运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140502

一类 I 型一致不变凸条件下的极大极小分式规划问题*

焦合华
(长江师范学院 数学与计算机学院，重庆 涪陵 408100)

摘要:为一个极大极小分式规划问题(P)提出了一类新的广义(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸函数的概念,并在此广义 I 型一致不变凸性条件下,获得了规划(P)的一些最优性充分条件。而且,建立了规划(P)一个新的对偶模型,并在前述条件下,证明了弱对偶、强对偶和严格逆对偶定理。本文所得结果推广和改进了文献的一些相应结果。

关键词:极大极小规划;分式规划;广义 I 型一致不变凸性;对偶性;最优性

中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2014)05-0008-05

函数的凸性在研究数学规划的最优性和对偶性等方面都起着非常重要的作用。许多研究者都致力于弱化凸性的条件以扩大其应用范围,并取得了丰硕的成果。而极大极小分式规划是数学规划的一种重要类型,它在多目标规划,工程设计等方面都有重要应用,本文研究广义极大极小分式规划问题(P)$\begin{cases}\min\limits_{x\in S}\sup\limits_{y\in Y}\dfrac{f(x,y)}{h(x,y)}\\ \text{s.t. } g(x)\leqslant 0\end{cases}$。其中,$S=\{x\in X: g(x)\leqslant 0\}$为问题(P)的可行集,$X\subseteq\mathbf{R}^n$ 开,$Y\subseteq\mathbf{R}^l$ 紧,设 $f,h:X\times Y\to\mathbf{R}$ 和 $g:X\to\mathbf{R}^m$ 关于 x 的一阶偏导数均连续,并且对 $\forall(x,y)\in S\times Y$,$f(x,y)\geqslant 0$,$h(x,y)>0$。

Yadav 和 Mukherjee[1]为这种凸可微的极大极小分式规划构建了两个对偶模型,并得到了它们的一些对偶结果。后来,Chandra 和 Kumar[2]改进了文献[1]中的两个对偶模型,证明了凸可微极大极小分式规划的对偶定理。接着,Liu 等[3]又松驰了文献[2]的凸性条件,并在伪凸和拟凸条件下获得了一些对偶结果。Liu 和 Wu[4-5]分别在不变凸和(F,ρ)-凸条件下,讨论了极大极小分式规划的最优性充分条件和对偶定理。Yang 和 Hou[6]通过弱化文献[5,7-8]的凸性条件以及统一[4-5]的对偶模型,也建立了极大极小分式规划的最优性充分条件和对偶定理。

Yuan 等[9]引入了一类(C,α,ρ,d)-凸函数,并在此广义凸性条件下,获得了不可微极大极小分式规划的最优性充分条件。最近,Long 和 Quan[10]通过弱化一致不变凸性条件,得到了一类非光滑极大极小分式规划的最优性条件和对偶结果。而 Jayswal 等[11]提出了一类新的广义(F,α,ρ,θ)-d-V 一致不变凸函数,并在此广义一致不变凸性条件下,建立了一类非光滑多目标规划问题的几个最优性充分条件和 Mond-Weir 型对偶结果。

本文受以上工作的启发,利用(F,α,ρ,θ)-d-V 一致不变凸函数,提出了伪拟和严格伪拟(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸的概念,并在此较弱凸性条件下获得了极大极小分式规划问题(P)的一些最优性充分条件。而且,建立了规划(P)的一个新的对偶模型,并在此广义 I 型一致不变凸性条件下,证明了其弱对偶、强对偶和严格逆对偶定理。

1 预备知识

本文令 $M=\{1,2,\cdots,m\}$,对 $\forall x\in S$,$J(x)=\{j\in M: g_j(x)=0\}$,$Y(x)=\left\{y\in Y:\dfrac{f(x,y)}{h(x,y)}=\sup\limits_{z\in Y}\dfrac{f(x,z)}{h(x,z)}\right\}$,

$K(x)=\{(s,t,u)\in N\times\mathbf{R}_+^s\times\mathbf{R}^{ls}: 1\leqslant s\leqslant n+1, t=(t_1,t_2,\cdots,t_s)\in\mathbf{R}_+^s,\ \sum\limits_{i=1}^{s}t_i=1, u=(y_1,y_2,\cdots,y_s), y_i\in Y(x)$,

* **收稿日期**:2013-09-15　　**修回日期**:2013-10-19　　**网络出版时间**:2014-9-17 22:37

资助项目:国家自然科学基金(No. 61373174);重庆市教委科学研究项目(No. KJ131314);长江师范学院重点项目(No. 2013XJZD006)

作者简介:焦合华,男,教授,博士,重庆师范大学校友,研究方向为最优化理论及其应用,E-mail:jiaohh361@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140917.2237.002.html

$i=1,2,\cdots,s\}$ 。

定义 1[12]　称函数 $F:X\times X\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 关于第三变元是次线性的，如果对 $\forall x,\bar{x}\in X$，有

1) $F(x,\bar{x};\beta_1+\beta_2)\leqslant F(x,\bar{x};\beta_1)+F(x,\bar{x};\beta_2)$，$\forall\beta_1,\beta_2\in\mathbf{R}^n$；

2) $F(x,\bar{x};k\beta)=kF(x,\bar{x};\beta)$，$\forall k\in\mathbf{R}_+,\beta\in\mathbf{R}^n$。

注 1　由条件 2)可知 $F(x,\bar{x};0)=0$，再由条件 1)可得 $-F(x,\bar{x};-\beta)\leqslant F(x,\bar{x};\beta)$，$\forall\beta\in\mathbf{R}^n$。

设 $\alpha=(\alpha^0,\alpha^1):X\times X\to\mathbf{R}_+\setminus\{0\}$，$\rho=(\rho^0,\rho^1)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，$b_0,b_1:X\times X\to\mathbf{R}_+$，$\varphi_0,\varphi_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$d:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$(满足 $d(0)=0$)，$\theta:X\times X\to\mathbf{R}_+$(满足 $\theta(x,\bar{x})=0\Leftrightarrow x=\bar{x}$)，并设 $\pi,\omega:X\to\mathbf{R}$ 在 $\bar{x}\in X$ 处都是可微的。

定义 2[11]　函数 π 称为 $\bar{x}\in X$ 处是(F,α,ρ,θ)-d-V 一致不变凸的，若存在 $d,\theta,b_0,\varphi_0,\alpha^0,\rho^0$ 和函数 F，使得对 $\forall x\in S$，$b_0(x,\bar{x})\varphi_0[\varphi(x)-\varphi(\bar{x})]\geqslant F(x,\bar{x};\alpha^0(x,\bar{x})\nabla\pi(\bar{x}))+\rho^0d^2(\theta(x,\bar{x}))$。

下面引入伪拟和严格伪拟(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸函数的概念。

定义 3　(π,ω)称为 $\bar{x}\in X$ 处是(严格)伪拟(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸的，若存在 $d,\theta,b_P,\varphi_P,\alpha^P,\rho^P$ $(P=0,1)$和函数 F，使得对 $\forall x\in S(x\neq\bar{x})$，有

$$F(x,\bar{x};\alpha^0(x,\bar{x})\nabla\pi(\bar{x}))+\rho^0d^2(\theta(x,\bar{x}))\geqslant 0\Rightarrow b_0(x,\bar{x})\varphi_0[\pi(x)-\pi(\bar{x})](>)\geqslant 0,$$
$$-b_1(x,\bar{x})\varphi_1[\omega(\bar{x})]\leqslant 0\Rightarrow F(x,\bar{x};\alpha^1(x,\bar{x})\nabla\omega(\bar{x}))+\rho^1d^2(\theta(x,\bar{x}))\leqslant 0。$$

注 2　在文献[13]的定义 2 中，若$\nabla^2\pi(\bar{x})=\nabla^2\omega(\bar{x})=0$，则退化为本定义。

定理 1[2]　(必要条件)设 $\bar{x}$ 是规划(P)的一个最优解(局部或全局)，并且$\nabla g_j(\bar{x})$，$j\in J(\bar{x})$线性独立，则存在$(\bar{s},\bar{t},\bar{u})\in K(\bar{x})$，$\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+$ 和 $\bar{\mu}\in\mathbf{R}_m^+$ 使得

$$\nabla\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))+\nabla\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_jg_j(\bar{x})=0,\quad(1)$$

$$f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i)=0,i=1,2,\cdots,\bar{s},\quad(2)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_jg_j(\bar{x})=0,\quad(3)$$

$$\bar{t}_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i=1,\bar{y}_i\in Y(\bar{x}),i=1,2,\cdots,\bar{s}。\quad(4)$$

2 充分性

本节建立规划(P)的最优性充分性条件。

定理 2　设$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{s},\bar{t},\bar{u})$满足(1)～(4)式，并且存在 $F,d,\theta,\varphi_p,b_p,\alpha^p,\rho^p(p=0,1)$使得

1) $\left[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\cdot,\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\cdot,\bar{y}_i)),\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_jg_j(\cdot)\right]$ 在 $\bar{x}$ 处是伪拟(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸的；

2) $\varphi_0(a)\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 0$；$a\geqslant 0\Rightarrow\varphi_1(a)\geqslant 0$；$b_0(x,\bar{x})>0$；$b_1(x,\bar{x})\geqslant 0$；

3) $\alpha^0(x,\bar{x})=\alpha^1(x,\bar{x})$；$\rho^0\geqslant-\rho^1$；

则 $\bar{x}$ 是规划(P)的一个最优解。

证明　假设 $\bar{x}$ 不是规划(P)的最优解，则存在规划(P)的一个可行解 x，使得 $\bar{\lambda}=\dfrac{f(\bar{x},\bar{y}_i)}{h(\bar{x},\bar{y}_i)}>\sup\limits_{y\in Y}\dfrac{f(x,y)}{h(x,y)}$，$i=1,2,\cdots,\bar{s}$，所以 $f(x,y)-\bar{\lambda}h(x,y)<0$，$\forall y\in Y$，利用(2)、(4)式可得

$$\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(x,\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(x,\bar{y}_i))<\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))。\quad(5)$$

再由(3)式和条件 2)可得 $-b_1(x,\bar{x})\varphi_1\left[\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_jg_j(\bar{x})\right]\leqslant 0$。用条件 1)的第 2 部分可推得

$$F(x,\bar{x};\alpha^1(x,\bar{x})\nabla\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_jg_j(\bar{x}))+\rho^1d^2(\theta(x,\bar{x}))\leqslant 0。$$

利用(1)式，函数 F 的次线性和条件 3)有

$$F(x,\bar{x};\alpha^0(x,\bar{x})\nabla\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i)))+\rho^0d^2(\theta(x,\bar{x}))\geqslant 0。$$

再由条件 1)的第 1 部分可推得 $b_0(x,\bar{x})\varphi_0\left[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(x,\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(x,\bar{y}_i))-\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))\right]\geqslant 0$。根据条件 2)有 $\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(x,\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(x,\bar{y}_i))-\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))\geqslant 0$，这与(5)式相矛盾。

因此,$\bar{x}$ 是规划(P)的一个最优解。 证毕

定理 3 设$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{s},\bar{t},\bar{u})$满足(1)～(4)式,并且存在 $F,d,\theta,\varphi_p,b_p,\alpha^p,\rho^p(p=0,1)$使得

1) $[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\cdot,\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\cdot,\bar{y}_i)),\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\cdot)]$ 在 $\bar{x}$ 处是严格伪拟(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸的;

2) $a\leqslant 0\Rightarrow\varphi_0(a)\leqslant 0;a\geqslant 0\Rightarrow\varphi_1(a)\geqslant 0;b_0(x,\bar{x})\geqslant 0;b_1(x,\bar{x})\geqslant 0$;

3) $\alpha^0(x,\bar{x})=\alpha^1(x,\bar{x}),\rho^0\geqslant-\rho^1$;

则 $\bar{x}$ 是规划(P)的一个最优解。

证明 若 $\bar{x}$ 不是规划(P)的一个最优解,则存在规划(P)的一个可行解 x,使得 $\bar{\lambda}=\dfrac{f(\bar{x},\bar{y}_i)}{h(\bar{x},\bar{y}_i)}>\sup\limits_{y\in Y}\dfrac{f(x,y)}{h(x,y)}$,$i=1,2,\cdots,\bar{s}$,即 $f(x,y)-\bar{\lambda}h(x,y)<0,\forall y\in Y$。根据(2)、(4)式有

$$\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(x,\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(x,\bar{y}_i))<\sum_{i=1}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))。$$

由条件 2) 得

$$b_0(x,\bar{x})\varphi_0[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(x,\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(x,\bar{y}_i))-\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))]\leqslant 0。$$

根据条件 1)的第 1 部分可推得

$$F(x,\bar{x};\alpha^0(x,\bar{x})\nabla\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i)))+\rho^0 d^2(\theta(x,\bar{x}))<0。\tag{6}$$

另一方面,由(3)式及条件 2)有 $-b_1(x,\bar{x})\varphi_1[\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})]\leqslant 0$。再由条件 1)的第 2 部分可推得

$$F(x,\bar{x};\alpha^1(x,\bar{x})\nabla\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}))+\rho^1 d^2(\theta(x,\bar{x}))\leqslant 0。\tag{7}$$

把(6)、(7)式相加,并利用函数 F 的次线性和条件 3)可得

$$F(x,\bar{x};\alpha^0(x,\bar{x})\nabla[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})])<0。$$

而由(1)式及 F 的次线性可推得 $F(x,\bar{x};\alpha^0(x,\bar{x})\nabla[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})])=0$,矛盾。因此,$\bar{x}$ 是规划(P)的一个最优解。 证毕

3 对偶性

下面建立极大极小分式规划(P)的对偶模型(D),并在广义(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸条件下证明其弱对偶、强对偶和严格逆对偶定理。

$$\text{(D)}\quad\max_{(s,t,u)\in K(z)}\ \sup_{(z,\mu,\lambda)\in H(s,t,u)}\lambda,$$

$$\nabla\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))+\nabla\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j(z)=0,\tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))\geqslant 0,\tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j(z)\geqslant 0。\tag{10}$$

其中,对$(s,t,u)\in K(z)$, $H(s,t,u)$是满足 (8)～(10)式的所有点$(z,\mu,\lambda)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+^m\times\mathbf{R}_+$的集合。

若对某$(s,t,u)\in K(z)$, $H(s,t,u)=\varnothing$,则定义 $\sup\limits_{H(s,t,u)}\lambda=-\infty$。

定理 4 (弱对偶)设 x 和(z,μ,λ,s,t,u)分别为规划(P)和对偶(D)的可行解,并且

1) $[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(\cdot,y_i)-\lambda h(\cdot,y_i)),\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j(\cdot)]$ 在 z 处是伪拟(F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸;

2) $\varphi_0(a)\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 0;a\geqslant 0\Rightarrow\varphi_1(a)\geqslant 0$; $b_0(x,z)>0;b_1(x,z)\geqslant 0$;

3) $\alpha^0(x,z)=\alpha^1(x,z);\rho^0+\rho^1\geqslant 0$;

则 $\sup\limits_{y\in Y}\dfrac{f(x,y)}{h(x,y)}\geqslant\lambda$。

证明　因为 $a \geqslant 0 \Rightarrow \varphi_1(a) \geqslant 0, b_1(x,z) \geqslant 0$，所以由(10)式可得 $-b_1(x,z)\varphi_1[\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j(z)] \leqslant 0$。再由条件 1)的第 2 部分，上式可推得 $F(x,z;\alpha^1(x,z)\nabla\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j(z))+\rho^1 d^2(\theta(x,z)) \leqslant 0$。利用(8)式和 F 的次线性，上式又可推得

$$-F(x,z;\alpha^1(x,z)\nabla\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i)))+\rho^1 d^2(\theta(x,z)) \leqslant$$
$$F(x,z;\alpha^1(x,z)\nabla\sum_{j=1}^{m}\mu_j g_j(z))+\rho^1 d^2(\theta(x,z)) \leqslant 0。$$

考虑条件 3)有 $F(x,z;\alpha^0(x,z)\nabla\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i)))+\rho^0 d^2(\theta(x,z)) \geqslant 0$。再根据条件 1)的第 1 部分，又可推得 $b_0(x,z)\varphi_0[\sum_{i=1}^{s}t_i(f(x,y_i)-\lambda h(x,y_i))-\sum_{i=1}^{s}t_i(f(z,y_i)-\lambda h(z,y_i))] \geqslant 0$。由 $b_0(x,z)>0, \varphi_0(a) \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0$ 和(9)式，可得 $\sum_{i=1}^{s}t_i(f(x,y_i)-\lambda h(x,y_i)) \geqslant 0$。故存在某个 i_0 使得 $f(x,y_{i_0})-\lambda h(x,y_{i_0}) \geqslant 0$，即 $\sup_{y\in Y}\dfrac{f(x,y)}{h(x,y)} \geqslant \dfrac{f(x,y_{i_0})}{h(x,y_{i_0})} \geqslant \lambda$。　　证毕

定理 5　(强对偶)设 $\bar{x}$ 是规划(P)的一个最优解，且 $\nabla g_j(\bar{x}), j\in J(\bar{x})$ 线性独立，则存在 $(\bar{s},\bar{t},\bar{u})\in K(\bar{x})$ 和 $(\bar{x},\bar{\mu},\bar{\lambda})\in H(\bar{s},\bar{t},\bar{u})$ 使得 $(\bar{x},\bar{\mu},\bar{\lambda},\bar{s},\bar{t},\bar{u})$ 是对偶(D)的一个可行解，且其目标函数值相等，而且，若定理 4 的弱对偶条件对规划(P)和(D)的所有可行解均成立，则 $(\bar{x},\bar{\mu},\bar{\lambda},\bar{s},\bar{t},\bar{u})$ 为(D)的一个最优解。

证明　因为 $\bar{x}$ 是规划(P)的一个最优解，且 $\nabla g_j(\bar{x}), j\in J(\bar{x})$ 线性独立，所以，由定理 1，存在 $(\bar{s},\bar{t},\bar{u})\in K(\bar{x})$ 和 $(\bar{x},\bar{\mu},\bar{\lambda})\in H(\bar{s},\bar{t},\bar{u})$ 使得 $(\bar{x},\bar{\mu},\bar{\lambda},\bar{s},\bar{t},\bar{u})$ 是(D)的一个可行解，且其目标函数值相等。而 $(\bar{x},\bar{\mu},\bar{\lambda},\bar{s},\bar{t},\bar{u})$ 是(D)的一个最优解直接由定理 4 可得。　　证毕

定理 6　(严格逆对偶)设 $\bar{x}$ 和 $(\bar{z},\bar{\mu},\bar{\lambda},\bar{s},\bar{t},\bar{u})$ 分别是规划(P)和(D)的可行解，如果

1) $\sup_{\bar{y}\in Y}\dfrac{f(\bar{x},\bar{y})}{h(\bar{x},\bar{y})}=\bar{\lambda}$；

2) $[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\cdot,\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\cdot,\bar{y}_i)),\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\cdot)]$ 在 $\bar{z}$ 处是严格伪拟 (F,α,ρ,θ)-d-V-I 型一致不变凸；

3) $\varphi_0(a)>0 \Rightarrow a>0; a \geqslant 0 \Rightarrow \varphi_1(a) \geqslant 0$；$b_0(\bar{x},\bar{z})>0; b_1(\bar{x},\bar{z}) \geqslant 0$；

4) $\alpha^0(\bar{x},\bar{z})=\alpha^1(\bar{x},\bar{z}); \rho^0+\rho^1 \geqslant 0$。

则 $\bar{x}=\bar{z}$。

证明　反证法，若 $\bar{x}\neq\bar{z}$，则由(10)式和条件 3)有 $-b_1(\bar{x},\bar{z})\varphi_1[\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\bar{z})] \leqslant 0$。再由条件 2)中第 2 部分可推得 $F(\bar{x},\bar{z};\alpha^1(\bar{x},\bar{z})\nabla\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j g_j(\bar{z}))+\rho^1 d^2(\theta(\bar{x},\bar{z})) \leqslant 0$。利用(8)式和函数 F 的次线性可知

$$-F(\bar{x},\bar{z};\alpha^1(\bar{x},\bar{z})\nabla\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{z},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{z},\bar{y}_i)))+\rho^1 d^2(\theta(\bar{x},\bar{z})) \leqslant 0。$$

根据条件 4)有

$$F(\bar{x},\bar{z};\alpha^0(\bar{x},\bar{z})\nabla\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{z},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{z},\bar{y}_i)))+\rho^0 d^2(\theta(\bar{x},\bar{z})) \geqslant 0。$$

再由条件 2)中第 1 部分，上式可推得

$$b_0(\bar{x},\bar{z})\varphi_0[\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))-\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{z},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{z},\bar{y}_i))]>0,$$

又由 $b_0(\bar{x},\bar{z})>0, \varphi_0(a)>0 \Rightarrow a>0$ 和(9)式得 $\sum_{i=1}^{\bar{s}}\bar{t}_i(f(\bar{x},\bar{y}_i)-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_i))>0$。因此，存在 i_0 使得 $f(\bar{x},\bar{y}_{i_0})-\bar{\lambda}h(\bar{x},\bar{y}_{i_0})>0$。故 $\sup_{\bar{y}\in Y}\dfrac{f(\bar{x},\bar{y})}{h(\bar{x},\bar{y})} \geqslant \dfrac{f(\bar{x},\bar{y}_{i_0})}{h(\bar{x},\bar{y}_{i_0})}>\bar{\lambda}$，这与条件 1)矛盾，所以 $\bar{x}=\bar{z}$。　　证毕

参考文献：

[1] Yadav S R, Mukherjee R N. Duality for fractional minimax programming problems[J]. J Aust Math Soc Ser B, 1990, 31(4): 484-492.

[2] Chandra S, Kumar V. Duality in fractional minimax programming[J]. J Aust Math Soc Ser A, 1995, 58(3): 376-386.

[3] Liu J C, Wu C S, Sheu R L. Duality for fractional minimax programming[J]. Optim, 1997, 41(2): 117-133.

[4] Liu J C, Wu C S. On minimax fractional optimality conditions with invexity[J]. J Math Anal Appl, 1998, 219(1): 21-35.

[5] Liu J C, Wu C S. On minimax fractional optimality conditions with (F, ρ) convexity[J]. J Math Anal Appl, 1998, 219(1): 36-51.

[6] Yang X M, Hou S H. On minimax fractional optimality and duality with generalized convexity[J]. J Glob Optim, 2005, 31(2): 235-252.

[7] Bector C R, Chandra S, Suneja S K, et al. Univex sets, functions and univex nonlinear programming[J]. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1994, 405(1): 3-18.

[8] Rueda N G, Hanson N G, Singh C. Optimality and duality with generalized convexity[J]. J Optim Theory Appl, 1995, 86(2): 491-500.

[9] Yuan D H, Liu X L, Chinchuluun A, et al. Nondifferentiable minimax fractional programming problems with (C, α, ρ, d)-convexity[J]. J Optim Theory Appl, 2006, 129(1): 185-199.

[10] Long X J, Quan J. Optimality conditions and duality for minimax fractional programming involving nonsmooth generalized univexity[J]. Numerical Algebra, Control and Optimality, 2011, 1(3): 361-370.

[11] Jayswal A, Ahmadb I, Al-Homidanb S. Sufficiency and duality for nonsmooth multiobjective programming problems involving generalized $(F, \alpha, \rho, \theta)$-$d$-$V$univex functions[J]. Math Comput Model, 2011, 53(1/2): 81-90.

[12] Ahmad I, Husain Z, Sharma S. Second-order duality in nondifferentiable minimax programming involving type-I functions[J]. J Comput Appl Math, 2008, 215(1): 91-102.

[13] 焦合华. 关于极大极小分式规划的一个二阶对偶[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2013, 30(3): 1-4.
Jiao H H. On a second order dual for minimax fractional programming[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(3): 1-4.

Operations Research and Cybernetics

Minimax Fractional Programming Problem under a Class of Type I Univexity

JIAO Hehua

(College of Mathematics and Computer, Yangtze Normal University, Fuling Chongqing 408100, China)

Abstract: A new class of generalized $(F, \alpha, \rho, \theta)$-$d$-$V$-$I$ type univex functions is introduced for a minimax fractional programming problem (P) and some sufficient optimality conditions for the problem (P) are obtained under the assumptions of generalized type I univexity. Moreover, a new dual model of programming (P) is formulated and weak duality, strong duality and strict converse duality theorems are proved under the aforesaid assumptions. The results obtained in this paper extend and improve some corresponding results in the literature.

Key words: minimax programming; fractional programming; generalized type I univexity; duality; optimality

(责任编辑 黄 颖)