{L_\infty} \leq C$ 。

证毕

定理 2 设 $u_0 \in H_0^2[x_L, x_R]$, 则差分格式(8)~(10)的解满足 $\|u^n\| \leq C, \|u_x^n\| \leq C, \|u_{xx}^n\| \leq C$ 。从而有 $\|u^n\|_\infty \leq C, \|u_x^n\|_\infty \leq C (n=1, 2, \dots, N)$ 。

证明 由于

$$h \sum_{j=1}^{J-1} u_{j+1}^n u_j^n \leq \|u^n\|^2 \quad (17)$$

$$\text{可得} \quad (\theta - |1 - \theta|) \|u^n\|^2 + \|u_x^n\|^2 + \|u_{xx}^n\|^2 \leq E^n \quad (18)$$

由 $\theta > \frac{1}{2}$, 则 $\theta - |1 - \theta| > 0$ 。于是由定理 1 和(18)式可得 $\|u^n\| \leq C$, $\|u_x^n\| \leq C$, $\|u_{xx}^n\| \leq C$ 。最后由离散的 Sobolev 不等式^[12]得 $\|u^n\|_\infty \leq C$, $\|u_x^n\|_\infty \leq C$ 。证毕

定理 3 设 $u_0 \in H_0^2[x_L, x_R]$, 则差分格式(8)~(10)的解 u^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到初边值问题(1)~(3)的解, 且收敛阶为 $O(\tau^2 + h^2)$ 。

证明 将(16)式减去(8)式, 并记 $e_j^n = v_j^n - u_j^n$, 得

$$r_j^n = \frac{1-\theta}{2}(e_{j+1}^n + e_{j-1}^n)_t + \theta(e_j^n)_t - (e_j^n)_{xxt} + (e_j^n)_{xx\bar{x}} + (e_j^n)_{x\bar{x}\bar{x}} + (e_j^{n+\frac{1}{2}})_x + \varphi(v_j^{n+\frac{1}{2}}) - \varphi(u_j^{n+\frac{1}{2}}) \quad (19)$$

将(19)式两端与 $2e^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积, 有

$$\begin{aligned} \langle r^n, 2e^{n+\frac{1}{2}} \rangle &= \frac{(1-\theta)h}{\tau} \sum_{j=1}^{J-1} (e_{j+1}^{n+1} e_j^{n+1} - e_{j+1}^n e_j^n) + \frac{\theta}{\tau} (\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2) + \frac{1}{\tau} (\|e_x^{n+1}\|^2 - \|e_x^n\|^2) + \\ &\quad \frac{1}{\tau} (\|e_{xx}^{n+1}\|^2 - \|e_{xx}^n\|^2) + 2\langle e_x^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle + 2\langle \varphi(v^{n+\frac{1}{2}}) - \varphi(u^{n+\frac{1}{2}}), e^{n+\frac{1}{2}} \rangle \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{类似于(14)式有} \quad \langle e_x^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = 0 \quad (21)$$

利用引理 1、定理 2 以及 Cauchy-Schwarz 不等式, 有 $\langle \varphi(v^{n+\frac{1}{2}}) - \varphi(u^{n+\frac{1}{2}}), e^{n+\frac{1}{2}} \rangle =$

$$\begin{aligned} &\frac{ah}{3} \sum_{j=1}^{J-1} [v_j^{n+\frac{1}{2}} (v_j^{n+\frac{1}{2}})_x - u_j^{n+\frac{1}{2}} (u_j^{n+\frac{1}{2}})_x] e_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{ah}{3} \sum_{j=1}^{J-1} [(v_j^{n+\frac{1}{2}})^2 - (u_j^{n+\frac{1}{2}})^2]_x e_j^{n+\frac{1}{2}} = \\ &\frac{ah}{3} \sum_{j=1}^{J-1} [v_j^{n+\frac{1}{2}} (e_j^{n+\frac{1}{2}})_x + e_j^{n+\frac{1}{2}} (u_j^{n+\frac{1}{2}})_x] e_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{ah}{3} \sum_{j=1}^{J-1} [e_j^{n+\frac{1}{2}} (v_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^{n+\frac{1}{2}})] (e_j^{n+\frac{1}{2}})_x \leq \end{aligned}$$

$$C(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2) \leq C(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2) \quad (22)$$

$$\langle r^n, 2e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = \langle r^n, e^{n+1} + e^n \rangle \leq \|r^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 \quad (23)$$

将(21)~(23)式代入(20)式, 整理有

$$\begin{aligned} &(1-\theta)h \sum_{j=1}^{J-1} (e_{j+1}^{n+1} e_j^{n+1} - e_{j+1}^n e_j^n) + \theta(\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2) + (\|e_x^{n+1}\|^2 - \|e_x^n\|^2) + (\|e_{xx}^{n+1}\|^2 - \|e_{xx}^n\|^2) \leq \\ &\|r^n\|^2 + C(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2) \leq \|r^n\|^2 + C(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e_{xx}^{n+1}\|^2 + \|e_{xx}^n\|^2) \end{aligned} \quad (24)$$

则令 $B^n = (1-\theta)h \sum_{j=1}^{J-1} e_{j+1}^n e_j^n + \theta(\|e^n\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e_{xx}^n\|^2)$, 则(24)式等价于

$$B^{n+1} - B^n \leq \|r^n\|^2 + C(\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e_{xx}^{n+1}\|^2 + \|e_{xx}^n\|^2) \quad (25)$$

将(25)式从 0 到 $n-1$ 求和得 $B^n \leq B^0 + \tau \sum_{l=0}^{n-1} \|r^l\|^2 + C\tau \sum_{l=0}^n (\|e^l\|^2 + \|e_x^l\|^2 + \|e_{xx}^l\|^2)$, 又

$$\tau \sum_{l=0}^{n-1} \|r^l\|^2 \leq n\tau \max_{0 \leq l \leq n-1} \|r^l\|^2 \leq T \cdot O(\tau^2 + h^2)^2, B^0 = O(\tau^2 + h^2)^2$$

类似于(17)、(18)式, 有 $B^n \geq (\theta - |1 - \theta|) \|e^n\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e_{xx}^n\|^2$ 。由 $\theta > \frac{1}{2}$, 则 $\theta - |1 - \theta| > 0$, 则

$$(25) \text{ 式可整理为 } \|e^n\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e_{xx}^n\|^2 \leq O(\tau^2 + h^2)^2 + C\tau \sum_{l=0}^n (\|e^l\|^2 + \|e_x^l\|^2 + \|e_{xx}^l\|^2)。$$

于是由离散的 Gronwall 不等式^[12], 有 $\|e^n\| \leq O(\tau^2 + h^2)$, $\|e_x^n\| \leq O(\tau^2 + h^2)$, $\|e_{xx}^n\| \leq O(\tau^2 + h^2)$ 。最后由离散的 Sobolev 不等式^[12]得 $\|e^n\|_\infty \leq O(\tau^2 + h^2)$ 。证毕

与定理 3 类似, 可以证明定理 4。

定理 4 在定理 3 的条件下, 差分格式(8)~(10)的解 u^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 稳定。

3 数值实验

取 $\alpha=2$, 此时方程(3)的孤波解^[12]为 $u(x, t) = \frac{15}{38} \text{sech}^4 \left[\frac{\sqrt{13}}{26} \left(x - \frac{169}{133} t \right) \right]$, 所以当 $-x_L, x_R$ 充分大的时候, 初

边值问题(3)~(5)与方程(3)的柯西问题是一致的。差分格式(8)~(10)是关于 u_j^{n+1} 的一个非线性方程组,可以用 Newton 迭代法来求解。在数值试验中,固定 $x_L=-20, x_R=40, T=10$ 。取 $u_0(x)=\frac{15}{38}\text{sech}^4\frac{\sqrt{13}x}{26}$,就 τ 和 h 的不同取值时,几个不同时刻的 l_∞ 误差见下表 1~2,格式对守恒量的模拟见表 3~4。

表 1 $\tau=h=0.2$ 时,取不同参数 θ ,在几个不同时刻的 l_∞ 误差

	$\theta=0.5$	$\theta=0.75$	$\theta=1.0$	$\theta=1.25$	$\theta=1.5$
$t=2$	0.895 371e-4	0.197 412e-3	0.305 192e-3	0.412 780e-3	0.520 175e-3
$t=4$	0.180 239e-3	0.398 109e-3	0.615 551e-3	0.832 563e-3	0.116 537e-2
$t=6$	0.263 584e-3	0.586 896e-3	0.909 580e-3	0.123 163e-2	0.155 306e-2
$t=8$	0.338 465e-3	0.759 601e-3	0.117 977e-2	0.159 899e-2	0.201 723e-2
$t=10$	0.406 405e-3	0.916 785e-3	0.142 584e-2	0.193 358e-2	0.243 999e-2

表 2 $\tau=h=0.1$ 时,取不同参数 θ ,在几个不同时刻的 l_∞ 误差

	$\theta=0.5$	$\theta=0.75$	$\theta=1.0$	$\theta=1.25$	$\theta=1.5$
$t=2$	0.280 525e-4	0.494 725e-4	0.764 954e-4	0.103 505e-3	0.130 503e-3
$t=4$	0.451 237e-4	0.997 109e-4	0.154 271e-3	0.208 804e-3	0.263 311e-3
$t=6$	0.659 905e-4	0.147 065e-3	0.228 096e-3	0.309 085e-3	0.390 030e-3
$t=8$	0.847 443e-4	0.190 290e-3	0.295 776e-3	0.401 202e-3	0.506 569e-3
$t=10$	0.101 760e-3	0.229 704e-3	0.357 566e-3	0.485 346e-3	0.613 044e-3

表 3 在不同时刻对守恒量(6)和(7)的数值模拟 Q_1^n 和 $Q_2^n(\tau=h=0.2)$

	Q^n			E^n		
	$\theta=0.5$	$\theta=0.75$	$\theta=1.0$	$\theta=0.5$	$\theta=0.75$	$\theta=1.0$
$t=0$	3.795 135	3.795 135	3.795 136	1.025 825	1.026 526	1.027 227
$t=2$	3.795 174	3.795 174	3.795 174	1.025 899	1.026 602	1.027 306
$t=4$	3.795 181	3.795 181	3.795 181	1.025 926	1.026 636	1.027 345
$t=6$	3.795 161	3.795 161	3.795 161	1.025 932	1.026 651	1.027 369
$t=8$	3.795 141	3.795 141	3.795 141	1.025 933	1.026 663	1.027 392
$t=10$	3.795 125	3.795 125	3.795 125	1.025 933	1.026 674	1.027 414

表 4 在不同时刻对守恒量(6)和(7)的数值模拟 Q_1^n 和 $Q_2^n(\tau=h=0.1)$

	Q^n			E^n		
	$\theta=0.5$	$\theta=0.75$	$\theta=1.0$	$\theta=0.5$	$\theta=0.75$	$\theta=1.0$
$t=0$	3.795 140	3.795 140	3.795 141	1.026 889	1.027 064	1.027 240
$t=2$	3.795 170	3.795 170	3.795 170	1.026 951	1.027 127	1.027 303
$t=4$	3.795 176	3.795 176	3.795 177	1.026 974	1.027 152	1.027 329
$t=6$	3.795 156	3.795 156	3.795 156	1.026 975	1.027 155	1.027 335
$t=8$	3.795 136	3.795 136	3.795 136	1.026 971	1.027 153	1.027 336
$t=10$	3.795 120	3.795 120	3.795 120	1.026 966	1.027 151	1.027 337

数值结果表明,加权系数 $\theta(\theta>1/2)$ 取得越小,计算误差越小,格式对守恒量(6)和(7)也进行了高精度模拟,故本文的格式是有效的。

参考文献:

[1] Rosenau P. Dynamics of dense discrete systems[J]. Progr Theoret Phys,1988,79(5):1028-1042.

[2] Peregrine D H. Calculations of the development of an undu-
iary bore[J]. J Fluid Mech,1966,25(2):321-330.

- [3] Chung S K. Finite difference approximate solutions for the Rosenau equation[J]. *Applicable Analysis*, 1998, 69(1-2): 149-156.
- [4] Omrani K, Abidi F, Achouri T, et al. A new conservative finite difference scheme for the Rosenau equation[J]. *Appl Math Comput*, 2008, 201(1/2): 35-43.
- [5] Hu J, Zheng K. Two conservative difference schemes for the generalized rosenau equation[J]. *Boundary Value Problems*, 2010, Article ID 543503, 18 pages.
- [6] Chang Q, Wang G, Guo B. Conservative scheme for a model fo nonlinear dispersive waves and its solitary waves induced by boundary notion [J]. *J Comput Phys*, 1991, 93(2): 360-375.
- [7] Ramos J I. Explicit finite difference methods for the EW and RLW equations[J]. *Appl Math Comput*, 2006, 179(2): 622-638.
- [8] 王廷春, 张鲁明. 求解广义正则长波方程的守恒差分格式[J]. *应用数学学报*, 2006, 29(6): 1091-1098.
Wang T C, Zhang L M. A conservative finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica: Chinese Series*, 2006, 29(6): 1091-1098.
- [9] 徐友才, 胡劲松, 胡朝浪. 广义正则长波方程的一个新的守恒差分格式[J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2011, 48(3): 534-538.
Xu Y C, Hu J S, Hu C L. A new conservation finite difference scheme for generalized regularized long wave equation [J]. *Journal of Sichuan University: Natural Science Edition*, 2011, 48(3): 534-538.
- [10] 胡劲松, 王玉兰. Rosenau 方程的一个新的守恒差分格式[J]. *西南师范大学学报: 自然科学版*, 2010, 35(4): 6-9.
Hu J C, Wang Y L. A new conservative difference scheme for Rosenau equation[J]. *Journal of Southwest China Normal University: Natural Science Edition*, 2010, 35(4): 6-9.
- [11] Pan X, Zhang L. On the convergence of a conservative numerical scheme for the usual Rosenau-RLW equation[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(8): 3371-3378.
- [12] Zuo J M, Zhang Y M, Zhang T D, et al. A new conservative difference scheme for the general Rosenau-RLW equation[J]. *Boundary Value Problems*, 2010, Article ID 516260, 13 pages.
- [13] Pan X, Zhang L. Numerical simulation for general Rosenau-RLW equation: an average linearized conservative scheme[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, Article ID 517818, 15 pages.
- [14] Li S, Vu-Quoc L. Finite difference calculus invariant structure of a class of algorithms for the nonlinear Klein-Gordon equation[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1995, 32(6): 839-1875.
- [15] Zhang F, Pérez-García V M, Vázquez L. Numerical simulation of nonlinear Schrödinger systems: a new conservative scheme[J]. *Appl Math Comput*, 1995, 71(2/3): 165-177.

Nonlinear Conservative Difference Scheme for the Rosenau-RLW Equation

ZHENG Kelong¹, ZHOU Guangya²

(1. School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang Sichuan 621010;

2. Department of Basic Science, Sichuan Engineering and Technical college, Deyang Sichuan 618000, China)

Abstract: Numerical solution for the Rosenau-RLW equation is studied by a new nonlinear conservative finite difference scheme with parameter θ . Conservations of discrete mass and discrete energy are discussed. Second order convergence and unconditional stability of the scheme are also derived using prior estimate and energy method. Numerical results show that it can achieve better accuracy under adjusting the value of parameter θ .

Key words: Roseau-RLW equation; difference scheme; conservative; convergence; stability

(责任编辑 黄 颖)