运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140504

向量值 D-半预不变真拟凸映射的判定与性质*

彭再云[1]，李科科[1,2]，唐 平[3]，黄应全[4]

(1.重庆交通大学 理学院，重庆 400074；2.重庆师范大学 数学学院，重庆 400047
3.重庆文理学院 数学与财经学院，重庆 402160；4.重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067)

摘要:提出了一类新的向量值映射—D-半预不变真拟凸映射，它是 D-预不变真拟凸映射与 D-半预不变凸映射的真推广。首先，给出例子说明半不变凸集、D-半预不变真拟凸映射的存在性;然后，给出了相关集合的稠密性结果以及在下 D-半连续条件下 D-半预不变真拟凸映射的判定，并建立了 D-半预不变真拟凸映射与 D-严格/半严格半预不变真拟凸映射间的关系;最后，讨论了 D-半严格半预不变真拟凸映射在向量优化问题中的一个应用，并举例验证了所得结论的正确性。

关键词:半不变凸集；D-半预不变真拟凸映射；判定定理；向量优化；应用

中图分类号:O221 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)05-0018-08

凸性和广义凸性在管理科学、数理经济和最优化理论中起着非常重要的作用，有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中重要的方向之一。Hanson 在 1981 年给出了一类广义凸函数—不变凸函数，它是凸函数的推广[1]。其后，一些文献借助于此类函数给出了一些数学规划问题的最优性结果。Ben 和 Mond 考虑了一类非可微函数[2]，Weir 和 Jeyakumar 将其称为预不变凸函数[3]。Yang 和 Li 在条件 C 下讨论了预不变凸函数的一些性质[4]。同年，Yang 和 Li 对严格预不变凸函数与半严格预不变凸函数的关系进行了讨论[5]。1992 年，Yang 和 Chen 提出了半预不变凸函数的概念，这类函数可看作预不变凸函数的真推广，并给出了半预不变凸函数的一些性质[6]。Peng 和 Chang 提出了 G-半预不变凸函数的概念[7]，它统一了半预不变凸函数与 G-预不变凸函数[8]，并给出了 G-半预不变凸函数的重要刻画。Kazmi 提出了向量值情形下 D-预不变凸映射的重要概念[9]。然后，Peng 和 Zhu[10] 给出了向量 D-预不变凸映射的性质，并讨论了 D-预不变凸性、D-严格预不变凸性和 D-半严格预不变凸性间的关系。之后，一些文献 [10-12,14-15] 继续对向量值广义凸映射进行了研究。最近，Fulga 和 Preda 给出了 E-预不变凸性和局部 E-预不变凸性的概念，并讨论了在 E-预不变凸性和局部 E-预不变凸性条件下局部有效解和全局有效解之间的关系[13]。彭再云等提出了向量 D-η-半预不变凸映射的概念，并给出了 D-η-半预不变凸映射的性质与应用[15]。

受文献[6-7,13-15]的启发，本文提出了一类新的向量值广义凸映射—D-半预不变真拟凸映射，它是 D-预不变真拟凸映射[14] 和 D-半预不变凸映射[15] 的真推广。首先，用例子说明了半不变凸集、D-半预不变真拟凸映射的存在性;然后，给出了 D-半预不变真拟凸映射的判定定理，并建立了 D-半预不变真拟凸映射与 D-严格半预不变真拟凸映射、D-半严格半预不变真拟凸映射间的关系;最后，讨论了 D-半严格半预不变真拟凸映射在一类隐约束向量优化问题中的应用，并举例验证了所得结论的正确性。本文结果是文献[6-7,12,14-15]中相应结果的推广。

1 定义及例子

本文均假定 X,Y 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集，K 是 X 中给定的任意非空子集，D 是 Y 中的非空点闭凸锥，$f:K\to Y$ 是向量

* **收稿日期**:2014-05-22 **修回日期**:2014-07-09 **网络出版时间**:2014-9-17 22:37

资助项目:国家自然科学基金(No. 11271389)；国家青年基金(No. 11301571)；重庆市自然科学基金(No. 2012jjA00016)；重庆市教委基金项目(No. KJ130428)；重庆交通大学创新训练项目(2014 年)

作者简介:彭再云，男，副教授，博士，重庆师范大学校友，研究方向为向量优化理论及应用，E-mail:pengzaiyun@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140917.2237.004.html

值映射，D 的对偶锥 D^* 定义为 $D^*=\{f\in Y^* \mid f(y)\geqslant 0, \forall y\in D\}$。为了后面研究的需要，回顾如下的定义。

定义 1[2-3]　称集合 K 是 X 中的不变凸集，若存在向量值映射 $\eta: X\times X\to X$（当 $x\neq y$ 时 $\eta\neq 0$），使得对 $\forall x, y\in K, \forall \alpha\in[0,1]$，有 $y+\alpha\eta(x,y)\in K$。

定义 2[14]　设 K 是 X 中关于 $\eta: X\times X\to X$ 的不变凸集，称向量值映射 $f: K\to Y$ 在 K 上（关于 η）是 D-预不变凸的，如果对 $\forall x, y\in K, \forall \alpha\in[0,1]$，有 $f(y+\alpha\eta(x,y)\in \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-D$。

定义 3[6,15]　称集合 K 是 X 中的半不变凸集，若存在向量值映射 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$（当 $x\neq y$ 时 $\eta\neq 0$），使得 $\forall x, y\in K, \forall \alpha\in[0,1], \forall \lambda\in[0,1]$，有 $y+\alpha\eta(x,y,\lambda)\in K$。

定义 4[15]　设 K 是 X 中关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集，称向量值映射 $f: K\to Y$ 在 K 上（关于 η）是 D-半预不变凸的，如果对 $\forall x, y\in K, \forall \alpha\in[0,1], \forall \lambda\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha\eta(x,y,\lambda)=0$ 且 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-D$。

下面给出本文将要用到的重要概念。

定义 5　设 K 是 X 中关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集，称向量值映射 $f: K\to Y$ 在 K 上（关于 η）是 D-半预不变真拟凸的，如果对 $\forall x, y\in K, \forall \alpha\in[0,1], \forall \lambda\in[0,1]$，有 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$ 或 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D$，其中 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha\eta(x,y,\lambda)=0$。

定义 6　设 K 是 X 中关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集，称向量值映射 $f: K\to Y$ 在 K 上（关于 η）是 D-半严格（严格）半预不变真拟凸的，如果对 $\forall x, y\in K, f(x)\neq f(y)(x\neq y), \forall \alpha\in(0,1), \forall \lambda\in(0,1)$，有 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda)\in f(x)-\mathrm{int}\, D$ 或 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-\mathrm{int}\, D$，其中 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha\eta(x,y,\lambda)=0$。

注 1　D-半预不变真拟凸映射是 D-预不变真拟凸映射的真推广，当 $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$（即 η 与 λ 无关）时，D-半预不变真拟凸映射就退化为 D-预不变真拟凸映射[12]。

首先通过例 1 来说明半不变凸集的存在性。

例 1　设 $K=[-1,1]$，$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases} x-y, 1\geqslant x\geqslant 0, 1\geqslant y\geqslant 0 \\ x-y, -1\leqslant x<0, -1\leqslant y<0 \\ -\dfrac{1}{2}-y+\lambda, 1\geqslant x\geqslant 0, -1\leqslant y<0 \\ -\dfrac{1}{2}-y+\lambda, -1\leqslant x<0, 1\geqslant y\geqslant 0 \end{cases}$，根据定义 3 容易验证 K 是一个关于映射 η 的半不变凸集。

下面通过例 2 来说明向量值 D-半预不变真拟凸映射的存在性。

例 2　令 $D=\{(x,y) \mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，$f(x)=(f_1(x), f_2(x))$，其中 $f_1(x)=-|x|$，$f_2(x)=-7|x|$，$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases} x-y+\lambda, x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ x-y-\lambda, x\leqslant 0, y\leqslant 0 \\ y-x+\lambda, x\leqslant 0, y\geqslant 0 \\ y-x-\lambda, x\geqslant 0, y\leqslant 0 \end{cases}$。根据定义 3 容易验证 $K=R$ 是一个半不变凸集，且根据定义 5 可以验证 f 是 K 上关于 η 的 D-半预不变真拟凸映射。

下面给出例 3 来说明 D-半严格半预不变真拟凸映射可能既不是关于同一 η 的 D-半预不变真拟凸映射，也不是关于同一 η 的 D-严格半预不变真拟凸映射。

例 3　令 $D=\{(x,y) \mid x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，$f(x)=(f_1(x), f_2(x))$，其中 $f_1(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}|x|, |x|\leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{2}, |x|\geqslant 1 \end{cases}$，$f_2(x)=$

$\begin{cases}-2|x|,|x|\leqslant 1\\-2,|x|\geqslant 1\end{cases}$, $\eta=\begin{cases}x-y+\lambda, x\geqslant 0, y\geqslant 0\\x-y-\lambda, x\leqslant 0, y\leqslant 0\\x-y+\lambda, x>1, y<-1\\x-y-\lambda, x<-1, y>1\\y-x+\lambda, -1\leqslant x\leqslant 0, y\geqslant 0\\y-x-\lambda, -1\leqslant y\leqslant 0, x\geqslant 0\\y-x-\lambda, 0\leqslant x\leqslant 1, y\leqslant 0\\y-x+\lambda, 0\leqslant y\leqslant 1, x\leqslant 0\end{cases}$。显然 $K=R$ 是关于 η 的半不变凸集,由定义 6 不难验证 f 是 K 上关于 η 的 D-半严格半预不变真拟凸映射。然而,当 $x=5, y=-5, \alpha=\frac{1}{2}, \lambda=\frac{1}{2}$ 时,有 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))=f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{2}\right)$, $f(x)=f(5)=\left(-\frac{1}{2},-2\right)=f(y)=f(-5)$,即

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\notin f(x)-\mathrm{int}\,D \text{ 且 } f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\notin f(y)-D$$

及 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\notin f(x)-\mathrm{int}\,D$ 且 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\notin f(y)-\mathrm{int}\,D$。

由定义 5、定义 6 知,f 在 K 上既不是 D-半预不变真拟凸映射也不是 D-严格半预不变真拟凸映射。

注 2 由例 2 可知 D-半预不变真拟凸映射是大量存在的;同时,例 3 表明 D-半严格半预不变真拟凸映射是与 D-半预不变真拟凸、D-严格半预不变真拟凸映射不同的映射。

定义 7[14] 称向量值映射 $f: K\to Y$ 是下 D-半连续的(Lower D-semicintinuous),如果对每一个 $y\in Y$,水平集 $\{x\in K \mid y\in f(x)+D\}$ 是 X 中的闭集。

2 D-半预不变真拟凸映射的判定定理

文献[15]给出了条件 E 的定义。

条件 E[15] 称向量值映射 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$ 满足条件 E,若对 $\forall x,y\in X, \alpha\in[0,1], \forall\lambda\in[0,1]$,有(E1) $\eta(y,y+\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda)=-\alpha\eta(x,y,\lambda)$;(E2) $\eta(x,y+\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda)=(1-\alpha)\eta(x,y,\lambda)$ 成立。

例 4 表明满足条件 E 的向量值映射 η 是大量存在的。

例 4 令 $K=R, \eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y, x\geqslant 0, y\geqslant 0\\x-y, x<0, y<0\\-\frac{1}{2}-y, x>0, y<0\\\frac{1}{2}-y, x<0, y\geqslant 0\\-1-y+10\lambda, x=0, y<0\end{cases}$,根据以上定义,容易验证映射 η 满足条件 E。

下面给出集合 A 在区间[0,1]中的一个稠密性结果。

引理 1 设 K 是 X 中的关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集,其中 η 满足条件 E。若 $f: K\to Y$ 满足对 $\forall x,y\in K$,有 $f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$ 且对 $\forall x,y\in K, \forall\lambda\in[0,1], \exists\alpha\in(0,1)$ 使得 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$ 或 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D$,则集合

$$A=\{\gamma\in[0,1] \mid f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D \text{ 或 } f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D\}$$

在区间[0,1] 中稠密。

证明 由 $f(y)\in f(y)-D$,以及条件 $f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$ 可知 $0,1\in A$。反设 A 在区间[0,1]中不稠密,则存在 $\gamma_0\in(0,1)$ 和 γ_0 的邻域 $N(\gamma_0)$ 使得 $N(\gamma_0)\cap A=\varnothing$。定义 $\gamma_1=\inf\{\gamma\in A \mid \gamma\geqslant\gamma_0\}$, $\gamma_2=\sup\{\gamma\in A \mid \gamma\leqslant\gamma_0\}$,则有 $0\leqslant\gamma_2<\gamma_1\leqslant 1$。因为 $\{\alpha,(1-\alpha)\}\subset(0,1)$,所以可选择 $v_1,v_2\in A$,满足 $v_1\geqslant\gamma_1, v_2\leqslant\gamma_2$,使得 $\max\{\alpha,(1-\alpha)\}(v_1-v_2)<\gamma_1-\gamma_2$,于是 $v_2\leqslant\gamma_2<\gamma_1\leqslant v_1$。

令 $\bar{\gamma}=\alpha v_1+(1-\alpha)v_2$,由条件 E,可得

$$y+v_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta(y+v_1\eta(x,y,\lambda),y+v_2\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$
$$y+v_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta(y+v_1\eta(x,y,\lambda),y+v_1\eta(x,y,\lambda)-(v_1-v_2)\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$
$$y+v_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta\left(y+v_1\eta(x,y,\lambda),y+v_1\eta(x,y,\lambda)+\frac{v_1-v_2}{v_1}\eta(y,y+v_1\eta(x,y,\lambda),\lambda),\lambda\right)=$$
$$y+v_2\eta(x,y,\lambda)-\alpha\frac{v_1-v_2}{v_1}\eta(y,y+v_1\eta(x,y,\lambda),\lambda)=y+(v_2+\alpha(v_1-v_2))\eta(x,y,\lambda)=y+\bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda)$$

于是有
$$f(y+\bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda))=f(y+v_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta(y+v_1\eta(x,y,\lambda),y+v_2\eta(x,y,\lambda),\lambda)$$
则由假设可得
$$f(y+\bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda))\in f(y+v_1\eta(x,y,\lambda))-D \text{ 或 } f(y+\bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda))\in f(y+v_2\eta(x,y,\lambda))-D$$

据 $v_1,v_2\in A$，则有 $f(y+v_1\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$ 或 $f(y+v_1\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D$；$f(y+v_2\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$ 或 $f(y+v_2\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D$。

于是得到 $f(y+\bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D-D\subset f(x)-D$ 或 $f(y+\bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D-D\subset f(y)-D$，即 $\bar{\gamma}\in A$。

如果 $\bar{\gamma}\geqslant\gamma_0$，则 $\bar{\gamma}-v_2=\alpha v_1+(1-\alpha)v_2-v_2=\alpha(v_1-v_2)<\gamma_1-\gamma_2$，所以 $\bar{\gamma}<\gamma_1$。而 $\bar{\gamma}\geqslant\gamma_0$ 且 $\bar{\gamma}\in A$，这与 γ_1 的定义矛盾。如果 $\bar{\gamma}\leqslant\gamma_0$，则 $\bar{\gamma}-v_1=\alpha v_1+(1-\alpha)v_2-v_1=(1-\alpha)(v_2-v_1)>\gamma_2-\gamma_1$。所以 $\bar{\gamma}>\gamma_2$。而 $\bar{\gamma}\leqslant\gamma_0$ 且 $\bar{\gamma}\in A$，这与 γ_2 的定义矛盾。故集合 A 在 $[0,1]$ 中稠密。　　证毕

引理 2[14]　$\forall q\in D^*,q(d)\geqslant 0\Leftrightarrow d\in D$。

下面给出下 D-半连续假设下 D-半预不变真拟凸映射的一个判定定理。

定理 1　设 K 是 X 中的关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集，其中 η 满足条件 E。若 $f:E\to Y$ 是下 D-半连续的且满足对 $\forall x,y\in K$，有 $f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$。则 f 在 K 上是 D-半预不变真拟凸映射的充要条件为：对 $\forall x,y\in K$，$\forall\lambda\in[0,1]$，$\exists\alpha\in(0,1)$，使得
$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D \text{ 或 } f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D \tag{1}$$

证明　由 D-半预不变真拟凸映射的定义可知必要性成立。下证充分性。

由引理 1 可知，集合 $A=\{\alpha\in[0,1]\mid f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$ 或 $f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密。即 $\bar{A}\supset[0,1]$，由于 $0,1\in A$，对任意的 $\bar{\alpha}\in(0,1)$，存在 $\{\alpha_n\}\subset A$，使得 $\alpha_n\to\bar{\alpha}(n\to\infty)$。于是有
$$f(y+\alpha_n\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D \text{ 或 } f(y+\alpha_n\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D \tag{2}$$
即 $f(x)\in f(y+\alpha_n\eta(x,y,\lambda))+D$ 或 $f(y)\in f(y+\alpha_n\eta(x,y,\lambda))+D$。不妨令集合 $N=\{y+\alpha_n\eta(x,y,\lambda)\in K\mid f(x)\in f(y+\alpha_n\eta(x,y,\lambda))+D\}$，集合 $M=\{y+\alpha_n\eta(x,y,\lambda)\in K\mid f(y)\in f(y+\alpha_n\eta(x,y,\lambda))+D\}$。由 $f:K\to Y$ 是下 D-半连续的可知，N、M 必有一个是 X 中的闭集。于是有 $y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)\in N$ 或 $y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)\in M$。即有
$$f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D \text{ 或 } f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D$$
故 f 关于 η 是 D-半预不变真拟凸映射。　　证毕

注 3　定理 1 中 f 是下 D-半连续的这一条件替换成 f 是 D-连续的、f 是 $*$-下半连续的或 f 上凸闭时，结论依然成立。定理 1 是文献[14]中定理 6.2.3 的推广，但证明方法不同于定理 6.2.3[14]。

3 D-半预不变真拟凸映射与 D-严格半预不变真拟凸映射的关系

定理 2　设 K 是 X 中关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的非空半不变凸集，其中 η 满足条件 E。若向量值映射 $f:K\to Y$ 满足：1) f 关于 η 是 D-半预不变真拟凸映射；2) 存在 $\alpha\in(0,1)$，对任意的 $x,y\in K$，$x\neq y$，$\lambda\in(0,1)$ 使得
$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-\operatorname{int}D \text{ 或 } f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-\operatorname{int}D \tag{3}$$
则 f 在 K 上关于 η 是 D-严格半预不变真拟凸映射。

证明　用反证法。假设 f 在 K 上关于 η 不是 D-严格半预不变真拟凸映射，则存在 $x,y\in K(x\neq y)$，$\lambda\in(0,1)$，$\bar{\alpha}\in(0,1)$ 使得
$$f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\notin f(x)-\operatorname{int}D \text{ 且 } f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\notin f(y)-\operatorname{int}D \tag{4}$$

选取 β_1,β_2 满足 $0<\beta_1<\beta_2<1$ 使得 $\bar{\alpha}=\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2$。令 $\bar{x}=y+\beta_1\eta(x,y,\lambda)$，$\bar{y}=y+\beta_2\eta(x,y,\lambda)$，因为 f 是 D-半预不变真拟凸的，则有

$$f(\bar{x})=f(y+\beta_1\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D \text{ 或 } f(\bar{x})=f(y+\beta_1\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D$$

且
$$f(\bar{y})=f(y+\beta_2\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D \text{ 或 } f(\bar{y})=f(y+\beta_2\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D \tag{5}$$

由条件E得
$$\begin{aligned}&\bar{y}+\alpha\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda)=y+\beta_2\eta(x,y,\lambda)+\\&\alpha\eta(y+\beta_1\eta(x,y,\lambda),y+\beta_1\eta(x,y,\lambda)+(\beta_2-\beta_1)\eta(x,y,\lambda),\lambda)=\\&y+\beta_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta\left(y+\beta_1\eta(x,y,\lambda),y+\beta_1\eta(x,y,\lambda)+\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\eta(x,y+\beta_1\eta(x,y,\lambda),\lambda),\lambda\right)=\\&y+\beta_2\eta(x,y,\lambda)-\alpha\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\eta(x,y+\beta_1\eta(x,y,\lambda),\lambda)=\\&y+(\beta_2-\alpha(\beta_2-\beta_1))\eta(x,y,\lambda)=y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)\end{aligned}$$

即 $\bar{y}+\alpha\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda)=y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)$。

综合(3)式可得
$$f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(\bar{x})-\operatorname{int} D \text{ 或 } f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(\bar{y})-\operatorname{int} D \tag{6}$$

由 $D+\operatorname{int} D\subset\operatorname{int} D$ 及(5)、(6)式可得

$$f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-\operatorname{int} D \text{ 或 } f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-\operatorname{int} D \tag{7}$$

(7)式和(4)式矛盾，假设不成立。故 f 在 K 上是 D-严格半预不变真拟凸映射。 证毕

由定理1和定理2可得下面的推论。

推论1 K 是 X 中关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集，其中 η 满足条件E，设向量值映射 $f:K\to Y$ 满足：1) f 是下 D-半连续的，且对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$ 有 $f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$；2) 存在 $\alpha\in(0,1)$，对任意的 $x,y\in K,x\neq y,\lambda\in(0,1)$ 有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-\operatorname{int} D \text{ 或 } f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-\operatorname{int} D$$

则 f 在 K 上关于 η 是 D-严格半预不变真拟凸映射。

4 D-半严格半预不变真拟凸映射与 D-半预不变真拟凸映射的关系

定理3 设 K 是 X 中关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的非空半不变凸集，其中 η 满足条件E。如果向量值映射 $f:K\to Y$ 满足：1)对任意的 $x,y\in K,\lambda\in[0,1]$ 有 $f(x)-f(y+\eta(x,y,\lambda))\in D$；对任意的 $x,y\in K,\alpha\in[0,1]$ 有 $f(x)-f(y+\alpha\eta(x,y,0))\in D$，$f(x)-f(y+\alpha\eta(x,y,1))\in D$。2) f 关于 η 是 D-半严格半预不变真拟凸映射。3) 存在 $\alpha\in(0,1)$，对任意的 $x,y\in K$，$\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(x)-f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in D \text{ 或 } f(y)-f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in D \tag{8}$$

则 f 在 K 上关于 η 是 D-半预不变真拟凸映射。

证明 从以下3种情况来进行讨论。

情形1，若 $f(x)-f(y)\notin\{0_Y\}$。

由于 f 在 K 上关于 η 是 D-半严格半预不变真拟凸映射，对 $\forall x,y\in K,\beta\in(0,1),\lambda\in(0,1)$ 有 $f(x)-f(y+\beta\eta(x,y,\lambda))\in\operatorname{int} D\subset D$ 或 $f(y)-f(y+\beta\eta(x,y,\lambda))\in\operatorname{int} D\subset D$。于是结合条件1)可知：对任意的 $\beta\in[0,1],\lambda\in[0,1]$ 有 $f(x)-f(y+\beta\eta(x,y,\lambda))\in D$ 或 $f(y)-f(y+\beta\eta(x,y,\lambda))\in D$。

情形2，若 $f(x)-f(y)\in\{0_Y\}$。

假设 f 不是关于 η 的 D-半预不变真拟凸映射，结合条件1)，则存在 $x,y\in K,\beta\in(0,1),\lambda\in(0,1)$ 使得

$$f(x)-f(y+\beta\eta(x,y,\lambda))\notin D \text{ 且 } f(y)-f(y+\beta\eta(x,y,\lambda))\notin D \tag{9}$$

于是，存在 $k^*\in D^*\backslash\{0_Y\}$ 使得

$$\langle k^*,f(x)-f(y+\beta\eta(x,y,\lambda))\rangle<0 \text{ 且 } \langle k^*,f(y)-f(y+\beta\eta(x,y,\lambda))\rangle<0 \tag{10}$$

令 $z=y+\beta\eta(x,y,\lambda)$，上面的式子可简化为

$$\langle k^*,f(x)-f(z)\rangle<0 \text{ 且 } \langle k^*,f(y)-f(z)\rangle<0 \tag{11}$$

1）当 $0<\beta<\alpha<1$ 时，令 $z_1=y+\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda)$，由条件 E 有

$$y+\alpha\eta(z_1,y,\lambda)=y+\alpha\eta\left(y+\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda),y+\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda)-\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda),\lambda\right)=$$

$$y+\alpha\eta\left(y+\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda),y+\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda)+\eta(y,y+\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda),\lambda),\lambda\right)=$$

$$y-\alpha\eta\left(y,y+\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda),\lambda\right)=y+\beta\eta(x,y,\lambda)=z$$

综合(8)式可得 $f(z_1)-f(z)\in D$ 或 $f(y)-f(z)\in D$。

即
$$\langle k^*,f(z_1)-f(z)\rangle\geqslant 0 \text{ 或} \langle k^*,f(y)-f(z)\rangle\geqslant 0 \tag{12}$$

由(11)式有
$$\langle k^*,f(z_1)-f(z)\rangle\geqslant 0 \tag{13}$$

令 $m=\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}$，因为 $0<\beta<\alpha<1$，易知 $m\in(0,1)$。由条件 E 知

$$z+m\eta(x,z,\lambda)=y+\beta\eta(x,y,\lambda)+m\eta(x,y+\beta\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$

$$y+[\beta+m(1-\beta)]\eta(x,y,\lambda)=y+\left(\beta+\beta\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right)\eta(x,y,\lambda)=y+\frac{\beta}{\alpha}\eta(x,y,\lambda)=z_1$$

由 $f(x)-f(z)\notin\{0_Y\}$ 及 f 的 D-半严格半预不变真拟凸性，可得

$$f(x)-f(z_1)\in \operatorname{int} D \text{ 或 } f(z)-f(z_1)\in \operatorname{int} D$$

即
$$\langle k^*,f(x)-f(z_1)\rangle>0 \text{ 或} \langle k^*,f(z)-f(z_1)\rangle>0 \tag{14}$$

若 $\langle k^*,f(x)-f(z_1)\rangle>0$，由于

$$\langle k^*,f(x)-f(z_1)\rangle=\langle k^*,f(x)-f(z)+f(z)-f(z_1)\rangle=\langle k^*,f(x)-f(z)\rangle+\langle k^*,f(z)-f(z_1)\rangle>0$$

再根据(11)式，可得

$$\langle k^*,f(z)-f(z_1)\rangle>0 \tag{15}$$

于是有 $\langle k^*,f(z)-f(z_1)\rangle>0$，此与(13)式矛盾。

2）若 $0<\alpha<\beta<1$，则 $\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\in(0,1)$，令 $z_2=y+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(x,y,\lambda)$。则由条件 E 有

$$z_2+\alpha\eta(x,z_2,\lambda)=y+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta\left(x,y+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(x,y,\lambda),\lambda\right)=$$

$$y+\left[\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}+\alpha\left(1-\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right)\right]\eta(x,y,\lambda)=y+\beta\eta(x,y,\lambda)=z$$

综合上式及(8)式有 $f(z_2)-f(z)\in D$ 或 $f(x)-f(z)\in D$。即 $\langle k^*,f(z_2)-f(z)\rangle\geqslant 0$ 或 $\langle k^*,f(x)-f(z)\rangle\geqslant 0$。

则由(11)式可知

$$\langle k^*,f(z_2)-f(z)\rangle\geqslant 0 \tag{16}$$

令 $\mu=\frac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)\beta}$，则 $\mu\in(0,1)$，且

$$z+(1-\mu)\eta(y,z,\lambda)=y+\beta\eta(x,y,\lambda)+(1-\mu)\eta(y,y+\beta\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$

$$y+\beta\mu\eta(x,y,\lambda)=y+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\eta(x,y,\lambda)=z_2$$

由 $f(y)-f(z)\notin\{0_Y\}$ 及 f 的 η 是 D-半严格半预不变真拟凸性，有 $f(z)-f(z_2)\in \operatorname{int} D$ 或 $f(y)-f(z_2)\in \operatorname{int} D$。

即
$$\langle k^*,f(y)-f(z_2)\rangle>0 \text{ 或} \langle k^*,f(z)-f(z_2)\rangle>0 \tag{17}$$

若 $\langle k^*,f(z)-f(z_2)\rangle>0$，则有

$$\langle k^*,f(y)-f(z_2)\rangle=\langle k^*,f(y)-f(z)+f(z)-f(z_2)\rangle=\langle k^*,f(y)-f(z)\rangle+\langle k^*,f(z)-f(z_2)\rangle>0$$

再由(11)式可得 $\langle k^*,f(z)-f(z_2)\rangle>0$。故有 $\langle k^*,f(z)-f(z_2)\rangle>0$，这与(16)式矛盾。

情形 3，若 $0<\beta=\alpha<1$，显然(8)式与(9)式矛盾。综上所述，f 在 K 上关于 η 是 D-半预不变真拟凸映射。

证毕

5 向量 D-半预不变真拟凸性在向量优化中的应用

考虑如下的隐约束向量优化问题(VP_0)$\min_{x\in K} f(x)$。首先给出向量优化问题(VP_0)解的基本定义。

定义 9[15] 令 $f(K)=\bigcup_{x\in K}f(x)$,则

1) 称点 $\bar{x}\in K$ 是(VP_0)的全局有效解,如果 $(f(\bar{x})-D\backslash\{0_Y\})\cap f(K)=\varnothing$;称点 $\bar{x}\in K$ 是(VP_0)的局部有效解,如果存在 $\bar{x}$ 的邻域 U 使得 $(f(\bar{x})-D\backslash\{0_Y\})\cap f(K\cap U)=\varnothing$。

2) 称 $\bar{x}$ 为(VP_0)的全局弱有效解,如果 $\bar{x}\in K$ 且 $(f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D)\cap f(K)=\varnothing$;称 $\bar{x}$ 为(VP_0)的局部弱有效解,如果存在 $\bar{x}\in K$ 及 $\bar{x}$ 的邻域 $U\subset X$,使得 $(f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D)\cap f(K\cap U)=\varnothing$。

下面给出向量 D-半预不变真拟凸型映射在向量优化问题(VP_0)中的一个应用。

定理 4 设 K 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的不变凸集,向量值映射 $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-半严格半预不变真拟凸的(或者 D-严格半预不变真拟凸的),则:1) (VP_0)的任何局部弱有效解为(VP_0)的全局弱有效解;2) (VP_0)的任何局部有效解为(VP_0)的全局有效解。

证明 只需要证明 1),则 2)可以类似证明。若 $\bar{x}$ 是(VP_0)的局部弱有效解,则存在 $\bar{x}\in K$ 且存在的邻域 $U\subset X$使得

$$\bar{x}\in U \text{ 且} (f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D)\cap f(K\cap U)=\varnothing \tag{18}$$

假设 $\bar{x}$ 不是(VP_0)的全局弱有效解,即 $(f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D)\cap f(K)\neq\varnothing$,则存在 $x_0\in K$,使得 $f(x_0)\in f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D$。

因为集合 K 是关于 η 的半不变凸集,且 $f:K\to Y$ 关于 η 是 D-半严格半预不变真拟凸的(或 D-严格半预不变真拟凸的),所以对任意的 $\alpha\in(0,1)$,$\lambda\in(0,1)$ 有 $\bar{x}+\alpha\eta(\bar{x},x_0,\lambda)\in K$,且 $f(\bar{x}+\alpha\eta(\bar{x},x_0,\lambda))\in f(x_0)-\mathrm{int}\ D$ 或 $f(\bar{x}+\alpha\eta(\bar{x},x_0,\lambda))\in f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D$。

当 $f(\bar{x}+\alpha\eta(\bar{x},x_0,\lambda))\in f(x_0)-\mathrm{int}\ D$ 时,可得

$$f(\bar{x}+\alpha\eta(\bar{x},x_0,\lambda))\in f(x_0)-\mathrm{int}\ D\subset f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D-\mathrm{int}\ D\subset f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D$$

所以对任意的 $\alpha\in(0,1)$,$\lambda\in(0,1)$ 均有

$$f(\bar{x}+\alpha\eta(\bar{x},x_0,\lambda))\in f(\bar{x})-\mathrm{int}\ D \tag{19}$$

而当 α 充分小时,$\bar{x}+\alpha\eta(\bar{x},x_0,\lambda)\in K\cap U$,则(19)式与(18)式矛盾。故 $\bar{x}$ 是(VP_0)的全局弱有效解。 证毕

下面用例 5 来说明定理 4 是可行的。

例 5 令 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$f(x)=(f_1(x),f_2(x))$,$f_1(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}|x|, & |x|\leqslant 1\\ -\dfrac{1}{2}, & |x|\geqslant 1\end{cases}$,$f_2(x)=\begin{cases}-5|x|, & |x|\leqslant 1\\ -5, & |x|\geqslant 1\end{cases}$,$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y+\lambda, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x-y-\lambda, & x\leqslant 0,y\leqslant 0\\ x-y+\lambda, & x>1,y<-1\\ x-y-\lambda, & x<-1,y>1\\ y-x+\lambda, & -1\leqslant x\leqslant 0,y\geqslant 0\\ y-x-\lambda, & -1\leqslant y\leqslant 0,x\geqslant 0\\ y-x-\lambda, & 0\leqslant x\leqslant 1,y\leqslant 0\\ y-x+\lambda, & 0\leqslant y\leqslant 1,x\leqslant 0\end{cases}$。

由定理 6 容易验证 f 在 $K=R$ 上是 D-半严格半预不变真拟凸映射。根据有效解的定义亦可验证$\bar{x}=1$是优化问题(VP_0)的一个局部有效解,也是(VP_0)的全局有效解,故定理 4 是可行的。

参考文献:

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80(2): 545-550.

[2] Ben-Israel A, Mond B. What is invexity?[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 1986, 28: 1-9.

[3] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming [J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1998, 38: 177-189.

[4] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256(1): 229-241.

[5] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258 (1): 287-308.

[6] Yang X Q, Chen G. A class of nonconvex functions and prevariational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 169(2): 359-373.

[7] Peng Z Y, Chang S S. Some properties of semi-G-preinvex-functions[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17 (3): 873-884.

[8] Antczak T. G-pre-invex functions in mathematical programming[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217: 212-226.

[9] Kazmi K R. Some remarks on vector optimization problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1998, 96(1): 133-138.

[10] Peng J W, Zhu D L. On D-preinvex type functions[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2006, Article ID 93532: 1-14 .

[11] Long X J, Peng Z Y, Zeng B. Remark on cone semistrictly preinvex functions[J]. Optimization Letters, 2009, 3(3): 337-345.

[12] 彭建文. 向量值映射 D-η-预不变真拟凸的性质[J]. 系统科学与数学, 2003, 23(3): 306-314.
Peng J W. Properties of D-η-properly prequasiinvex function[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2003, 23(3): 306-304.

[13] Fulga C, Preda V. Nolinear programming with E-preinvex and local E-preinvex functions[J]. Journal of Operational Research, 2009, 192: 737-743.

[14] 彭建文. 广义凸性及其在最优化问题中的应用[D]. 呼和浩特: 内蒙古大学理工学院, 2005.
Peng J W. Generalized conveity with applications in optimization problems[D]. Hohhot: Institute of Technology, Inner Mongolia University, 2005.

[15] 彭再云, 王堃颖, 赵勇, 等. D-η-半预不变凸映射的性质及其应用[J]. 应用数学与力学, 2014, 35(2): 202-211.
Peng Zai-yun, Wang Kun-ying, Zhao Yong, et al. Characterizations and applications of D-η-semipreinvex mappings [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2014, 35(2): 202-211.

Operations Research and Cybernetics

Characterizations and Criterions of *D*-Semiprequasi-invex Mappings

PENG Zaiyun[1], LI Keke [1,2], TANG Ping[3], HUANG Yingquan[4]

(1. Collegel of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;

2. Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;

3. Collegel of Science, Chongqing University of Art and Sciences, Chongqing 402160;

4. Collegel of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: A class of new vector valued generalized convex mappings—D-semiprequsai-invex mappings, which is a true generalization of D-prequasi-invex mapping[14] and D-semipre-invex mapping[15], is given in this paper. Firstly, examples are given to show the existence of semi-invex sets and D-semiprequasi-invex mappings. Secondly, the density result of corresponding set and a criterion of D-semiprequasi-invexity under the condition of D-lower semicontinuous are given. Then, the relationships among D-semiprequasi-invexity, D-strictly semiprequasi-invexity and D-semistrictly semiprequasi-invexity are discussed; Finally, an important application of D-semiprequasi-invexity in vector optimization problem is obtained, and some examples are given to illustrate the results.

Key words: semi-invex sets; D-semi-prequasi-invex mappings; criterion; vector optimization; applications

(责任编辑 黄 颖)