DOI:10.11721/cqnuj20140517

四阶非线性波方程整体解的存在唯一性*

喻朝阳
(西昌学院 工程技术学院,四川 西昌 615013)

摘要:梁和板振动是重要的物理现象,在数学上通常用四阶非线性波动方程来研究,所以探讨四阶波动方程具有重要的理论价值和实际意义。方程解的存在唯一性是研究方程解的性态和分析解的性质的前提和基础。本文研究了四阶非线性弱阻尼波动方程 $u_{tt}+\alpha u_t+\Delta^2 u=f(t,x,u,\nabla u)$ 的整体解的存在唯一性。利用了空间序列技巧和能量估计方法,验证了当非线性项 $f(t,x,u,\nabla u)$ 满足一定条件时,方程存在整体解;并证明了四阶非线性弱阻尼波动方程整体解的唯一性。本文主要扩展了非线性项,在已有文献中的非线性项为 $|u|^{p-1}u$ 或者为 $f(u)$,不含有导数,而本文研究的非线性项为 $f(t,x,u,\nabla u)$,所以适用范围更加广泛。

关键词:四阶非线性波动方程;弱阻尼;整体解
中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2014)05-0095-05

本文研究了如下四阶非线性弱阻尼波动方程的整体解

$$u_{tt}+\alpha u_t+\Delta^2 u=f(t,x,u,\nabla u),(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+ \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),x\in\Omega \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega}=\Delta u|_{\partial\Omega}=0,\ t>0 \tag{3}$$

其中 $\alpha>0$,Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集,边界为$\partial\Omega$。

方程(1)是一类梁振动方程[1],在不具有耗散项的情况下 Levandosky[1] 研究了方程 $u_{tt}+\Delta^2 u+u=|u|^{p-1}u$ 对应的线性方程的 L^p-L^q 估计和时空估计,并利用这些估计研究了方程 $u_{tt}+\Delta^2 u+u+Au_t=|u|^{p-1}u$ 的 Cauchy 问题局部解的存在性及渐进性质和低能量散射理论。陈勇明、杨晗等在文献[2-3]中利用位势井理论研究了方程 $u_{tt}+\Delta^2 u+u=|u|^{p-1}u$ 整体解的存在性、唯一性及光滑性,构造不稳定集证明了解在有限时刻发生爆破;在文献[4]中研究了具耗散项的非线性四阶波动方程 $u_{tt}+\Delta^2 u+u+Du_t=|u|^{p-1}u$ 初边值问题的爆破性质。张艳丽、张珏在文献[5]中利用整体迭代法证明了一类半线性四阶波动方程 Cauchy 问题 $u_{tt}+\Delta^2 u+u=f(u)$ 整体经典解的存在性。卞春雨在文献[6]中讨论了当 $n\geqslant 4$ 时,一类弱阻尼非线性四阶波动方程的初边值问题 $u_{tt}+\Delta^2 u+u+Du_t=f(u)$ 的弱解存在唯一性的条件。高阶非线性波动方程已有一些研究结果[7-12],但是关于形如式(1)~(3)的方程的整体解还没有相关结果。方程解的存在唯一性是研究解性质和特征的前提和基础,所以一些方程的存在唯一性得到文献[13]~[17]的研究。本文利用马天在文献[18]中提出的空间序列方法探讨了方程(1)~(3)初边值问题的整体解存在唯一的条件。

本文的安排如下:第一部分给出预备知识,定义了弱解,并给出了一个抽象定理;第二部分是主要结论,证明了整体解的存在唯一性。

文中 C 表示可变的常数,$\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数。

1 预备知识

引入两个空间序列$\begin{cases}X\subset H_2\subset X_2\subset X_1\subset H\\ X_2\subset H_1\subset H\end{cases}$,其中 H,H_1,H_2 是 Hilbert 空间,X 是线性空间,X_1,X_2 是 Ba-

* **收稿日期**:2013-05-03　　**修回日期**:2013-05-27　　**网络出版时间**:2014-9-17 22:37
资助项目:四川省教育厅自然科学基金(No.11ZA143)
作者简介:喻朝阳,男,讲师,重庆师范大学校友,研究方向为数学分析,E-mail:zhaoyangyu123@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140917.2237.018.html

nach 空间，且所有包含是稠密嵌入。假设

$$\begin{cases} L: X \to X_1 \text{ 是一一稠密的线性算子} \\ \langle Lu, v\rangle_H = \langle u, v\rangle_{H_1}, \forall u, v \in X \end{cases} \tag{4}$$

算子 L 有特征向量序列$\{e_k\}$满足

$$Le_k = \lambda_k e_k (k=1,2,\cdots) \tag{5}$$

使得$\{e_k\} \subset X$ 是 H, H_1, H_2 的公共正交基。

考虑如下的波动方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dt^2} + k\dfrac{du}{dt} = G(u), k \geqslant 0 \\ u(0) = \varphi, u_t(0) = \psi \end{cases} \tag{6}$$

其中 $G: X_2 \times \mathbf{R}^+ \to X_1^*$ 是一个映射。

定义 1 令$(\varphi, \psi) \in X_2 \times H_1$，称 $u \in W^{1,\infty}((0,T), H_1) \cap L^\infty((0,T), X_2)$为方程(6)的一个全局弱解，若对任意 $v \in X_1$ 有

$$(u_t, v)_H + k(u, v)_H = \int_0^t \langle Gu, v\rangle dt + (\psi, v)_H + k(\varphi, v)_H。$$

令算子 $G = A + B: X_2 \times \mathbf{R}^+ \to X_1^*$。给出以下几个条件：

(A1)存在 C^1 泛函 $F: X_2 \to \mathbf{R}^1$ 使得$\langle Au, Lv\rangle = \langle -DF(u), v\rangle, \forall u, v \in X$；

(A2)泛函 $F: X_2 \to \mathbf{R}^1$ 是强制的，即 $F(u) \to \infty \Leftrightarrow \|u\|_{X_2} \to \infty$；

(A3)算子 B 满足 $\left|\int_0^t \langle Bu, v\rangle dt\right| \leqslant C\int_0^t [F(u) + \|u_t\|_{H_1}^2 + g(t)]dt + C_1[F(u) + 1]$。

其中 $\forall u \in C^1([0,\infty), X), u(0) = \varphi, g \in L^1(0,T)$。

引理 2[18] 令 $G: X_2 \times \mathbf{R}^+ \to X_1^*$ 是弱连续的，$(\varphi, \psi) \in X_2 \times H_1$。那么

1)若 $G = A + B$ 满足(A1)～(A3)，方程(6)有整体弱解

$$u \in W^{1,p}((0,T), H_1) \cap L^\infty((0,T), X_2);$$

2)此外，若 $G = A + B$ 还满足

$$|\langle Gu, v\rangle| \leqslant CF(u) + \frac{1}{2}\|v\|_H^2 + g(t) \tag{7}$$

其中 $g(t) \in L^1(0,T)$，那么 $u \in W^{2,2}((0,T); H)$。

2 整体解的存在唯一性

首先给出整体解的存在性定理。

定理 3 令$(\varphi, \psi) \in H^4(\Omega) \times H^2(\Omega)$。若 $f(t, x, u, \nabla u)$是 C^1 的，且满足

$$\begin{cases} |f| + |D_t f| \leqslant C|u|^q + g_1(x,t), \begin{cases} 1 \leqslant q \leqslant \dfrac{n}{n-8}, \text{若 } n > 8 \\ 1 \leqslant q \leqslant \infty, \text{若 } n \leqslant 8 \end{cases} \\ |D_\xi f(t, x, \xi, \eta)| + |D_\eta f(t, x, \xi, \eta)| \leqslant C \end{cases} \tag{8}$$

其中，$g_1(x,t) \in L^2((0,T); \Omega)$。那么，方程(1)～(3)存在整体解

$$u \in W^{1,\infty}((0,T), H^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), H^4(\Omega)) \cap W^{2,2}((0,T), L^2(\Omega))。$$

证明 取空间序列为

$$X = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0\}, \ X_1 = L^2(\Omega), X_2 = X$$

在 H^4 范数下完备化，$H = L^2(\Omega)$，$H_1 = X$ 在 H^4 范数下完备化，$H_2 = X_2$，其中 H_1 与 H_2 的内积定义为

$$(u, v)_{H_1} = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx, (u, v)_{H_2} = \int_\Omega \Delta^2 u \Delta^2 v dx$$

线性算子 $L: X \to X_1$ 定义为 $Lu = \Delta^2 u$，显然 L 满足条件(4)和(5)。

定义映射

$$G=A+B:X_2\times\mathbf{R}^+\to X_1^*,\langle Au,v\rangle=-\int_\Omega\Delta^2uv\mathrm{d}x,\langle Bu,v\rangle=-\int_\Omega f(t,x,u,\nabla u)v\mathrm{d}x,$$

显然 $G=A+B:X_2\times\mathbf{R}^+\to X_1^*$ 是弱连续的，并且

$$\langle Au,Lv\rangle=-\int_\Omega\Delta^2u\Delta^2v\mathrm{d}x=\langle -DF(u),v\rangle,$$

其中 $F(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta^2u|^2\mathrm{d}x$，而 $F(u)\to\infty\Leftrightarrow\|u\|_{H^4}\to\infty$，所以 $F(u)$ 是强制的。

因此引理 2 中的条件 A1)、A2)成立。

由条件(8)、Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入不等式可得

$$\left|\int_0^t\langle Bu,Lu_t\rangle\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^t\int_\Omega f(t,x,u,\nabla u)\Delta^2u_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^t\int_\Omega[(f(t,x,u,\nabla u)\Delta^2u)_t-f_t(t,x,u,\nabla u)\Delta^2u]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\int_\Omega|f(t,x,u,\nabla u)||\Delta^2u|\mathrm{d}x+\int_\Omega|f(t,x,\varphi,\nabla\varphi)||\Delta^2\varphi|\mathrm{d}x+\int_0^t\int_\Omega|f_t(t,x,u,\nabla u)||\Delta^2u|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|f(t,x,u,\nabla u)|\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta^2u|^2\mathrm{d}x+C+\int_0^t[\frac{1}{2}\int_\Omega|f_t(t,x,u,\nabla u)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta^2u|^2\mathrm{d}x]\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\int_\Omega[|u|^{2q}+(g_1(x,t))^2]\mathrm{d}x+F(u)+C+\int_0^t[C\int_\Omega|u|^{2q}+(g_1(x,t))^2\mathrm{d}x+F(u)]\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C[\|u\|^2_{W^{4,2}}+F(u)]+C+C\int_0^t[\|u\|^2_{W^{4,2}}+g(t)+F(u)]\mathrm{d}t\leqslant CF(u)+C+C\int_0^t[g(t)+F(u)]\mathrm{d}t$$

其中，$g(t)=\int_\Omega g_1^2(t,x)\mathrm{d}x\in L^1(0,T)$。因此引理 2 中的条件(A3)成立。

由引理 2 可得，方程(1)～(3)存在整体解 $u\in W^{1,\infty}((0,T),H^2(\Omega))\cap L^\infty((0,T),H^4(\Omega))$。

由条件(8)、Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入不等式可得

$$\langle Gu,v\rangle=\int_\Omega(\Delta^2u+f(t,x,u,\nabla u))v\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\Delta^2u+f(t,x,u,\nabla u)||v|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta^2u+f(t,x,u,\nabla u)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|v|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega[|\Delta^2u|^2+|f(t,x,u,\nabla u)|^2]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|v|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\int_\Omega[|\Delta^2u|^2+|u|^{2q}+|g(t,x)|^2]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|v|^2\mathrm{d}x\leqslant CF(u)+g_1(t)+\frac{1}{2}\|v\|^2$$

其中 $g(t)=\int_\Omega g_1^2(t,x)\mathrm{d}x\in L^1(0,T)$。即条件(7)成立。由引理 2 可知 $u\in W^{2,2}((0,T),L^2(\Omega))$。所以，方程(1)～(3)存在整体解

$$u\in W^{1,\infty}((0,T),H^2(\Omega))\cap L^\infty((0,T),H^4(\Omega))\cap W^{2,2}((0,T),L^2(\Omega))。$$ 证毕

定理 4　方程(1)～(3)的整体解唯一。

证明　假设 u,v 是方程(1)～(3)的整体解。

$$u_{tt}+\alpha u_t+\Delta^2u=f(t,x,u,\nabla u),$$

$$v_{tt}+\alpha v_t+\Delta^2v=f(t,x,v,\nabla v),$$

两式相减，令 $w=u-v$，则有 $w(0)=0,w_t(0)=0$，故

$$w_{tt}+\alpha w_t+\Delta^2w=f(t,x,u,\nabla u)-f(t,x,v,\nabla v)。$$

由微分中值定理，可得

$$w_{tt}+\alpha w_t+\Delta^2w=D_uf(t,x,\theta u+(1-\theta)v,\nabla u)+D_{\nabla u}f(t,x,u,\vartheta\nabla u+(1-\vartheta)\nabla v)\cdot\nabla w$$

用 w_t 与上式在 $L^2(\Omega)$ 中作内积，得

$$(w_{tt},w_t)+\alpha(w_tw_t)+(\Delta^2w,w_t)=$$

$$(D_uf(t,x,\theta u+(1-\theta)v,\nabla u),w_t)+(D_{\nabla u}f(t,x,u,\vartheta\nabla u+(1-\vartheta)\nabla v)\cdot\nabla w,w_t)$$

根据条件(8)和 Poicare 不等式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_t\|^2+\alpha\|w_t\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta w\|^2\leqslant C\|w\|\|w_t\|+C\|\nabla w\|\|w_t\|\leqslant$$

$$C(\|w\|^2+\|\nabla w\|^2+\|w_t\|^2)\leqslant C(\|\Delta w\|^2+\|w_t\|^2)$$

从而，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w_t\|^2+\|\Delta w\|^2)\leqslant C(\|\Delta w\|^2+\|w_t\|^2)$。

由 Gronwall 不等式可以得到 $\|w_t\|^2+\|\Delta w\|^2\leqslant 0$，从而，$w=0$，即 $u=v$。因此，方程(1)～(3)的整体解唯一。

证毕

参考文献：

[1] Levandosky P S. Decay estimates for fourth order wave equations [J]. J Diff Eqn,1998,143: 360-431.

[2] 陈勇明,谢海英,杨晗.一类非线性四阶波动方程整体弱解的光滑性[J].西南交通大学学报:自然科学版,2004,39(6):758-760.
Chen Y M,Xie H Y,Yang H. Smoothness of the global weak solutions for a kind of nonlinear fourth order wave equations[J]. Journal of Southwest Jiaotong University: Natural Science Edition,2004,39(6):758-760.

[3] 陈勇明,杨晗.一类非线性四阶波动方程解的爆破[J].西南师范大学学报:自然科学版,2004,29(4):545-548.
Chen Y M,Yang H. Blow up of solutions for a kind of nonlinear fourth-order wave equations[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science, 2004, 29(4):545-548.

[4] 陈勇明,杨晗.一类具耗散项的非线性四阶波动方程解的爆破[J].四川大学学报:自然科学版,2008,45(3):459-462.
Chen Y M,Yang H. Blow up of the solution for some nonlinear fourth-order wave equation with dissipative term[J]. Journal of Sichuan University: Natural Science Edition, 2008,45(3):459- 462.

[5] 张艳丽,张珏.一类四阶非线性波动方程整体经典解的存在性[J].四川师范大学学报:自然科学版,2007,30(1):53-57.
Zhang Y L,Zhang J. Existence of global classical solutions for a kind of fourth order nonlinear wave equations[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2007,30(1):53-57.

[6] 卞春雨.一类非线性四阶波动方程的初边值问题[J].哈尔滨师范大学:自然科学学报,2010,26(4):82-85.
Bian C Y. Initial boundary value problems for a class of nonlinear four order wave equations[J]. Natural Science Journal of Harbin Normal University,2010,26(4):82-85.

[7] 刘亚成,谢瑰林.高维强阻尼非线性波动方程[J].哈尔滨工程大学学报,1995,16(2):82-87.
Liu Y C Xie G L. Strongly damped nonlinear wave equation in higher-dimensions[J]. Journal of Harbin Engineering University,1995,16(2):82-87.

[8] Xie S L,Ji X M. The kink waves of a nonlinear quartic equation[J]. Journal of Southwest University for Nationalities:Natural Science Edition,2006,32(4):631-635.

[9] Xu R Z,Zhao X R,Shen J H. Asymptotic behaviour of solution for fourth order wave equation with dispersive and dissipative terms[J]. Applied Mathematics and Mechanics: English Edition,2008,29(2):235-238.

[10] 张宏伟,陈国旺.一类非线性四阶波动方程的位势井方法[J].数学物理学报,2003,23A(6):758-768.
Zhang H W,Chen G W. Potential well method for a class of nonlinear wave equations of fourth-order[J]. Acta Mathematiea Scientia,2003,23A(6):758-768.

[11] 王艳萍.一类非线性波方程整体解的存在性和不存在性[J].数学研究与评论,2009(1):164-168.
Wang Y P. The existence and non-existence of global solutions for a nonlinear wave equation[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition,2009(1):164-468.

[12] 逯丽清,李胜家,冯红银萍.一类非线性波动方程整体解的存在性[J].中北大学学报:自然科学版,2011,32(1):39-42.
Lu L Q,Li S J,Feng H YP. Existence of global solutions of a class of nonlinear wave equation[J]. Journal of North University of China:Natural Science,2011,32(1):39-42.

[13] 杨晓侠，张显文.广义 Tjon-Wu 方程 Chauchy 问题强解的存在唯一性和稳态解的存在性[J].高校应用数学学报,2009,24(4):483-492.
Yang X X,Zhang X W. Existence and uniqueness of strong solutions to the Cauchy problem of a generalized Tjon-Wu equation and existence of its stationary solutions[J]. Applied Mathematics Journal of Chinese Universities(Ser. A),2009,24(4):483-492.

[14] 马丽蓉.二维 Extended Fisher-Kolmogorov 方程解的存在唯一性[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27(5):42-45.
Ma L R. Existence and uniqueness of solution for two dimensional extended Fisher-Kolmogorov Equation[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science, 2010,27(5):42-45.

[15] 张兴秋.奇异四阶积分边值问题正解的存在唯一性[J].应用数学学报,2010,33(1):38-50.
Zhang X Q. Existence and uniqueness of positive solution for fourth-order singular integral boundary-value problems[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2010,33

(1):38-50.

[16] 李小娜,李宏飞,崔艳兰. 一类单调二元算子方程组解的存在唯一性定理[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2010,35(3):46-49.

Li X N,Li H F,Cui Y L. The Existence and uniqueness of solution theory for a kind of monotone systems of two binary operator equations[J]. Journal of Southwest China Normal University:Natural Science Edition,2010,35(3):46-49.

[17] 颜宝平. 带扰动倒向随机微分方程解的存在唯一性[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2008,31(3):289-292.

Yan B P. The Existence and uniqueness of solutions of perturbed backward stochastic differential equation[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science,2008,31(3):289-292.

[18] 马天. 偏微分方程理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2011.

Ma T. Theories and methods for partial differential equations[M]. Beijing:Science Press,2011.

Existence and Uniqueness of Global Solutions to the Nonlinear Fourth-order Wave Equations

YU Zhaoyang

(School of Engineering Science, Xichang College, Xichang Sichuan 615013, China)

Abstract: Vibration of beams and plates is an important physical phenomenon, and the physical phenomena are studied by fourth order nonlinear wave equations in mathematics usually, so investigating fourth order wave equation has important theoretical value and practical significance. Existence and uniqueness of solutions for equations are preliminary and foundation to study the behavior and property of solutions. Existence and uniqueness of global solutions to the nonlinear fourth-order wave equations with weak damping $u_{tt}+\alpha u_t+\Delta^2 u=f(t,x,u,\nabla u)$ are studied. By using spatial sequence techniques and energy estimate methods, it is obtained the equations have the solutions if the nonlinear terms $f(t,x,u,\nabla u)$ satisfy some conditions, and uniqueness of global solutions to the nonlinear fourth-order wave equations with weak damping is proved. This paper extends the nonlinear terms. In the literature, the nonlinear terms are $|u|^{p-1}u$ or $f(u)$, and does not contain derivatives, while the nonlinear terms of this paper are $f(t,x,u,\nabla u)$ therefore the concludes have a broader scope.

Key words: nonlinear fourth-order wave equations; weak damping; global solutions

(责任编辑　李若溪)