运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140501

无约束全局优化问题的两种新的辅助函数法*

吴至友，傅欣欣
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:填充函数法、打洞函数法和平稳点函数法是目前比较常用的求解全局优化问题的辅助函数法。本文提出两种新的辅助函数法,用于求解一般非线性规划问题的全局最优解,它不仅结合了填充函数法和打洞函数法及其平稳点函数法的特点,同时又避免了它们的一些缺点(每次求解填充函数、打洞函数和平稳点函数的局部极小点以后,还需要重新求解原问题的局部极小点),而新的辅助函数的局部极小点就是原问题的局部极小点,不需要再求原问题的局部极小点。

关键词:全局优化问题;局部极小点;全局极小点;辅助函数
中图分类号:O224 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)05-0001-07

考虑如下问题[1]

$$\min f(x),$$
$$\text{s.t. } x\in X。$$

其中 $X\in \mathbf{R}^n$ 为有界闭箱子集,且 $f(x)$在 X 上连续可微。

打洞函数最早是由 Levy 和 Montalvo 于 1985 年在文献[2]中提出的,该方法要求 $f(x)$在 X 上二次连续可微的,并且假设函数 $f(x)$只有有限个孤立的极小点。打洞函数算法由以下两个阶段构成:局部极小化阶段和打洞阶段。在打洞阶段,Levy 和 Montalvo 以已经求得的局部极小点 x_1^* 为基础,构造了如下形式的打洞函数 $T(x,x_1^*)=\dfrac{f(x)-f(x_1^*)}{[(x-x_1^*)^{\mathrm{T}}(x-x_1^*)]^{\alpha}}$。

在此之后,有许多的学者对打洞函数法进行了改进。例如,为了避免 $T(x,x_1^*)=0$,Yao 在文献[3]中提出了动态打洞函数法,定义能量函数 $E(x,x_1^*)=T(x,x_1^*)+K\int_0^{\hat{f}(x)}zu(z)\mathrm{d}z$。

后来,葛仁溥在文献[4]中提出了另一类求解一般非线性规划问题的全局最优解的辅助函数法:填充函数法。文献[4]中给出的填充函数为 $P(x)=\dfrac{1}{\gamma+f(x)}\exp\left(-\dfrac{\|x-x_1^*\|^2}{\rho^2}\right)$,其中 γ,ρ 为参数,且 $\gamma+f(x_1^*)>0$。填充函数的基本思想是:通过极小化函数 $P(x)$跳出当前的局部极小点,因而找到一个目标函数值比当前函数值更小的点,循环运算直至找到全局极小点。然而,函数 $P(x)$含有两个参数,并且相互之间具有一定的依赖性,所以对参数的选取比较困难。同时受到指数项的影响,当 $\|x-x_1^*\|^2$ 较大,ρ^2 很小时,它会使填充函数 $P(x)$接近于 0,从而找到假的平稳点,因此丢失目标函数的全局最优解。

后来很多学者对其做了改进工作[5-8]。在此之中,较为有代表性的是 Wu Z. Y. 等在文献[5]中提出的一种新的填充函数和拟填充函数。但是应该注意到,文献[5]中的辅助函数不能保证填充函数和拟填充函数的局部极小点是原问题的局部极小点,所以每次求解填充函数或拟填充函数的局部极小点以后,还需要重新求解原问题的局部极小点。Wu Z. Y. 等在文献[6]中提出的平稳点函数和拟平稳点函数无论是在理论性质还是数值试验结果上,较之前的辅助函数都有非常突出的优越性,是一种性能很好的用于求解全局优化问题的新的辅助函数。然而,文献[6]中的辅助函数也存在同文献[5]中提出的填充函数和拟填充函数类似的缺点,即不能保证平稳点

* **收稿日期**:2014-05-28 **网络出版时间**:2014-9-17 22:37
资助项目:重庆市自然科学基金(No. CSTC2013jjB00001;No. CSTC2011jjA00010)
作者简介:吴至友,女,教授,博士,研究方向为最优化理论与方法,E-mail:zhiyouwu@263.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140917.2237.001.html

函数或拟平稳点函数的局部极小点是原问题的局部极小点，所以每次求解平稳点函数或拟平稳点函数的局部极小点以后，还需要重新求解原问题的局部极小点。所以针对这些缺点，本文提出了两种新的辅助函数，改进了上述缺点。

1 新的改进填充函数法

1.1 新的改进填充函数及其性质

本文考虑如下问题(P)

$$\begin{aligned}&\min f(x),\\&\text{s.t. } x\in\mathbf{R}^n。\end{aligned}\tag{1}$$

其中，f 在 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 上连续可微。

假设1 $f(x)$满足强制性条件：当 $\|x\|\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$。

假设2 问题(P)的局部极小值的个数为有限个。

由假设1可知 $\exists x_0\in\mathbf{R}^n$ 且存在一个紧集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$，使得对 $\forall x\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega$，有 $f(x)>f(x_0)$，所以 $f(x)$的所有全局极小点一定包含在 Ω 的内部。因此，(1)式等价于求问题(P′)

$$\begin{aligned}&\min f(x),\\&\text{s.t. } x\in\Omega。\end{aligned}\tag{2}$$

其中，f 在 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 上连续可微。

本文假设 x^* 为当前原问题(P)的局部极小点，$L(P)$表示问题(2)的所有局部极小点的集合，$G(P)$表示问题(P)的所有全局极小点的集合。

定义1 函数 $T(x,x^*,r)$称为无约束全局优化问题(P)的改进填充函数，如果 $T(x,x^*,r)$满足如下条件：

1) 对任意的 $x\in X$，$T(x,x^*,r)=0\Leftrightarrow f(x)-f(x^*)+r=0$；

2) 设 x^* 是 $f(x)$的一个局部极小点，则对任意的 $r>0$，x^* 一定是 $T(x,x^*,r)$的一个严格局部极大点；

3) 对任意的 $x\in S_1=\{x\,|\,f(x)\geqslant f(x^*),x\neq x^*\}$，则$\nabla T(x,x^*,r)\neq 0$；

4) 对任意的 $x\in S_2=\{x\,|\,f(x)<f(x^*),x\in\Omega\}$，函数 $T(x,x^*,r)$与目标函数 $f(x)$的单调性在 S_2 中能保持一致，并能取得相同的极小点；

5) 对任意的 $x_1,x_2\in\Omega$，若 $f(x_1)\geqslant f(x^*)$，$f(x_2)\geqslant f(x^*)$，则 $\|x_2-x^*\|>\|x_1-x^*\|$ 当且仅当 $T(x_2,x^*,r)<T(x_1,x^*,r)$。

下面给出一种改进的填充函数

$$T(x,x^*,r)=\frac{1}{1+\|x-x^*\|^2}\varphi_r(f(x)-f(x^*)+r)+r\,[\min(0,f(x)-f(x^*)+r)]^2\cdot(f(x)-f(x^*)+r)。\tag{3}$$

其中 $r>0$，$\varphi_r(t)$具有如下的形式：$\varphi_r(t)=\begin{cases}0,t\leqslant 0\\-\dfrac{3+r}{r^3}t^3+\dfrac{4+r}{r^2}t^2,0\leqslant t\leqslant r\\1,t\geqslant r\end{cases}$。很容易验证 $\varphi_r(t)\geqslant 0$，且在 $[0,+\infty]$上是连续可微的。

下面的定理表明，当参数 r 满足某些条件时，本文构造的辅助函数 $T(x,x^*,r)$满足定义1给出的改进填充函数的定义。

定理1 对任意的 $x\in X$，$T(x,x^*,r)=0\Leftrightarrow f(x)-f(x^*)+r=0$。

证明 必要性($\Rightarrow$)。

$$T(x,x^*,r)=\left(\frac{1}{1+\|x-x^*\|^2}\right)\varphi_r(f(x)-f(x^*)+r)+r\,[\min(0,f(x)-f(x^*)+r)]^2\cdot(f(x)-f(x^*)+r),$$

则一定有如下结果：$T(x,x^*,r)=0\Rightarrow f(x)-f(x^*)+r\geqslant 0$。

事实上，如果 $f(x)-f(x^*)+r<0$，则一定有 $T(x,x^*,r)<0$。所以，如果 $T(x,x^*,r)=0$，一定有 $f(x)-f(x^*)+r\geqslant 0$。由此可得 $T(x,x^*,r)=0\Rightarrow\varphi_r(f(x)-f(x^*)+r)=0$。再由 $f(x)-f(x^*)+r\geqslant 0$ 和函数 $\varphi_r(t)$

的定义可知 $f(x)-f(x^*)+r=0$。

充分性(⇐)。因为 $f(x)-f(x^*)+r=0$,所以 $\varphi_r(f(x)-f(x^*)+r)=0$,则 $T(x,x^*,r)=0$。　　证毕

定理 2　设 x^* 是 $f(x)$ 的一个局部极小点,则对任意的 $r>0$,x^* 一定是 $T(x,x^*,r)$ 的一个严格局部极大点。

证明　因为 $x^*\in L(P)$,$\exists\delta>0$ 对 $\forall x\in O(x^*,\delta)$,有 $f(x)\geqslant f(x^*)$,所以 $f(x)-f(x^*)+r\geqslant r>0$,$T(x,x^*,r)=\dfrac{1}{1+\|x-x^*\|^2}<1=T(x^*,x^*,r)$。故 $T(x^*,x^*,r)>T(x,x^*,r)$,即 x^* 是 $T(x,x^*,r)$ 的一个严格局部极大点。　　证毕

定理 3　对任意的 $x\in S_1=\{x\,|\,f(x)\geqslant f(x^*),x\neq x^*\}$,则 $\nabla T(x,x^*,r)\neq 0$。

证明　由(3)式知

$$\nabla T(x,x^*,r)=-\frac{2(x-x^*)}{(1+\|x-x^*\|^2)^2}\varphi_r(f(x)-f(x^*)+r)+\frac{1}{1+\|x-x^*\|^2}\varphi'_r(f(x)-f(x^*)+r)\nabla f(x)。$$

如果有 $f(x)\geqslant f(x^*)$,则有 $\nabla T(x,x^*,r)=-\dfrac{2(x-x^*)}{(1+\|x-x^*\|^2)^2}\neq 0$。　　证毕

定理 4　对任意的 $x\in S_2=\{x\,|\,f(x)<f(x^*),x\in\Omega\}$,函数 $T(x,x^*,r)$ 与目标函数 $f(x)$ 的单调性在 S_2 中能保持一致,并能取得相同的局部极小点。

证明　当 $f(x)<f(x^*)$ 时,取 $r>0$,使得 $f(x)-f(x^*)+r<-r<0$,则有 $T(x,x^*,r)=r[f(x)-f(x^*)+r]^3$。这时 $\nabla T(x,x^*,r)=3r\cdot[f(x)-f(x^*)+r]^2\,\nabla f(x)$,因为 $f(x)-f(x^*)+r<0$,所以 $\nabla T(x,x^*,r)$ 与 $\nabla f(x)$ 同号,从而 $T(x,x^*,r)$ 和 $f(x)$ 的单调性保持一致。

设 $x_i^*\in S_2$ 是 $f(x)$ 的局部极小点,则 $\nabla f(x_i^*)=0$。由

$$\nabla^2 T(x_i^*,x^*,r)=6r\,[f(x_i^*)-f(x^*)+r]\cdot\nabla f(x_i^*)\cdot\nabla^{\mathrm{T}} f(x_i^*)+3r\,[f(x_i^*)-f(x^*)+r]^2\cdot\nabla^2 f(x_i^*)$$

可知,$\nabla^2 T(x_i^*,x^*,r)$ 与 $\nabla^2 f(x_i^*)$ 的正定性保持一致,因此 $f(x)$ 的局部极小点也是 $T(x,x^*,r)$ 的局部极小点。

证毕

值得注意的是:1) 从定理 4 可以看出,如果当前局部极小点 x^* 不是全局极小点,则函数 $T(x,x^*,r)$ 一定在 S_2 中存在一个局部极小点。事实上,因为 x^* 不是原问题的全局极小点,则原问题的全局极小点一定属于 S_2,且该全局极小点当然是原问题的局部极小点,所以也一定是函数 $T(x,x^*,r)$ 的局部极小点;2) 设 $\bar{x}$ 是 $T(x,x^*,r)$ 从 x_0 出发的任一局部极小点,则 $\bar{x}$ 一定是满足下列条件之一的点:i) $\bar{x}\in\Omega$ 且 $f(\bar{x})<f(x^*)$;ii) $\bar{x}\in\partial\Omega$。

定理 5　对任意的 $x_1,x_2\in\Omega$,$f(x_2)\geqslant f(x^*)$,则 $\|x_2-x^*\|>\|x_1-x^*\|$ 当且仅当 $T(x_2,x^*,r)<T(x_1,x^*,r)$。

证明　因为对任意的 $x_1,x_2\in\Omega$,若 $f(x_1)\geqslant f(x^*)$,$f(x_2)\geqslant f(x^*)$,则

$$T(x_2,x^*,r)=\frac{1}{1+\|x_2-x^*\|^2},T(x_1,x^*,r)=\frac{1}{1+\|x_1-x^*\|^2}。$$

所以,$\|x_2-x^*\|>\|x_1-x^*\|$ 当且仅当 $T(x_2,x^*,r)<T(x_1,x^*,r)$。　　证毕

定理 5 保证了辅助函数在极小化搜索过程中,不会再回到原来极小点所在的盆谷中。

由以上的定理及定义 1 可以得到,当参数 $r>0$ 且满足一定条件时,函数 $T(x,x^*,r)$ 是点 x^* 处的新的改进填充函数。

1.2 新的改进填充函数法和数值试验结果

步 0,选取初始点 $x_1^0\in\mathrm{int}\,\Omega$;选取一个充分小的正数 $\mu>0$ 作为 δ 和 r 的终止参数,e_i 为方向,$i=1,2,\cdots,k_0$,$k_0\geqslant 2n$,n 是变量个数,令 $k:=1,i:=1$;

步 1,以 $x_k^0\in\mathrm{int}\,\Omega$ 为初始点,利用已有的局部极小化算法极小化目标函数 $f(x)$,求得 $f(x)$ 的一个局部极小点 x_k^* 和极小值 $f(x_k^*)$,选取一个正数 $\delta_0>0$,令 $\delta:=\delta_0$;

步 2,在已取得的极小点 x_k^* 处构造辅助函数

$$T(x,x_k^*,r)=\frac{1}{1+\|x-x_k^*\|^2}\varphi_r(f(x)-f(x_k^*)+r)+r\,[\min(0,f(x)-f(x_k^*)+r)]^2\cdot(f(x)-f(x_k^*)+r);$$

步 3,令 $\bar{x}_k^*=x_k^*+\delta e_i$,若 $\bar{x}_k^*\in\mathrm{int}\,\Omega$,则以 $\bar{x}_k^*$ 为初始点极小化辅助函数 $T(x,x_k^*,r)$,求得辅助函数的局部极小点 x_{k+1}^*,转步 6;否则,转步 4;

步4,若 $\delta>\mu$,则减少 δ,令 $\delta:=\frac{\delta}{2}$,转步3;否则,令 $\delta:=\delta_0$,转步5;

步5,如果 $r>\mu$,则减小 r,令 $r:=\frac{r}{10}$,转步2;否则转步6;

步6,若 $i<k_0$,则令 $i:=i+1$,转步3;否则计算终止,视 x_k^* 为 $f(x)$ 的全局极小点;

步7,若 $f(x_{k+1}^*)<f(x_k^*)$,令 $x_k^*=x_{k+1}^*$,$k:=k+1$,转步2;否则转步5。

下面通过几个算例来验证其算法的有效性,算例均是在同一计算机用 Matlab 7.01 编程进行运算。

算例1 2-dimensional 函数[9]

$$\min f(x)=[1-2x_2+c\sin(4\pi x_2)-x_1]^2+[x_2-0.5\sin(2\pi x_1)]^2,$$
$$\text{s.t. } 0\leqslant x_1\leqslant 10,\ -10\leqslant x_2\leqslant 0。$$

这里 $c=0.2,0.5,0.05$,对于不同的 c 有不同的局部极小点,但是全局极小点都是 $x^*=(0,0)^{\mathrm{T}}$,$f(x^*)=0$,计算时取 $c=0.2$,$r=1$。

表1 算例1的数值结果

Tab.1 Results for Example 1

k	x_k^0	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	(1.000 000,−1.000 000)	(0.677 912,−0.137 515)	0.110 700
2	(0.813 100,−0.162 901)	(0.935 102,−0.182 410)	0.000 000
1	(3.000 000,3.000 000)	(0.973 445,−0.347 295)	1.024 450
2	(−1.245 897,1.184 233)	(0.135 859,0.297 610)	0.398 723
3	(−0.982 354,0.235 535)	(0.035 832,0.023 589)	0.000 000

算例2 Six-Hump Camle Back 函数[10]

$$\min f(x)=4x_1^2-2.1x_1^4+\frac{1}{3}x_1^6-x_1x_2-4x_2^2+4x_2^4,$$
$$\text{s.t. } -3\leqslant x_1\leqslant 3,\ -3\leqslant x_2\leqslant 3。$$

算例2在可行域里有若干个局部极小点,有一个全局极小点 $x^*=(0.089\ 834,0.712\ 72)$,全局极小值为 $f(x^*)=-1.031\ 628$。

表2 算例2的数值结果

Tab.2 Results for Example 2

k	x_k^0	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	(−2.000 000,−1.000 000)	(−1.928 137,−0.805 719)	0.510 724
2	(−0.671 485,−0.992 560)	(−0.679 810,−0.798 361)	−6.921 461E−02
3	(−0.376 902,−0.549 801)	(9.451 890E−02,0.712 013)	−1.031 623
1	(1.000 000,2.000 000)	(1.102 359,0.772 408)	0.523 732
2	(0.880 823 0,0.715 401)	(0.089 823,0.712 078)	−1.031 628

2 新的改进平稳点函数法

2.1 新的改进平稳点函数及其性质

定义2 函数 $\hat{T}(x,x^*,r)$ 称为无约束全局优化问题(P)的改进平稳点函数,如果 $\hat{T}(x,x^*,r)$ 满足如下条件:

1) 对任意的 $x\in X$,$\hat{T}(x,x^*,r)=0\Leftrightarrow f(x)-f(x^*)+r=0$;

2) 对任意的 $x\in S_1=\{x\,|\,f(x)\geqslant f(x^*)\}$,则 $\|\nabla\hat{T}(x,x^*,r)\|\neq 0$;

3) 对任意的 $x\in S_2=\{x\,|\,f(x)<f(x^*),x\in\Omega\}$,函数 $\hat{T}(x,x^*,r)$ 与目标函数 $f(x)$ 的单调性在 S_2 中能保持

一致，并能取得相同的局部极小点；

4）对任意的 $x_1, x_2 \in \Omega$，若 $f(x_1) \geqslant f(x^*)$，$f(x_2) \geqslant f(x^*)$，则 $\| x_2 - x_0 \| > \| x_1 - x_0 \|$ 当且仅当 $\hat{T}(x_2, x^*, r) < \hat{T}(x_1, x^*, r)$。

下面给出如下形式的一种改进的平稳点函数：

$$\hat{T}(x, x^*, r) = \frac{1}{1+\| x - x_0 \|^2} \varphi_r(f(x) - f(x^*) + r) + r\,[\min(0, f(x) - f(x^*) + r)]^2 \cdot (f(x) - f(x^*) + r)。\quad (4)$$

其中，对任意的 $r > 0$，$\varphi_r(t)$ 具有如下的形式：$\varphi_r(t) = \begin{cases} 0, t \leqslant 0 \\ -\dfrac{3+r}{r^3} t^3 + \dfrac{4+r}{r^2} t^2, 0 \leqslant t \leqslant r, \varphi_r(t) \geqslant 0 \\ 1, t \geqslant r \end{cases}$，且在 $[0, r]$ 上是连续可微的。选取 $x_0 \in \mathbf{R}^n \backslash \Omega$，其中 $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid c_i \leqslant x_i \leqslant d_i, i = 1, 2, \cdots, n\} \subset \mathbf{R}^n$，$d = (d_1, \cdots, d_n)$ 是箱子集中离 x_0 最远的顶点。

注意到 x^* 不是函数 $\hat{T}(x, x^*, r)$ 的平稳点。因为事实上

$$\nabla \hat{T}(x, x^*, r) = -\frac{2(x - x_0)}{(1+\| x - x_0 \|^2)^2} \varphi_r(f(x) - f(x^*) + r) + \frac{1}{1+\| x - x_0 \|^2} \varphi'r(f(x) - f(x^*) + r) \nabla f(x),$$

所以 $\nabla \hat{T}(x^*, x^*, r) = -\dfrac{2(x^* - x_0)}{(1+\| x^* - x_0 \|^2)^2} \neq 0$，故 x^* 不是函数 $\hat{T}(x, x^*, r)$ 的平稳点。本文定义 $D = \dfrac{1}{(1+\| d - x_0 \|^2)^2}$，下面讨论这种新的平稳点函数的一些性质。

定理 6　对任意的 $x \in X$，$\hat{T}(x, x^*, r) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x^*) + r = 0$。

证明　必要性（$\Rightarrow$）。由

$$\hat{T}(x, x^*, r) = \left(\frac{1}{1+\| x - x_0 \|^2}\right) \varphi_r(f(x) - f(x^*) + r) + r\,[\min(0, f(x) - f(x^*) + r)]^2 \cdot (f(x) - f(x^*) + r),$$

则一定有如下结果：$\hat{T}(x, x^*, r) = 0 \Rightarrow f(x) - f(x^*) + r \geqslant 0$。事实上，如果 $f(x) - f(x^*) + r < 0$，则一定有 $\hat{T}(x, x^*, r) < 0$，所以，如果 $\hat{T}(x, x^*, r) = 0$，一定有 $f(x) - f(x^*) + r \geqslant 0$。由此可得

$$\hat{T}(x, x^*, r) = 0 \Rightarrow \varphi_r(f(x) - f(x^*) + r) = 0。$$

再由 $f(x) - f(x^*) + r \geqslant 0$ 和函数 $\varphi_r(t)$ 的定义可知 $f(x) - f(x^*) + r = 0$。

充分性（$\Leftarrow$）。因为 $f(x) - f(x^*) + r = 0$，所以 $\varphi_r(f(x) - f(x^*) + r) = 0$，则 $\hat{T}(x, x^*, r) = 0$。

定理 7　对任意的 $x \in S_1 = \{x \mid f(x) \geqslant f(x^*)\}$，则 $\| \nabla \hat{T}(x, x^*, r) \| \neq 0$。

证明　由（4）式知

$$\nabla \hat{T}(x, x^*, r) = -\frac{2(x - x_0)}{(1+\| x - x_0 \|^2)^2} \varphi_r(f(x) - f(x^*) + r) + \frac{1}{1+\| x - x_0 \|^2} \varphi'r(f(x) - f(x^*) + r) \nabla f(x)。$$

如果有 $f(x) \geqslant f(x^*)$，则有

$$\nabla \hat{T}(x, x^*, r) = -\frac{2(x - x_0)}{(1+\| x - x_0 \|^2)^2}, \| \nabla \hat{T}(x, x^*, r) \| = \frac{2 \| x - x^0 \|}{(1+\| x - x^0 \|^2)^2} > D \neq 0。$$

证毕

定理 8　对任意的 $x \in S_2 = \{x \mid f(x) < f(x^*), x \in \Omega\}$，函数 $\hat{T}(x, x^*, r)$ 与目标函数 $f(x)$ 的单调性在 S_2 中能保持一致，并能取得相同的局部极小点。

证明　当 $f(x) < f(x^*)$ 时，取 $r > 0$，使得

$$f(x) - f(x^*) + r < -r < 0, \hat{T}(x, x^*, r) = r\,[f(x) - f(x^*) + r]^3。$$

这时 $\nabla \hat{T}(x, x^*, r) = 3r \cdot [f(x) - f(x^*) + r]^2 \nabla f(x)$。因为 $f(x) < f(x^*)$，所以 $\nabla \hat{T}(x, x^*, r)$ 与 $\nabla f(x)$ 同号，从而 $\hat{T}(x, x^*, r)$ 和 $f(x)$ 的单调性保持一致。

设 $x_i^* \in S_2$ 是 $f(x)$ 的局部极小点，则 $\nabla f(x_i^*) = 0$。

由$\nabla^2 \hat{T}(x_i^*, x^*, r)=6r[f(x_i^*)-f(x^*)+r]\cdot\nabla f(x_i^*)\cdot\nabla^{\mathrm{T}} f(x_i^*)+3r[f(x_i^*)-f(x^*)+r]^2\cdot\nabla^2 f(x_i^*)$可知,$\nabla^2 \hat{T}(x_i^*, x^*, r)$与$\nabla^2 f(x_i^*)$的正定性保持一致,因此 $f(x)$ 的局部极小点也是 $\hat{T}(x, x^*, r)$的局部极小点。

证毕

值得注意的是:从定理 8 可以看出,如果当前局部极小点 x^* 不是全局极小点,则函数 $\hat{T}(x, x^*, r)$一定在 S_2 中存在一个局部极小点。事实上,因为 x^* 不是原问题的全局极小点,则全局极小点一定属于 S_2,该全局极小点当然是原问题的局部极小点,所以也一定是函数 $\hat{T}(x, x^*, r)$的局部极小点。

定理 9 对任意的 $x_1, x_2\in\Omega$,若 $f(x_1)\geqslant f(x^*)$, $f(x_2)\geqslant f(x^*)$,则 $\|x_2-x_0\|>\|x_1-x_0\|$ 当且仅当 $\hat{T}(x_2, x^*, r)<\hat{T}(x_1, x^*, r)$。

证明 因为对任意的 $x_1, x_2\in\Omega$,若 $f(x_1)\geqslant f(x^*)$, $f(x_2)\geqslant f(x^*)$,则

$$\hat{T}(x_2, x^*, r)=\frac{1}{1+\|x_2-x_0\|^2}, \hat{T}(x_1, x^*, r)=\frac{1}{1+\|x_1-x_0\|^2}。$$

所以,$\|x_2-x^0\|>\|x_1-x^0\|$ 当且仅当 $\hat{T}(x_2, x^*, r)<\hat{T}(x_1, x^*, r)$。 证毕

2.2 新的改进平稳点函数法和数值试验

步 0,选取初始点 $x_1^0\in\Omega$;选取一个点 $x_0\in\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 使得对任意的 $x\in\Omega$ 满足 $\|x-x_0\|\geqslant 1$;选取一个充分小的正数 μ 为参数 r 的终止参数;

步 1,以 $x_k^0\in\Omega$ 为初始点,利用已有的局部极小化算法极小化目标函数 $f(x)$,求得 $f(x)$的一个局部极小点 x_k^* 和极小值 $f(x_k^*)$,令 $k:=1$;

步 2,在已取得的极小点 x_k^* 处构造辅助函数

$$\hat{T}(x, x_k^*, r)=\frac{1}{1+\|x-x_0\|^2}\varphi_r(f(x)-f(x_k^*)+r)+r\ [\min(0, f(x)-f(x_k^*)+r)]^2\cdot(f(x)-f(x_k^*)+r);$$

步 3,令 x_k^* 为初始点极小化辅助函数 $\hat{T}(x, x^*, r)$,得到局部极小点 x_{k+1}^*;

步 4,若 $f(x_{k+1}^*)<f(x_k^*)$,令 $x_k^*=x_{k+1}^*$, $k:=k+1$,转步 2;否则,转步 5;

步 5,如果 $r>\mu$,则减小 r,令 $r:=\frac{r}{10}$,转步 2;否则,计算终止,视 x_k^* 为 $f(x)$的全局极小点。

下面通过几个算例来验证其算法的有效性,算例均是在同一计算机用 Matlab 7.01 编程进行运算。

算例 3 Treccani 函数[4]

$$\min\ f(x)=x_1^4+4x_1^3+4x_1^2+x_2^2,$$
$$\text{s.t.}\ -3\leqslant x_1\leqslant 3, -3\leqslant x_2\leqslant 3。$$

全局极小点 $x^*=(-2,0)$,全局极小值 $f(x^*)=0.000\,000$, $x_0=(2,2)$。

表 3 算例 3 的数值结果

Tab. 3 Results for Example 3

k	x_k^0	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	(2.800 000,−1.600 000)	(−2.252 698,−0.000 009)	0.353 000
2	(−2.130 210,0.310 040)	(−2.000 000,0.000 000)	0.000 000
1	(−1.000 000,−2.000 000)	(−1.000 000,0.000 000)	1.000 000
2	(−1.254 000,0.000 000)	(−2.000 000,0.000 000)	0.000 000

算例 4 Six-Hump Camle Back 函数[10]

$$\min\ f(x)=4x_1^2-2.1x_1^4+\frac{1}{3}x_1^6-x_1x_2-4x_2^2+4x_2^4,$$
$$\text{s.t.}\ -3\leqslant x_1\leqslant 3, -3\leqslant x_2\leqslant 3。$$

算例 4 在可行域里有若干个局部极小点,其中只有一个全局极小点,为 $x^*=(0.089\,834, 0.712\,723)$,全局极小值为 $f(x^*)=-1.031\,628$, $x_0=(3,3)$。

表 4 算例 4 的数值结果

Tab. 4 Results for Example 4

k	x_k^0	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	(0.000 000,0.000 000)	(0.000 000,0.000 000)	0.000 000
2	(−0.101 230,0.000 000)	(−0.089 843,−0.712 679)	−1.031 628
1	(1.000 000,2.000 000)	(1.201 295,0.951 380)	1.000 000
2	(0.754 412,0.774 989)	(0.089 721,0.712 051)	−1.031 619

参考文献:

[1] 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社,1997.
Yuan Y X, Sun W Y. Optimization theory and method[M]. Beijing: Science Press, 1997.

[2] Levy A V, Montalvo A. The tunneling algorithm for the global minimization of functions[J]. SIAM Sci Stat Comput, 1985, 6(1): 15-29.

[3] Yao Y. Dynamic tunneling algorithm for global optimization[J]. IEEE Tran-actions on Systems, Man and Cyberentics, 1989, 19(5): 1222-1230.

[4] Ge R P. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables[J]. Math, Program, 1990, 46: 191-204.

[5] Wu Z Y, Lee H W J, Zhang L S, et al. A novel filled function method and quasi-filled function method for global optimization[J]. Computational Optimization and Applications, 2005, 34: 249-272.

[6] Wu Z Y, Li D, Zhang L S. Global descent methods for unconstrained global optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2011, 50: 379-396.

[7] Wu Z Y, Zhang L S, Teo K L, et al. A new modified function method for global optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, 125: 181-203.

[8] Zhang L S, Ng C K, Li D, et al. A new filled function method for global optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2004, 28: 17-43.

[9] Zheng Q, Zhuang D. Integral global minimization: algorithm, implementations and numerical tests[J]. Journal of Global Optimization, 1995, 7: 421-454.

[10] Branin F H. Widely convergent methods for finding multiple solutions of simultaneous nonlinear equations[J]. Journal of Research Development, 1972, 16: 504-522.

Operations Research and Cybernetics

Two New Auxiliary Function Methods for Unconstrained Global Optimization Problems

WU Zhiyou, FU Xinxin

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Filled function method, tunneling function method, stationary-point function method are mainly auxiliary function methods for global optimization problems. In this paper, we propose two kinds of new auxiliary function method for general nonlinear programming problems. There new methods combine the properties of filled function method, tunneling function method and stationary-point function method, which avoid some own shortcomings.

Key words: global optimization problem; local minimum; global minimum; auxiliary function

(责任编辑 黄 颖)