2014 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2014
第 31 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 31 No. 5

DOI:10.11721/cqnuj20140514

双弦幂积分不等式的注记*

曾春娜，柏仕坤
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:设 K 为 R^d 中的有界凸体,σ_1,σ_2 分别为 K 被随机直线 G_1,G_2 截得的弦长，则称 $I_{m,n}(K)=\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^m\sigma_2^n\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2$ 为凸体 K 关于 m,n 的双弦幂积分,双弦幂积分是积分几何中弦幂积分概念的推广,经典的等周不等式、弦幂积分完全不等式、R^d 中弦幂积分统一不等式都隶属于双弦幂积分不等式范畴,故研究关于双弦幂积分的不等式具有重大意义。利用线偶的运动不变密度、Hölder 不等式及 Schwarz 不等式，得到几个关于双弦幂积分的不等式，即文中的(7)、(10)、(12)、(16)、(17)、(22)和(23)式。

关键词:凸体;弦幂积分;双弦幂积分;运动不变密度
中图分类号:O186.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)05-0081-04

1 引言及预备知识

积分几何又称几何概率,起源于 18 世纪概率论中著名的 Buffon 投针问题。1935－1939 年间,Blaschke 学派以 Integral geometry 为题的一系列文章的主要根源在于几何概率,目的是能否将概率思想有效地应用于几何方面,特别是大范围微分几何和凸体理论上。积分几何最初受到 Barbier、Crofton、Sylvester、Poincare、Blaschke、Chern、Weil、Santalo 等老一辈数学家的广泛关注;Gardner、Schneider、Lutwak、Howard、Burago、Zhang (张高勇)、Zhou (周家足) 等当代数学家对积分几何的发展做出了巨大的贡献。积分几何最初研究几何体的不变测度,如欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中线偶、$\mathbf{R}^n$ 中线集的不变测度。上世纪中叶,在 Gelfand 和 Helgason 的工作中,他们更多地引入了函数、算子以及凸性 (如 Radon 变换),这极大地丰富了积分几何理论以及运用。随后,Minkowski 进一步讨论了几何凸体的各阶测度间的关系,由此而诞生了几何学分支"几何不等式"。几何不等式的发展和应用浸入到几乎数学和物理的各个分支,是积分几何中最重要的研究领域。

d 维欧氏空间 $\mathbf{R}^d$ 中的任意子集 K 称为凸集,如果 K 中的任意两点必然是 K 中的某直线段的端点,具有非空内点的凸集称为凸体。设 K 表示 R^d 中的凸体,将一直线 G 随机地投掷与 K 相交。σ 为 K 被 G 截出的弦长,$\mathrm{d}G$ 为直线的运动不变密度,则[1,3]

$$I_n(K)=\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^n\mathrm{d}G,n=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

称为凸体 K 的第 n 阶弦幂积分,$I_n(K)$($n=0,1,2,\cdots$)称为凸体 K 的弦幂积分序列。

在 $\mathbf{R}^2$ 中,设 L 为∂K 的长度,F 为 K 的面积,则

$$I_0(K)=L,I_1(K)=\pi F \tag{2}$$

则经典的等周不等式 $L^2\geqslant 4\pi F$ 可以表示为 $I_0^2(K)\geqslant 4I_1(K)$。

在 $\mathbf{R}^3$ 中，有著名的 Crofton 公式[1,3]：

$$I_3(K)=\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^3\mathrm{d}G=3F^2 \tag{3}$$

并且吴大任先生有以下重要的弦幂积分完全不等式组[9]：

* **收稿日期**:2013-12-01 **网络出版时间**:2014-9-17 22:37
资助项目:国家自然科学基金专项基金(No. 11326073);重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ130614)
作者简介:曾春娜,女,副教授,博士,研究方向为积分几何、凸几何分析,E-mail:zengchn@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140917.2237.013.html

$$\left(\frac{n+2}{\pi^2}I_n(K)\right)^3-\left(\frac{3}{\pi^2}I_1(K)\right)^{n+2}\begin{cases}\geqslant 0,当\ n=0\ 时\\ =0,当\ n=1\ 时\\ \leqslant 0,当\ n=2,3\ 时\\ =0,当\ n=4\ 时\\ \geqslant 0,当\ n\geqslant 5\ 时\end{cases}$$

在 $\mathbf{R}^4$ 中，有公式[1,8]：

$$I_4(K)=\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^4\mathrm{d}G=6F^2E(r) \tag{4}$$

其中 $E(r)=\frac{1}{F^2}\int_{P_1,P_2\in K}r\,\mathrm{d}P_1\mathrm{d}P_2$，$r$ 表示 P_1 和 P_2 两点间的距离。

关于弦幂积分任德麟先生得到了 $\mathbf{R}^d$ 中重要的弦幂积分统一不等式[2]：

$$\Delta_n^{(d)}\begin{cases}\geqslant 0,当\ n=0\ 时\\ =0,当\ n=1\ 时\\ \leqslant 0,当\ n=2,3,\cdots,d\ 时\\ =0,当\ n=4\ 时\\ \geqslant 0,当\ n=d+2,d+3,\cdots\end{cases}$$

可见，研究弦幂积分不等式是非常有意义的。双弦幂积分为弦幂积分概念的推广。在2004年的国际积分几何会议上,谢鹏等报告了随机针偶与凸体相交的几何概率问题的一些成果,引起了国内外一些专家学者的关注。Zhang(张高勇)提出：能否将相交的线性空间偶与一凸体相交,建立凸体的双弦幂积分概念,进而开创积分几何新的研究领域。随后,谢鹏等在直线偶的情形下，给出了双弦幂积分的定义以及一些性质。

设 K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的有界凸体,σ_1,σ_2 分别为 K 被随机直线 G_1,G_2 截得的弦长，则称[10]

$$I_{m,n}(K)=\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^m\sigma_2^n\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2 \tag{5}$$

为凸体 K 关于 m,n 的双弦幂积分,其中 m,n 为非负整数,$\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2$ 为直线偶 G_1,G_2 的运动不变密度。

引理1[10] 设 K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的有界凸体,σ_1,σ_2 分别为 K 被随机直线 G_1,G_2 截得的弦长，则有下列双弦幂积分等式成立

$$I_{m,n}(K)=I_{n,m}(K) \tag{6}$$

自2004年以来,在双弦幂积分的研究方面,中国学者已经取得了一些成果。在文献[10]中，谢鹏等人给出圆盘上几个双弦幂积分公式,并获得了几个弦幂积分不等式。在文献[6]中,蒋君、徐树立讨论了双弦幂积分的对称性和次可加性。在文献[4]中,范媛媛研究了圆盘上的双弦幂积分,通过微积分方法,得到了圆盘上的双弦幂积分值。在文献[5]中,范媛媛同样研究了空间中凸体的双弦幂积分的性质,同时讨论了空间上相交线偶与凸体相交的几何概率。

本文主要介绍积分几何中的相关知识,利用Hölder不等式及积分几何中的一些结果,得到了 $\mathbf{R}^d$ 中几个双弦幂积分不等式。

2 几个双弦幂积分不等式

定理1 设 K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的凸体,m,n 为非负整数，则

$$I_{m+n,0}^2(K)\leqslant I_{2m,0}(K)I_{2n,0}(K) \tag{7}$$

证明 根据Schwarz不等式,有

$$\left(\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma^{m+n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right)^2\leqslant\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma^{2m}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma^{2n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2 \tag{8}$$

即

$$I_{m+n,0}^2(K)\leqslant I_{2m,0}(K)I_{2n,0}(K) \tag{9}$$

证毕

定理2 (双弦幂积分的循环不等式)设 K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的凸体,若 $0\leqslant m\leqslant n\leqslant p$,$m,n,p$ 均为整数,则

$$I_{n,0}^{p-m}(K)\leqslant I_{m,0}^{p-n}(K)I_{p,0}^{n-m}(K) \tag{10}$$

证明 首先,$p\left(\frac{n-m}{p-m}\right)+m\left(\frac{p-n}{p-m}\right)=n$，且 $\frac{n-m}{p-m}+\frac{p-n}{p-m}=1$。由Hölder不等式,则

$$I_{n,0}(K)\leqslant\left[\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma^{m\left(\frac{p-n}{p-m}\right)\cdot\frac{p-m}{p-n}}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right]^{\frac{p-n}{p-m}}\cdot\left[\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma^{p\left(\frac{n-m}{p-m}\right)\cdot\frac{p-m}{n-m}}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right]^{\frac{n-m}{p-m}}=$$

$$\left[\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma^{m}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right]^{\frac{p-n}{p-m}}\cdot\left[\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma^{p}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right]^{\frac{n-m}{p-m}}=$$

$$I_{m,0}(K)^{\frac{p-n}{p-m}}I_{p,0}(K)^{\frac{n-m}{p-m}}$$

所以

$$I_{n,0}^{p-m}(K)\leqslant I_{m,0}^{p-n}(K)I_{p,0}^{n-m}(K)\tag{11}$$

证毕

定理 3　设 K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的凸体，则有如下的双弦幂积分不等式

$$I_{m,n}^2(K)\leqslant I_{2m,0}(K)I_{2n,0}(K)\tag{12}$$

特别地，$I_{m,m}(K)\leqslant I_{2m,0}(K)$。当 $m>n$ 时，$I_{m,n}^2(K)\leqslant I_{4n,0}(K)I_{2(m-n),0}(K)$。

证明　根据 Schwarz 不等式，则

$$\left(\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^m\sigma_2^n\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right)^2\leqslant\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{2m}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_2^{2n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\tag{13}$$

即

$$I_{m,n}^2(K)\leqslant I_{2m,0}(K)I_{2n,0}(K)\tag{14}$$

特别地，当 $m=n$ 时，有

$$I_{m,m}(K)\leqslant I_{2m,0}(K)\tag{15}$$

当 $m>n$ 时，根据 Schwarz 不等式和(15)式，则

$$\left(\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^m\sigma_2^n\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right)^2\leqslant\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{2n}\sigma_2^{2n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{2(m-n)}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\leqslant$$

$$\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{4n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{2(m-n)}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2$$

证毕

定理 4　(Minkowski 不等式)设 K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的凸体，则有如下的双弦幂积分不等式

$$I_{m,n}^2(K)\leqslant I_{0,0}(K)I_{2m,2n}(K)\tag{16}$$

$$I_{m,n}^2(K)\leqslant I_{m-1,n-1}(K)I_{m+1,n+1}(K)\tag{17}$$

证明　根据 Schwarz 不等式，则

$$\left(\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^m\sigma_2^n\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right)^2\leqslant\int_{G_1\cap G_2\in K}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{2m}\sigma_2^{2n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\tag{18}$$

故

$$I_{m,n}^2(K)\leqslant I_{0,0}(K)I_{2m,2n}(K)\tag{19}$$

又

$$\left(\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^m\sigma_2^n\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\right)^2\leqslant\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{m-1}\sigma_2^{n-1}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{m+1}\sigma_2^{n+1}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\tag{20}$$

故

$$I_{m,n}^2(K)\leqslant I_{m-1,m-1}(K)I_{m+1,n+1}(K)\tag{21}$$

证毕

定理 5　设 K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的凸体，若 n 为整数，则

1)当 n 为奇数时

$$\binom{2n}{0}I_{2n,0}+\binom{2n}{2}I_{2n-2,2}\cdots+\binom{2n}{n-1}I_{n+1,n-1}\geqslant\binom{2n}{1}I_{2n-1,1}+\binom{2n}{3}I_{2n-3,3}\cdots\frac{1}{2}\binom{2n}{n}I_{n,n}\tag{22}$$

当 n 为偶数时

$$\binom{2n}{0}I_{2n,0}+\binom{2n}{2}I_{2n-2,2}\cdots+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}I_{n,n}\geqslant\binom{2n}{1}I_{2n-1,1}+\binom{2n}{3}I_{2n-3,3}\cdots\binom{2n}{n-1}I_{n+1,n-1}\tag{23}$$

证明　由下列不等式

$$0\leqslant\int_{G_1\cap G_2\in K}(\sigma_1-\sigma_2)^{2n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2=\int_{G_1\cap G_2\in K}\left(\binom{2n}{0}\sigma_1^{2n}-\binom{2n}{1}\sigma_1^{2n-1}\sigma_2\cdots+\binom{2n}{2n}\sigma_2^{2n}\right)\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2=$$

$$\binom{2n}{0}\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{2n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2-\binom{2n}{1}\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^{2n-1}\sigma_2\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2\cdots+\binom{2n}{2n}\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_2^{2n}\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2=$$
$$\binom{2n}{0}I_{2n,0}-\binom{2n}{1}I_{2n-1,1}\cdots+\binom{2n}{2n}I_{0,2n}$$

即

$$\binom{2n}{0}I_{2n,0}+\binom{2n}{2}I_{2n-2,2}\cdots+\binom{2n}{2n}I_{0,2n}\geqslant\binom{2n}{1}I_{2n-1,1}+\binom{2n}{3}I_{2n-3,3}\cdots+\binom{2n}{2n-1}I_{1,2n-1}\tag{24}$$

当 n 为奇数时，由(6)式和(23)式，有

$$2\binom{2n}{0}I_{2n,0}+2\binom{2n}{2}I_{2n-2,2}\cdots+2\binom{2n}{n-1}I_{n+1,n-1}\geqslant2\binom{2n}{1}I_{2n-1,1}+2\binom{2n}{3}I_{2n-3,3}\cdots\binom{2n}{n}I_{n,n}\tag{25}$$

即(22)式。

类似地，当 n 为偶数时，由(6)式和(14)式，有

$$2\binom{2n}{0}I_{2n,0}+2\binom{2n}{2}I_{2n-2,2}\cdots+\binom{2n}{n}I_{n,n}\geqslant2\binom{2n}{1}I_{2n-1,1}+2\binom{2n}{3}I_{2n-3,3}\cdots+2\binom{2n}{n-1}I_{n+1,n-1}$$

即(23)式。　证毕

参考文献：

[1] Ren D. Topics in integral geometry[M]. Singapore: World Scientific, 1994.

[2] Ren D. Two topics integral geometry[C]//Proceedings of the 1982 symposium on differential geometry and differential equations(Shanghai-Hefei). Beijin: Science Press, 1984, 309-333.

[3] Santalo L. Integral geometry and geometric probability [M]. London: Addison-Wesley, 1976.

[4] 范媛媛. 双弦幂积分在圆盘上的一些结果[J]. 滁州学院学报, 2008, 10(3), 14-17.
Fan Y Y. Some results of double chord-power integrals on disc [J]. Journal of Chuzhou University, 2008, 10(3): 14-17.

[5] 范媛媛. R^3 上相交线偶与凸体相交的几何概率问题[J]. 滁州学院学报, 2009, 11(6), 98-100.
Fan Y Y. Geometric probability problem of pairs of intersecting lines and covex body in R^3[J]. Journal of Chuzhou University, 2009, 11(6), 98-100.

[6] 蒋君, 徐树立. 双弦幂积分性质的研究[J]. 江汉大学学报: 自然科学版, 2008, 36(3): 6-7.
Jiang J, Xu T. Study on properties of double chord-power integrals[J]. Journal of Jianghan University: Natural Science, 2008, 36(3): 6-7.

[7] Klain D, Rota G. Introduction to geometric probablity[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[8] 匡继昌. 常用不等式[M]. 第三版. 济南: 山东科学教育出版社, 2004: 3-24.
Kuang J. Common inequalities[M]. The third edition. Jinan: Shandong Science and Education Press, 2004: 3-24.

[9] Wu D. On the relations between the integrals for the power a convex body[J]. Acta Nankai University, 1985, 18(1): 1-6.

[10] Liang J. Double chord-power integrals of a convex body in $\mathbf{R}^2$[C]//In: EricL grinberged integral geometry and convexity proceedings of the international conference Wuhan, China 2004. Singapore: World Scientific, 2006, 177-188.

[11] Xie P, Cheng M L, Xie K Y. The kinematic density for pairs of intersecting lines[J]. Mathematic Applicata, 2008, 1(1): 8-11.

Some Notes on the Double Chord-power Integral

ZENG Chunna, BAI Shikun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Set K to R^d the bounded convex body, σ_1, σ_2 respectively is random linear section G_1, G_2 chord length $I_{m,n}(K)=\int_{G_1\cap G_2\in K}\sigma_1^m\sigma_2^n\mathrm{d}G_1\mathrm{d}G_2$ is called a convex body K about the m, n double chord-power integrals, double chord-power integrals is integral geometry chord-power integrals in the promotion of the concept of classic isoperimetric inequality, chord-power integrals inequality completely, unification of chord-power integrals R^d are affiliated to the double chord-power integrals inequality category, so the research about the inequality of the double chord-power integrals is of great significance. We use line coupling movement constant density, Hölder inequation, Schwarz inequality, got several inequalities of the double chord-power integrals of the (7), (10), (12), (16) and (17), (22) and (23).

Key words: convex body; chord-power integral; double chord-power integral; kinematic density

（责任编辑　游中胜）