DOI:10.11721/cqnuj20140419

(m,n)-投射模和(m,n)-内射模*

蹇 红，孙春涛
(重庆邮电大学 数理学院，重庆 400065)

摘要:设 R 是任给的环，m 和 n 都是正整数。右 R 模 N_R 是(m,n)-内射模，若对 R^m 的任给的 n-生成子模 K，则有 $Ext_R^1(R^m/K,N)=0$。右 R 模 M_R 是(m,n)-投射模，若对任给的(m,n)-内射模 N，有 $Ext_R^1(M,N)=0$。当 $m=1$，n 是任给的正整数时，(m,n)-投射模就是 f-投射模。任给的(m,n)-表现模都是(m,n)-投射模。设 F-(m,n)-$proj$ 表示由所有的(m,n)-投射模所组成的模集，F-(m,n)-inj 表示由所有的(m,n)-内射模所组成的模集。本文给出了(m,n)-投射模的刻画，同时证明了(F-(m,n)-$proj$，F-(m,n)-inj)是一余挠理论，且每一个 R-模都有一个特殊的(m,n)-内射预包络和一个特殊的(m,n)-投射预覆盖。还给出了(m,n)-投射模和(m,n)-内射模的相关的性质。

关键词:(m,n)-内射模;(m,n)-投射模;包络;覆盖;余挠理论

中图分类号:O153.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2014)04-0096-04

1 预备知识

本文中所涉及的环都是带有单位元的结合环，模均指酉模。用 M_R 表示右 R-模。$pd(M_R)$表示 M_R 的投射维数。对 $n\geqslant 1$，$Hom(M,N)$($Ext^n(M,N)$)表示 $Hom_R(M,N)$($Ext_R^n(M,N)$)，$f.g$ 表示有限生成模，$EI(M)$表示 M_R 的(m,n)-内射包络。ker φ 表示同态 φ 的核。Im φ 表示同态 φ 的同态像。

设 R 是环，称 N_R 是(m,n)-内射模，若对 R^m 的任给的 n-生成子模 K，有 $Ext_R^1(R^m/K,N)=0$。此内射模已经得到了某些工作者的研究[1-3]。设 Ω 是一模类，用 $\Omega^{\perp}=\{C:Ext(L,C)=0$，对所有 $L\in\Omega\}$表示 Ω 的右正交类。用$^{\perp}\Omega=\{C:Ext(C,L)=0$，对所有 $L\in\Omega\}$表示 Ω 的左正交类。称一同态 $\varphi:M\to C$ 是一 Ω-预包络[4]，若 $C\in\Omega$，且 Abel 群同态 $Hom(\varphi,C'):Hom(M,C')\to Hom(C,C')$是满的，对 $\forall C'\in\Omega$。单同态 $\varphi:M\to C$ 称特殊的 Ω-预包络[7]，若 $Co\ker\varphi\subseteq{}^{\perp}\Omega$。一 Ω-预包络 $\varphi:M\to C$ 称为 Ω-包络，若使得 $g\varphi=\varphi$ 的每个自同态 $g:C\to C$ 是同构的。对偶地有 Ω-预覆盖和 Ω-覆盖的定义。Ω-包络(Ω-覆盖) 一般情况下不必存在，但若存在，在同构意义下是唯一的。

R-模对(F,C)称为余挠对[4,6](又称余挠理论)，若 $F^{\perp}=C$ 且$^{\perp}C=F$。显然，$({}^{\perp}(F^{\perp}),F^{\perp})$是余挠对，被称为余生成的[8]。$(F,C)$称为完美的[5]，若对任给的 R-模有一 C-包络和 F-覆盖。(F,C)称为完备的，若对任给的 R-模 M，有正合列 $0\to M\to C'\to F'\to 0$，其中 $C'\in C$ 且 $F'\in F$，和正合列 $0\to K\to G\to M\to 0$，其中 $K\in C$ 且 $G\in F$。(F,C)是遗传的，若对任给的 $i\geqslant 2$ 和任给的 $C'\in C$，$F'\in F$，有 $Ext^i(F',C')=0$。

本文首先给出了(m,n)-投射模的概念，并给出了当环 R 是自(m,n)-内射环时这些模的等价条件。证明了(F-(m,n)-$proj$，F-(m,n)-inj)是一余生成的余挠理论。且每一个 R-模都有一个特殊的(m,n)-内射预包络和一个特殊的(m,n)-投射预覆盖。还证明了任给的右 R-模是(m,n)-投射模等价于任给的 $f.g$ 右 R-模是(m,n)-投射模，等价于每个(m,n)-内射模是内射模，等价于(F-(m,n)-$proj$，F-(m,n)-inj)是遗传的，且任给的(m,n)-内射模是(m,n)-投射模。最后证明了 R^m 的任给的 n 生成右 R-子模都是投射模，等价于任给的(m,n)-内射右 R-模的因子模都是(m,n)-内射模，等价于任给的内射右 R-模的因子模都是(m,n)-内射模，等价于任给的右 R-模 M 都有一单 F-(m,n)-inj 覆盖 $\varphi:F\to M$，等价于对任给的(m,n)-投射右 R-模 M，$pd(M)\leqslant 1$，等价于对 R^m 的任给的

* **收稿日期**:2013-03-25　　**修回日期**:2013-05-02　　**网络出版时间**:2014-7-3 23:03
作者简介:蹇红，女，讲师，研究方向为代数环模理论，E-mail:jianhong@cqupt.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140703.2303.019.html

n-生成右 R-子模 K，$pd(R^m/K)\leqslant 1$，等价于$(F\text{-}(m,n)\text{-}proj, F\text{-}(m,n)\text{-}inj)$是遗传的，且每个右 R-模有一单 F-(m,n)-inj 覆盖。

2 主要内容

定义 称 M_R 是(m,n)-投射模，若对任给的(m,n)-内射模右 R-模 N，有 $Ext_R^1(M,N)=0$。

注 1) 当 $m=1$，n 是任给的正整数时，(m,n)-投射模就是 f-投射模[7]；2) 任给的(m,n)-表现模都是(m,n)-投射模。

性质 1 设环 R 是右自(m,n)-内射环，且 M 是右 R-模，则下列条件是等价的：1) M 是(m,n)-投射模；2) M 对下列正合序列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是投射的，其中 A 是(m,n)-内射模；3) 对任给的正合序列 $0\to K\to F\to M\to 0$，其中 F 是(m,n)-内射模，则 $K\to F$ 是 K 的一个(m,n)-内射预包络；4) M 是一个(m,n)-内射预包络 $0\to K\to F$ 的余核，其中 F 是投射模。

证明 1)$\Rightarrow$2)，显然成立。

2)$\Rightarrow$1)，对任给的(m,n)-内射模 N，有正合列 $0\to N\to E\to L\to 0$，其中 E 是内射模。其导出正合列

$$Hom(M,E)\to Hom(M,L)\to Hom(M,L)\to Ext^1(M,N)\to 0$$

由性质 1 的条件 2)知，$Hom(M,E)\to Hom(M,L)\to 0$，故 $Ext^1(M,N)=0$。

1)$\Rightarrow$3)，对任给的正合列 $0\to K\xrightarrow{\varphi}F\to M\to 0$，其中 F 是(m,n)-内射模。设 F' 是任给的(m,n)-内射模，则导出正合列

$$0\to Hom(M,F')\to Hom(F,F')\to Hom(K,F')\to Ext^1(M,F')$$

因 M 是(m,n)-投射模，则有 $Ext^1(M,F')=0$。故 Abel 群同态 $Hom(\varphi,F'):Hom(F,F')\to Hom(K,F')$是满的，即 $K\to F$ 是 K 的一个(m,n)-内射预包络。

3)$\Rightarrow$4)，模 M 有正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$，其中 P 是投射模。由已知 P 是(m,n)-内射模，因此 $0\to K\to P$ 是 K 的一个(m,n)-内射预包络。

4)$\Rightarrow$1)，由条件 4)模 M 有正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$，其中 P 是投射模，$K\to P$ 是 K 的一个(m,n)-内射预包络。对任给的(m,n)-内射模 N，有导出正合列 $Hom(P,N)\to Hom(K,N)\to Ext^1(M,N)\to 0$，又由性质 1 的条件 4)知，$Hom(P,N)\to Hom(K,N)$是满的，故 $Ext^1(M,N)=0$。 证毕

用记号 $F\text{-}(m,n)\text{-}proj$ 表示由所有的(m,n)-投射模所组成的模集，$F\text{-}(m,n)\text{-}inj$ 表示由所有的(m,n)-内射模所组成的模集。

定理 设 R 是环，则$(F\text{-}(m,n)\text{-}proj, F\text{-}(m,n)\text{-}inj)$是一余生成的余挠理论。且每一个 R-模都有一个特殊的(m,n)-内射预包络和一个特殊的(m,n)-投射预覆盖。

证明 设 X 是(m,n)-表现模组成的模类，则 $F\text{-}(m,n)\text{-}inj=X^{\perp}$，$F\text{-}(m,n)\text{-}proj={}^{\perp}(X^{\perp})$，显然$({}^{\perp}(X^{\perp}), X^{\perp})$是一余生成的余挠理论。由文献[8] 中的定理 10 可知结论成立。 证毕

推论 设 R 是环，则下列条件等价：1) 任给的右 R-模是(m,n)-投射模；2) 任给的 $f.g$ 右 R-模是(m,n)-投射模；3) 每个(m,n)-内射模是内射模；4) $(F\text{-}(m,n)\text{-}proj, F\text{-}(m,n)\text{-}inj)$是遗传的，且任给的$(m,n)$-内射模是$(m,n)$-投射模。

证明 1)$\Rightarrow$2)显然成立。

2)$\Rightarrow$3)，设 N 是任给的(m,n)-内射模，M 是 $f.g$ 右 R-模，由推论的条件 2)有，M 是(m,n)-投射模，则有 $Ext^1(M,N)=0$，故 N 是内射模。

3)$\Rightarrow$1)，设 M 是任给的右 R-模，N 是任给的(m,n)-内射模，由推论的条件 3)知，N 是内射模，则有 $Ext^1(M,N)=0$，故 M 是(m,n)-投射模。

1)$\Rightarrow$4)，设 M 是任给的右 R-模，有正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$，其中 P 是投射模。设 N 是任给的(m,n)-内射模，则有导出正合列 $Ext^1(K,N)\to Ext^2(M,N)\to Ext^2(P,N)=0$。由推论的条件 1)知，$K$ 是(m,n)-内射模，即 $Ext^1(K,N)=0$，故 $Ext^2(M,N)=0$。以此类推，任给的 $i\geqslant 2$，有 $Ext^i(M,N)=0$。显然，任给的(m,n)-内射模是

(m,n)-投射模。

4)⇒1),由定理知,设 M 是任给的右 R-模,有正合列 $0\to M\to A\to F\to 0$,其中 A 是 (m,n)-内射模,F 是 (m,n)-投射模。由推论的条件4)知,A 是 (m,n)-投射模。设 N 是任给的 (m,n)-内射模,有导出正合列 $Ext^1(A,N)\to Ext^1(M,N)\to Ext^2(F,N)$,由已知,$Ext^1(A,N)=Ext^2(F,N)=0$,故 $Ext^1(M,N)=0$,即 M 是 (m,n)-投射模。 证毕

性质2 设 R 是环,则下列条件等价:1) R^m 的任给的 n-生成右 R-子模都是投射模;2) 任给的 (m,n)-内射右 R-模的因子模都是 (m,n)-内射模;3) 任给的内射右 R-模的因子模都是 (m,n)-内射模;4) 任给的右 R-模 M 都有一单 F-(m,n)-inj 覆盖 $\varphi:F\to M$;5) 对任给的 (m,n)-投射右 R-模 M,$pd(M)\leqslant 1$;6) 对 R^m 的任给的 n-生成右 R-子模 K,$pd(R^m/K)\leqslant 1$;7) (F-(m,n)-$proj$,F-(m,n)-inj)是遗传的,且每个右 R-模有一单 F-(m,n)-inj 覆盖。

证明 1)⇒2),设 A 是任给的 (m,n)-内射模,同态 $\pi:A\to B$ 是满同态。设同态 $g:K\to B$,其中 K 是 R^m 的任给的 n-生成右 R-子模。因此有图1,其中 i 是包含映射,由性质2的条件1)知 K 是投射模,则存在同态 $h:K\to A$,使 $g=\pi h$。又因 A 是 (m,n)-内射模,则存在同态 $h':R^m\to A$,使 $h=h'i$,设 $h''=\pi h'$,则有 $h''i=(\pi h')i=\pi h=g$,故 B 是 (m,n)-内射模。

2)⇒3),显然成立。

3)⇒1),设 K 是 R^m 的任给的 n-生成右 R-子模,应用文献[9]中的性质5.1,只需考虑图2,其中 A 是内射模,且行正合,i 是包含映射。需证明存在同态 $h:K\to A$ 使 $g=\pi h$。因 B 是 (m,n)-内射模,则存在 $h':R^m\to B$ 使 $g=h'i$。又因 R^m 是投射模,则存在同态 $h'':R^m\to A$ 使 $h'=\pi h''$,设 $h=h''i$,则有 $\pi h=\pi(h''i)=(\pi h'')i=h'i=g$,得证。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i"] & R^m \end{tikzcd}$$

图1

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] & B \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i"] & R^m \end{tikzcd}$$

图2

3)⇒4),设 M 是任给的右 R-模,记 $F=\sum\{N\leqslant M:N\in F\text{-}(m,n)\text{-}inj\}$,$G=\bigoplus\{N\leqslant M: N\in F\text{-}(m,n)\text{-}inj\}$。则有下列正合列 $0\to K\to G\to F\to 0$,因 $G\in F$-(m,n)-inj,由性质2的条件2)知 $F\in F$-(m,n)-inj。

紧接着证明包含映射 $i:F\to M$ 是 M 的一个 F-(m,n)-inj 覆盖。设任给的同态 $\varphi:F'\to M$,其中 $F'\in F$-(m,n)-inj,由性质2的条件2)知,$\varphi(F')\leqslant F$ 且 $\varphi(F')\in F$-(m,n)-inj。定义同态 $\zeta:F'\to F$,对 $\forall x\in F'$,有 $\zeta(x)=\varphi(x)$,则有 $i\zeta=g$。因此 $i:F\to M$ 是 M 的一个 F-(m,n)-inj 覆盖。显然 F 的恒等映射 I_F 是使得 $ig=g$ 的仅有的同态 $g:F\to F$。

4)⇒3),设 E 是任给的内射右 R-模,对任给的满同态 $\pi:E\to L$,有正合列 $0\to N\to E\to L\to 0$。由性质2的条件4)知 L 有一单 F-(m,n)-inj 覆盖 $\varphi:F\to L$,则存在同态 $\alpha:E\to F$ 使 $\pi=\varphi\alpha$,因此 φ 是满同态,故 φ 是同构的。因此 L 是 (m,n)-内射模。

3)⇒5),设 M 是任给的 (m,n)-投射模,N 是任给的右 R-模,有正合列 $0\to N\to E\to L\to 0$,其中 E 内射。由性质2的条件3)知,L 是 (m,n)-内射模,则有导出正合列 $0=Ext^1(M,L)\to Ext^2(M,N)\to Ext^2(M,E)=0$,故 $Ext^2(M,N)=0$,即 $pd(M)\leqslant 1$。

5)⇒6),显然成立。

6)⇒1),设 K 是 R^m 的任给的 n-生成右 R-子模,有正合列 $0\to K\to R^m\to R^m/K\to 0$。

设 N 是任给的右 R-模,有导出正合列 $0=Ext^1(R^m,N)\to Ext^1(K,N)\to Ext^2(R^m/K,N)=0$,故 $Ext^1(K,N)=0$,即 K 是投射模。

3)⇒7),由性质2的条件3)和4)可推出条件7)。

7)⇒3),类似4)⇒3)的证明过程可得。 证毕

参考文献：

[1] D E Dobbs.On n-flat modules over a Commutative ring[J]. Bull Austral Math Soc,1991,43(2):491-498.

[2] Chen J L,Ding N Q. On (m,n)-injectivity of modules[J]. Comm Algebra,2001,29(12):5589-5603.

[3] Zhu Z M,Xia Z S. Rings which have (m,n)-flat injective modules[J].Algebra and Discrete Mathematics,2005,2(4):93-100.

[4] Enochs E E,Jenda O M G. Relative homological algebra [M]. Berlin/NewYork:Water de Gruyter,2000.

[5] Rozas J R G. Cover and envelopes in the category of complexes of modules[M]. CRC Roca Raton FL:Chapman Hall,1999.

[6] Gobel R,Trlifaj J. Approximations and endomorphism algebra of modules[M]. Berlin/NewYork:Walter de Gruyter,2006.

[7] Geng Y X. f-projective and f-injective modules[J]. Journal of Mathematical Research Exposition Feb,2008,28(1):74-80.

[8] Eklof P C,Trlifaj J. How to make ext vanish[J]. Bull London Math Soc,2001,33(1):41-51.

[9] Cartan H,Eilenberg S. Homological algebra[M]. Princeton:Princeton Univ Press,1956.

(m,n)-projective Modules and (m,n)-injective Modules

JIAN Hong, SUN Chuntao

(Institute of Applied Mathematics, Chongqing University of Post and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: Let R be a ring. For two fixed positive integers m and n, a right R-module N is called (m,n)-injective module if $Ext_R^1(R^m/K,N)=0$ for any n-generated submodule K of the R^m. A right R-module M is called (m,n)-projective modules if $Ext_R^1(M,N)=0$ for any (m, n)-injective right R-module N. In case $m=1$, n any positive integer. (m,n)-projective module is f-projective module. Any (m,n)-finitely presinted module is (m,n)-projective module. F-(m,n)-$proj$ is the class of all the (m,n)-projective modules and F-(m,n)-inj stands for the class of all (m, n)-injective modules . In this paper, We get the Characterizations of (m,n)-projective modules. We prove $(F$-(m,n)-$proj$, F-(m,n)-$inj)$ is a cotorsion pair. Any module has an special (m,n)-injective preenvelope and special (m,n)-projective precover. provide the relational characterizations about (m, n)-projective modules and (m, n)-injective modules.

Key words: (m,n)-injective modules; (m,n)-projective modules; envelope; cover; cotorsion of theory

（责任编辑 黄 颖）